UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01135745 6

937.7

Geometrische Kristallographie des Diskontinuums

von

Dr. Paul Niggli
a. o. Professor für Mineralogie, Kristallographie und Petrographie
an der Universität Tübingen

Mit 200 Textfiguren

221047
27. 2. 28

Leipzig
Verlag von Gebrüder Borntraeger
1919

Alle Rechte,
insbesondere das Recht der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten
Copyright, 1919, by Gebrüder Borntraeger in Leipzig

QD
911
N5

Druck von E. Buchbinder (H. Duske) in Neuruppin

Germany

Herrn Professor Dr. U. Grubenmann

in Dankbarkeit gewidmet

Vorwort

Der deutsche Kristallograph (im Gegensatz etwa zum französischen) ist gewohnt die Symmetrieeigenschaften der Kristalle so zu behandeln, als ob die zu untersuchenden Körper nicht nur scheinbare, sondern vollkommene Kontinua wären. Strukturmodelle werden meistens nur anhangsweise als Veranschaulichungsmittel in Rücksicht auf die atomistische Struktur der Materie erwähnt.

In speziellen Vorlesungen am Institut für Mineralogie und Petrographie der Universität Leipzig versuchte ich, die Symmetriebeziehungen am Diskontinuum zu entwickeln und zum Schlusse den Übergang in die Kontinuumsbetrachtung vorzunehmen. Für die Anregung, mich mit Fragen der Kristallstruktur zu befassen, bin ich Herrn Geheimrat Prof. Dr. F. Rinne zu Dank verpflichtet. Durch systematischen Ausbau der Vorlesungen entstand dieses Buch. Es unterscheidet sich von kleineren, ähnlichen französischen Büchern dadurch, daß es die Bravaissche Einschränkung vollständig fallen läßt und in völliger Anlehnung an die Schoenfliesschen Untersuchungen die Deckoperationen der homogenen Diskontinua erschöpfend behandelt, von dem neuerdings erschienenen Buch über Kristallstruktur von Stephan Kreutz durch Überwindung des Sohnckeschen Standpunktes.

Alle möglichen Symmetrieverhältnisse homogener Diskontinua werden darin zum erstenmal eingehend analytisch-geometrisch untersucht. Die gewöhnlichen kristallographischen Kenntnisse sind erwünscht, bei mathematischer Veranlagung aber kaum notwendig. Vor allem sollte zugleich ein Nachschlagewerk geschaffen werden, das rasch und gründlich über alle Symmetrieverhältnisse homogener Diskontinua orientiert. Tabellen, sowie ein eingehendes Sachregister, werden den Gebrauch erleichtern.

Die Anlage des Buches ist folgende: Das erste Kapitel bietet eine prinzipielle Charakterisierung homogener, starrer Diskontinua. Es soll die Begriffe und Vorstellungen präzisieren, mit dem Gegenstand der Betrachtung vertraut machen. Im zweiten Kapitel werden in allgemeiner Weise die Symmetrieverhältnisse der Diskontinua erläutert. Eine schematische Ableitung der Raumsysteme gibt über die vorhandene Mannigfaltigkeit Aufschluß. Das dritte Kapitel vermittelt eine Einzeldarstellung dieser Raumsysteme unter Erwähnung derjenigen Eigenschaften, welche für die praktische Verwendung von Bedeutung sind. Schließlich werden die gewonnenen Erkenntnisse im letzten Kapitel auf das Problem der Kristallstrukturlehre angewandt. Tabellen werden die Bestimmung des Raumsystems einer Kristallart aus Daten röntgenometrischer Untersuchungen gestatten.

Zitate finden sich im allgemeinen im Text nicht vor, in einem Schlußwort wird die historische Entwicklung der Kristallstrukturlehre kurz erwähnt und jener Forscher gedacht, deren Arbeiten die Grundlage für diese Darstellung bilden.

Ich habe mich bemüht, die Erörterungen kurz und sachlich gedrängt durchzuführen, bin aber vor Wiederholungen nicht zurückgeschreckt, wenn mir diese im Interesse der Handlichkeit des Buches wünschenswert erschienen. Zur Kristallstrukturbestimmung wird man hauptsächlich Kapitel III und die Tabellen von Kapitel IV benutzen, und da habe ich zu vieles Aufeinanderrückbeziehen zu vermeiden gesucht.

Für alle diejenigen, welche die älteren Arbeiten kennen, mögen noch zwei Bemerkungen erwünscht sein. Die Symbolisierung der Raumgruppen schließt sich der von A. Schoenflies an und unterscheidet sich nur in kleineren technischen Einzelheiten von ihr. (Wegfallen des Kommas zwischen den Indizes; gleiche Lage der Indizes bei den Raumgruppen- und den Kristallklassensymbolen.) Die Symbole für die Schraubenachsen sind hinsichtlich des Windungssinnes gegenüber den bis jetzt üblichen vertauscht worden. Ich betrachte die Schraubenbewegung im positiven Sinne der auf den Projektionsebenen senkrecht stehenden Achsen, so daß die Flügelrichtungen direkt die Richtung der aufsteigenden Bewegung angeben. In dem Sinne ist die Fußnotenbemerkung auf Seite 28 zu verstehen. Selbstverständlich tritt in der Bezeichnung von linkem und rechtem Windungssinn keine Änderung ein. Es wird also die linke Schraubenachse mit einem Symbol bezeichnet, das sonst für die rechte üblich war. Ich glaube, daß diese Methode didaktisch einen Fortschritt bedeutet, da in der gesamten Kristallographie die positive Richtung Grundrichtung ist.

Das Manuskript war vor Weihnachten 1917 vollständig abgeschlossen. Verlag und Druckerei sind mir in jeder Beziehung weitgehend entgegengekommen. Ich schulde ihnen herzlichen Dank. Die sorgfältige Herstellung des Sachregisters verdanke ich meinem Assistenten Herrn Dr. P. J. Beger. Wertvolle Unterstützung hat mir Herr Beger auch beim Lesen der Korrekturen zum IV. Kapitel zuteil werden lassen.

Es freut mich, daß ich meine erste größere Arbeit meinem hochverehrten Lehrer und Freund Herrn Prof. Dr. U. Grubenmann widmen darf.

Tübingen, im Frühjahr 1919

Paul Niggli

Inhaltsverzeichnis

Seite

I. Kapitel: Allgemeine Charakterisierung homogener, starrer Diskontinua . . 1

1. Voraussetzungen und ihre Begründung 1
2. Die Darstellung von Punkten, Geraden und Ebenen . . . 3

II. Kapitel: Die Symmetrieeigenschaften homogener Diskontinua 18

1. Identität und primitive Translationen 18
2. Eigentliche Symmetrieelemente und ihre gegenseitigen Beziehungen 25
3. Schema der speziellen Ableitung aller möglichen Raumgruppen 58
4. Einteilung und Gruppierung der Raumsysteme 97
5. Tabellen I und II 125

III. Kapitel: Die analytisch-geometrische Darstellung der 230 Raumsysteme . . 134

1. Allgemeines 134
2. Spezielle Darstellung 144

Trikline Abteilung 144

Triklin hemiedrische Klasse (Pediale Klasse) 144
Triklin holoedrische Klasse (Pinakoidale Klasse) 145

Monokline Abteilung 146

Hemiedrische Klasse (Domatische Klasse) 146
Hemimorphe Klasse (Sphenoidische Klasse) 150
Holoedrische Klasse (Prismatische Klasse) 153

Rhombische Abteilung 160

Hemimorphe Klasse (Pyramidale Klasse) 160
Hemiedrische Klasse (Bisphenoidische Klasse) 176
Holoedrische Klasse (Bipyramidale Klasse) 186

Rhomboedrische Abteilung 222

Allgemeine Bemerkungen 222
Tetartoedrische Klasse (Trigonal pyramidale Klasse) 227
Paramorphe Klasse (Rhomboedrische Klasse) 230
Hemimorphe Klasse (Ditrigonal pyramidale Klasse) 232
Enantiomorphe Klasse (Trigonal trapezoedrische Klasse) . . . 237
Holoedrische Klasse (Ditrigonal skalenoedrische Klasse) . . . 242

Tetragonale Abteilung 251
Tetartoedrische Klasse II. Art (Tetragonal bisphenoidische Klasse) 252
Tetartoedrische Klasse I. Art (Tetragonal pyramidale Klasse) . . 255
Hemimorphe Klasse (Ditetragonal pyramidale Klasse) 261
Paramorphe Klasse (Tetragonal bipyramidale Klasse) 273
Hemiedrische Klasse II. Art (Tetragonal skalenoedrische Klasse) . 279
Enantiomorphe Klasse (Tetragonal trapezoedrische Klasse) . . . 294
Holoedrische Klasse (Ditetragonal bipyramidale Klasse) 304
Hexagonale Abteilung 332
Trigonale Tetartoedrie (Trigonal bipyramidale Klasse) 332
Trigonale Hemiedrie (Ditrigonal bipyramidale Klasse) 333
Tetartoedrische Klasse (Hexagonal pyramidale Klasse) 338
Hemimorphe Klasse (Dihexagonal pyramidale Klasse) 340
Paramorphe Klasse (Hexagonal bipyramidale Klasse) 343
Enantiomorphe Klasse (Hexagonal trapezoedrische Klasse) . . . 345
Holoedrische Klasse (Dihexagonal bipyramidale Klasse) 348
Kubische Abteilung 354
Tetartoedrische Klasse (Tetraedrisch-pentagondodek. Klasse) . . 354
Paramorphe Klasse (Dyakisdodekaedrische Klasse) 361
Hemimorphe Klasse (Hexakistetraedrische Klasse) 369
Enantiomorphe Klasse (Pentagonikositetraedrische Klasse) . . . 376
Holoedrische Klasse (Hexakisoktaedrische Klasse) 387
3. Tabellarische Zusammenstellungen 401
Tabelle IV. Systematik der Punktlagen 404
Tabelle V. Die Flächenformen 412
4. Anhang. Die Gitterkomplexe 414
Tabelle VI. Die nonvarianten Gitterkomplexe 418
IV. Kapitel: Die Kristalle in der Auffassung als homogene Diskontinua . . . 424
1. Einleitung 424
2. Allgemeine physikalisch-chemische Erwägungen 425
3. Die Bestimmung der Raumgruppen bei gegebener Atomschwerpunktsanordnung 434
a) Struktur von Steinsalz 435
b) Chemische Komplexsymmetrie und Kristallstruktur 451
c) Einige andere einfache Strukturbilder 459
4. Allgemeines über Struktur und Massenverteilung, sowie über die Bestimmung der Atomschwerpunktsanordnung . 463
a) Beispiele, wie L und δ bei gegebener, einfacher Massenverteilung von den Indizes der Flächen abhängig sind 466
b) Über die Größen L und δ bei allgemeinster Lage des Massenkomplexes 476
c) Benutzung der gefundenen Abhängigkeitsbeziehungen zur Raumsystemsbestimmung 487
Bestimmungstabelle XII 493
d) L und δ in ihrer Abhängigkeit von der Punktlage 503
e) Allgemeine Hinweise zur Bestimmung der Koordinatenwerte der Massenschwerpunkte 506
f) Weitere analytisch-geometrische Beziehungen der Massenverteilung 517

5. Deformationen der Struktur in sich 523
Abhängigkeit von der Temperatur und Zusammensetzung 524
Isotypie 530
Modifikationsänderungen 532
Mechanische Translationen 539
Kristallschiebung 540
6. Die Zusammenfassung der Raumsysteme und Kristallklassen hinsichtlich besonderer physikalischer Vorgänge 548
7. Die sogenannte Pseudohomogenität und Zwillingsbildung 551
Schlußwort 561
Register 565
Korrekturen 576

I. Kapitel: Allgemeine Charakterisierung homogener, starrer Diskontinua

1. Voraussetzungen und ihre Begründung

Die Kristalle sind nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch anisotrope, homogene Körper. Der makroskopischen und mikroskopischen Betrachtung erscheinen sie als Kontinua. Anisotropie und Homogenität bedeuten dann, daß im allgemeinen das physikalische und chemische Verhalten von der Richtung und, da (kontinuierliche Homogenität!) jeder Punkt dem anderen identisch erscheint, einzig von der Richtung abhängig sind.

Die moderne Physik kann die diskontinuierliche Struktur der Materie als Erfahrungstatsache ansehen. Die scheinbare Kontinuität beruht nach ihr nur auf der submikroskopischen Kleinheit der Abstände zwischen den Massenteilchen. Jedes Diskontinuum ist an und für sich (einen Moment als ruhend betrachtet) notwendigerweise anisotrop. Es kann unmöglich nach allen Richtungen ein gleiches Verhalten aufweisen. Eine statistische Isotropie wird sich als zeitlicher, räumlicher oder zeitlichräumlicher Mittelwert nur bei intensivstem regellosem Wechsel der Richtungsverschiedenheiten einstellen. Homogen ist ein derartiges statistisch-isotropes Diskontinuum (Gas, Flüssigkeit, porodine und hyaline Körper) ebenfalls nur im statistischen Sinne.

Ist die Homogenität eine reelle, räumlich periodische, das heißt tritt die wirkliche Identität im unendlich ausgedehnt[1]) gedachten Diskontinuum unendlichmal auf, so besitzt das Diskontinuum eine gesetzmäßige Anisotropie. Gewohnheitshalber verbinden wir damit den Begriff des Starren; an Stelle der starren Punkte können wir uns später Schwingungszentren von Massenteilchen denken. Ein derartig homogenes[2]) Diskontinuum stellt unabhängig von jeder materiellen Verbildlichung zugleich einen mathematischen Begriff dar, aus dem die rein geometrischen Eigenschaften abgeleitet werden können. Das soll im folgenden in einer

[1]) Indem wir das Diskontinuum als unendlich ausgedehnt betrachten, sehen wir von allen an Grenzflächen auftretenden Erscheinungen ab.

[2]) Im folgenden kurzweg als „homogen" bezeichnet.

Darstellungsart geschehen, die sich eng an die üblichen Bezeichnungsweisen der gewöhnlichen Kristallographie anschließt.

Im Diskontinuum kann die Identität nur in Abständen, die nicht unter einen endlichen Wert sinken, auftreten; die Homogenität kann nur eine periodische sein. Es ist nicht mehr möglich, daß alle Punkte einander identisch sind; die Identität selbst ist diskontinuierlich struiert.

Tritt in einem unendlich ausgedehnten Diskontinuum die Identität zweimal (an verschiedenen Stellen) auf, so tritt sie unendlichmal auf. Zwei Punkte[1]) im unendlich ausgedehnten Raume sind ja definitionsgemäß nur dann als identisch zu bezeichnen, wenn sie, ohne daß eine Verschiebung, Drehung oder Spiegelung ausgeführt werden muß, in gleicher Weise von den übrigen Punktarten umgeben sind, so daß eine Unterscheidung beider Lagen unmöglich ist, beziehungsweise nur durch willkürliche Nummerierung erhalten werden kann. Ist nun (Fig. 1) der Punkt A_1 dem Punkt A_2

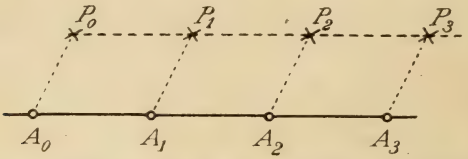


Fig. 1. Auf parallelen Geraden sind die Identitätsabstände einander gleich.

identisch, so folgt notwendigerweise, daß A_2 auch im Abstande $A_2A_3 = A_1A_2$ von einem mit A_2 identischen Punkt A_3, und daß A_1 im Abstand A_1A_0 von einem identischen Punkt A_0 umgeben sein müssen. Die Anordnung setzt sich so von selbst längs der Geraden ins Unendliche fort. Ist P_1 irgend ein beliebiger anderer Punkt im Abstande A_1P_1 von A_1, so muß im gleichen Abstande, in der gleichen Richtung von A_2 aus, in P_2 ein damit identischer Punkt auftreten, denn sonst wären die Anordnungen um die beiden Punkte A_1 und A_2 voneinander unterscheidbar. Augenscheinlich ist $P_1P_2 = A_1A_2$ und in Fortführung des Gedankenganges erhalten wir sofort den Satz: Auf parallelen Geraden sind die Identitätsabstände einander gleich. In einer zur Punktreihe $A_0A_1A_2 \ldots\ldots$ geneigten Richtung können zu den A-Punkten identische Punkte ebenfalls nur in gewissen Abständen auftreten, die im allgemeinen von denen der ersten Punktreihe verschieden sein müssen,

[1]) Den „Punkten" kommen hier in Abweichung von der rein mathematischen Definition gewisse unterscheidende Eigenschaften zu. Ausdrücke wie „Lage" und „Stelle" sind etwas zu unbestimmt. Nicht selten wird späterhin im ähnlichen Sinne „Punktlage" verwendet.

da eine räumliche Anordnung von Punkten in lauter gleichen Abständen unmöglich ist. Hinsichtlich der Größe der Abstände längs paralleler Geraden gilt wieder der oben abgeleitete Satz. Die Identitätsabstände sind daher von der Richtung und einzig von der Richtung abhängig. Damit ist der Gegensatz zwischen einem homogenen Kontinuum und einem reell homogenen Diskontinuum auf eine einfache Formel gebracht. Im ersteren ist jeder Punkt dem andern identisch, im letzteren tritt die Identität in bestimmten, nicht unter einen endlichen Wert sinkenden, einzig von der Richtung abhängigen, Abständen auf.

Einzige Voraussetzung ist, daß fernerhin immer unendlich ausgedehnte, räumlich homogene Diskontinua betrachtet werden, bei denen die Identität in, nicht unter einen endlichen Wert hinuntergehenden, einzig von der Richtung abhängigen, Abständen auftritt.

2. Die Darstellung von Punkten, Geraden und Ebenen

Es seien an irgend einer Stelle eines dreidimensionalen homogenen Diskontinuums die drei kürzesten, nicht in einer Ebene liegenden[1]), Identitätsabstände in Länge und Richtung durch e, f, g gegeben. Da die Identitätsabstände einzig von der Richtung abhängig sind, müssen e, f, g auch an irgend einer anderen Stelle die kürzesten[2]) Abstände identischer Punkte darstellen. Sind e, f, g nach Länge und Richtung bekannt, so lassen sich daher leicht alle einem bestimmten Punkt (A_0) identischen Punkte konstruieren (Fig. 2). Drei Punktreihen mit den konstanten Abständen e, beziehungsweise f, beziehungsweise g sind durch die drei beliebig und beidseitig verlängerten Geraden der Richtung e, f, g durch A_0 bereits gegeben. Aber auch durch jeden so neu entstandenen identischen Punkt müssen parallel dazu die drei Punktreihen gehen usf. Alle Punkte zusammen bilden die Gitterpunkte eines Raumgitters. Daß außer diesen Punkten keine anderen Punkte existieren können, die mit A_0 identisch sind, zeigt eine einfache Überlegung. Je acht Punkte (beispielsweise A_0 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7) bilden die Ecken eines Parallelepipeds mit e, f, g als Kanten. Irgend ein Punkt im Innern oder auf den Seitenflächen eines solchen Parallelepipeds hat notwendigerweise von einem der Eckpunkte einen Abstand, der kürzer ist als e oder f oder g; er kann daher gemäß unserer Voraussetzung (e, f, g kürzeste nicht komplanare Identitätsabstände) mit keinem Eckpunkt identisch sein.

[1]) nicht komplanaren.

[2]) Zwei davon sind stets die wirklich kürzesten Identitätsabstände. Sie bestimmen eine Ebene. Außerhalb dieser Ebene ist der dritte dann ebenfalls der kürzeste Abstand. Es ist lediglich möglich, daß innerhalb der Ebene noch ein kürzerer Abstand auftritt, der aber als komplanar mit den ersten zwei nicht in Frage kommt.

Die Beziehung e, f, g gleich kürzeste nicht komplanare Identitätsabstände gilt aber auch für irgendwelche Punkte, P, die von A verschieden sind, also im Innern der vorhingenannten Parallelepipede liegen. Die einem Punkte P_0 identischen Punkte bilden daher ein gleiches, parallel verschobenes, System von Gitterpunkten wie die Punkte $A_0\ A_1\ A_2 \ldots$. Daraus ergibt sich ohne weiteres der wichtige Satz, daß keine zwei Punkte im Innern eines Parallelepipeds e, f, g einander identisch sein können. Nur wenn die Punkte an der Oberfläche des Parallelepipeds liegen (Seitenfläche, Kante, Ecke) sind ihnen 2, 4 oder 8 identische, ebenfalls auf entsprechenden Seitenflächen, Kanten, Ecken

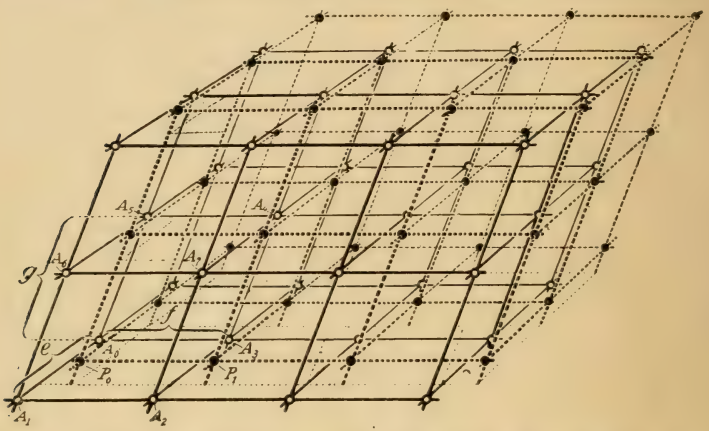


Fig. 2. Homogenes Diskontinuum mit zwei eingezeichneten Identitätsscharen von Punkten. (Kreise = A-Schar, schwarze Punkte = P-Schar.)

befindliche, Punkte zugeordnet, die aber gleichzeitig 2, 4 oder 8 Parallelepipeden gemeinsam angehören, somit hinsichtlich des einen insgesamt nur einmal zu zählen sind.

Anderseits besitzt jeder Punkt außerhalb eines beliebig herausgegriffenen derartigen Parallelepipeds innerhalb dieses Parallelepipeds einen zu ihm identischen Punkt. Die identische Punktschar bildet ja ein Gitter mit Maschen von der Größe und Gestalt des Parallelepipeds, so daß, bei der lediglich parallelen Verschiebung, sicherlich ein Eckpunkt in die ursprüngliche Zelle fällt. Das durch die Kanten e, f, g (in Länge und Richtung) gegebene Parallelepiped umfaßt somit an irgend einer Stelle des homogenen Diskontinuums den gesamten Raum der Nichtidentität.

Diese Ausführungen ermöglichen die Aufstellung der Gleichung identischer Punkte oder kurz der Gleichungen der Identität. Irgend

ein Punkt im unendlich ausgedehnten homogenen Diskontinuum sei Koordinatenanfangspunkt. Zu Koordinatenachsen werden der Einfachheit halber die Richtungen e, f, g gewählt. Die zu einem Punkt mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1 gehörigen identischen Punkte besitzen dann Koordinaten, die in den drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + r \cdot e \\ y &= y_1 + s \cdot f \\ z &= z_1 + t \cdot g \end{aligned} \qquad 1)$$

enthalten sind, wenn r, s, t unabhängig voneinander alle positiven und negativen ganzzahligen Werte (einschließlich Null) annehmen. Die Gleichungen lassen sich auch schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{x}{e} &= \frac{x_1}{e} + r \\ \frac{y}{f} &= \frac{y_1}{f} + s \\ \frac{z}{g} &= \frac{z_1}{g} + t \end{aligned} \qquad 2)$$

Die auftretenden Brüche stellen Koordinatenwerte dar, wenn e, f, g die verschiedenen Einheitsmaßstäbe in den Achsenrichtungen sind. Derartige Koordinatenwerte bezeichnen wir mit X, Y, Z.

Da die Verschiedenartigkeit der Richtungen für das Diskontinuum geradezu charakteristisch ist, werden von jetzt an stets die Koordinaten auf derartige, die Einheit der Maßstäbe jeweilen selbst bestimmende, Achsen bezogen, genau wie das bei der Flächenbezeichnung in der gewöhnlichen Kristallographie der Fall ist.

Nun lauten die Gleichungen identischer Punkte:

$$\begin{aligned} X &= X_1 + r \\ Y &= Y_1 + s \\ Z &= Z_1 + t \end{aligned} \qquad 3)$$

Zu einem Punkte mit den Koordinaten $[\![X_1, Y_1, Z_1]\!]$ gehören als identische Punkte die, deren Koordinaten sich durch Addition oder Subtraktion ganzer Zahlen aus X_1, Y_1, Z_1 ableiten lassen. Die Gleichungen 3) lassen sich auch als goniometrische beziehungsweise als zyklometrische Funktionen schreiben:

$$\begin{aligned} \text{tg } X\pi &= k_x \text{ bezw. } X = \frac{\text{arc tg } k_x}{\pi} \\ \text{tg } Y\pi &= k_y \text{ bezw. } Y = \frac{\text{arc tg } k_y}{\pi} \\ \text{tg } Z\pi &= k_z \text{ bezw. } Z = \frac{\text{arc tg } k_z}{\pi} \end{aligned} \qquad 4)$$

Die verschiedenen Werte, die X, Y, Z annehmen können, sind nun in den zur Funktion gehörigen verschiedenen Lösungen enthalten.

k_x, k_y, k_z sind für jede Schar der Identität Konstanten; im übrigen entsprechen allen verschiedenen Wertekombinationen von k von $-\infty$ über 0 zu $+\infty$ neue in sich jeweilen identische Punktscharen. Durch die Konstanten k_x, k_y, k_z oder durch irgend drei zusammengehörige Koordinatenwerte X_n, Y_n, Z_n, ist die Lage jedes Punktes der gesamten Identitätsschar bestimmt. Die Koordinaten desjenigen Punktes der Schar, der im (willkürlich gewählten) ersten positiven Parallelepiped e, f, g liegt (mit dem Koordinatennullpunkt als Eckpunkt links hinten unten) nennen wir M, N, P. Sie sind in den Scharengleichungen dadurch gekennzeichnet, daß die Subtraktion der Einheit die positiven Werte in negative überführt, beziehungsweise, daß sie die kleinsten positiven Werte sind, welche die Gleichungen der zyklometrischen Funktionen befriedigen.

Es ist von Interesse, diese Werte M, N, P mit k_x, k_y, k_z zu vergleichen. M, N, P sind, da ja e, f, g Einheiten bezeichnen, stets positive echte Brüche, einschließlich etwa Null. Den Koordinatenwerten 0, 0, 0 entsprechen die Werte $k_x = 0$, $k_y = 0$, $k_z = 0$. Die Gleichung 4) der Gitterpunkte eines Raumgitters, bezogen auf sein eigenes Koordinatensystem, ist daher:

$$X = \frac{\text{arc tg } 0}{\pi}; \quad Y = \frac{\text{arc tg } 0}{\pi}; \quad Z = \frac{\text{arc tg } 0}{\pi}$$

Der zu einem niedrigen k-Wert gehörige kleinste positive oder negative Koordinatenwert ergibt sich nach der Reihenentwicklung:

$$\pi X = k_x - \frac{1}{3}k_x^3 + \frac{1}{5}k_x^5 - \frac{1}{7}k_x^7 + \frac{1}{9}k_x^9 + \ldots\ldots$$

Ist er negativ, so erhält man das zugehörige M durch Addition von 1. Zu einem $X = -\frac{1}{5}$ gehört beispielsweise ein M von $+\frac{5}{6}$. Ein Punkt $X = -\frac{1}{5}$, $Y = -\frac{3}{4}$, $Z = +\frac{1}{8}$ besitzt in $\frac{5}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ den identischen Punkt M, N, P.

Bis zu den Koordinatenwerten $\frac{1}{2}$ (von Null an) sind die zugehörigen k-Werte positive Zahlen von 0 bis $+\infty$; von $\frac{1}{2}$ bis 1 negative Zahlen von $-\infty$ bis 0. Es unterscheiden sich die k-Werte der Koordinaten $\frac{1}{2} + d$ und $\frac{1}{2} - d$ nur durch das Vorzeichen von k.

Punkte mit k-Werten $= \infty$ bestimmen die Außenflächen eines dem Koordinatenparallelepiped inhaltsgleichen und formgleichen Parallelepipeds, dessen Zentrum der Nullpunkt ist.

k_x, k_y, k_z sind zur Charakterisierung der Punktschar einer Identität sehr gut geeignet. Natürlich können wir dazu auch die Werte M, N, P verwenden, wenn festgesetzt wird, daß damit ohne weiteres alle durch Addition oder Subtraktion von ganzen Zahlen erhaltenen Werte inbegriffen sein sollen. Das letztere hat den Vorteil, daß die Lage ohne Umrechnung sofort eingezeichnet werden kann.

Im folgenden wird von beiden Bezeichnungsweisen Gebrauch gemacht, wenn auch im eigentlich darstellenden Teil lediglich die letztere angewandt wird. Um sie auch formal voneinander zu unterscheiden, werden die zahlengemäßen Koordinatenwerte stets in Bruchform, die k-Werte in dezimaler Schreibweise dargestellt.

Die Werte werden in der auf X, Y, Z bezüglichen Reihenfolge M, N, P beziehungsweise k_x, k_y, k_z in doppelt eckige Klammern eingefaßt und ergeben so das Symbol einer identischen Punktschar, beziehungsweise eines Punktes im Raume des homogenen Diskontinuums. Allgemein lautet es:

$$[\![M, N, P]\!] \text{ oder } [\![k_x; k_y; k_z]\!]$$

Beispielsweise entsprechen

$$\left[\!\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]\!\right] \text{ dem zweiten Symbol } [\![1{,}00; 1{,}00; 1{,}00]\!]$$

ferner $\left[\!\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]\!\right]$ dem zweiten Symbol $[\![1{,}73205\ldots; 1{,}00; 1{,}73205\ldots]\!]$

Kommen einmal zur Charakterisierung eines speziellen Punktes negative Werte in Frage, so werden die Minuszeichen über die betreffenden Buchstaben oder Zahlen gesetzt.

Zwei Gerade nennen wir identisch, wenn zu jedem Punkt der einen Geraden ein identischer Punkt der anderen Geraden gehört und umgekehrt. Ebenso sind zwei Ebenen identisch, wenn zu allen Punkten der einen Ebene identische Punkte der anderen Ebene gehören. Die Richtigkeit der folgenden Sätze ist leicht ersichtlich: Im unendlich ausgedehnten homogenen Diskontinuum gehören zu einer Geraden (Ebene) unendlich viele identische Gerade (Ebenen), die alle einander parallel sind und bestimmte Abstände voneinander besitzen. Es genügt zur Kennzeichnung der Identität zweier Geraden oder Ebenen die Angabe, daß sie durch zwei einander identische Punkte gehen und sich parallel sind. Kennen wir die Lage eines Elementes dieser Parallelscharen hinsichtlich eines Nichtidentitätsraumes (als Parallelepiped e, f, g), so ist die ganze Schar bestimmt.

Wir bezeichnen irgend einen Punkt des unendlichen, homogenen Diskontinuums als Koordinatenanfangspunkt und wählen in Länge und Richtung die kürzesten drei, nicht in einer Ebene liegenden Identitätsabstände e, f, g als Koordinatenachsen. Eine durch den Anfangspunkt gehende Gerade besitzt dann die Gleichung

$$\frac{X}{U} = \frac{Y}{V} = \frac{Z}{W} \qquad 5)$$

U, V, W sind für die betreffende Gerade Konstanten, sie sollen keinen gemeinsamen ganzzahligen Teiler besitzen und, was in beliebiger Annäherung stets möglich ist, als ganze Zahlen

dargestellt werden (Fig. 3). Da U, V, W die kleinstmöglichen ganzen Zahlen sind, welche die Gleichungen befriedigen, so sind sie zugleich die Koordinaten des dem Nullpunkt nächstgelegenen identischen Punktes auf der Geraden[1]). Sie heißen die Indizes

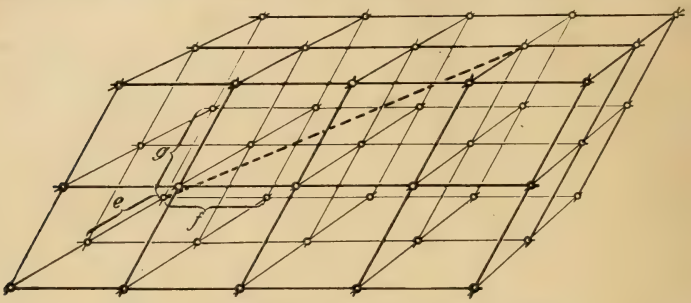


Fig. 3. Die gestrichelte Linie ist die Gerade $[132]^{00}$.

der Geraden. Durch die zahlengemäße Angabe von U, V, W ist bei gegebenem Koordinatensystem e, f, g die Lage einer Geraden eindeutig bestimmt. In einfach eckiger Klammer als [U, V, W] stellen sie das Symbol der Geraden dar.

Da jeder Geraden eine ganze Parallelschar identischer Geraden beigeordnet ist, die in dem angenommenen Falle durch die zu dem Anfangspunkt identischen Punkte gehen, können wir definitionsgemäß festsetzen, daß [U, V, W] zugleich das Symbol für die ganze Identitätsschar bedeuten soll. Ist eine der drei Größen U, V, W Null, sind die anderen aber irgendwelche reellen Zahlenwerte, so sind die Gleichungen 5) nur erfüllt, wenn die zum Nullwert gehörigen Koordinaten selbst stets Null sind. [0, V, W] sind somit Geraden, die in den Y-Z-Ebenen liegen. [U, 0, 0] stellt eine Gerade dar, die sowohl in der X-Y- als auch in der X-Z-Ebene liegt, sie ist deshalb mit der e-Achse ident. U gibt man in diesem Falle den Wert 1. Die f-Achse besitzt das Symbol [010], die g-Achse das Symbol [001]. Auch in diesen Fällen seien, wenn nichts Besonderes bemerkt ist, stets die ganzen identischen Parallelscharen im Symbol inbegriffen.

Die Gleichungen einer nicht durch den Koordinatenanfangspunkt gehenden Geraden lauten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{Y}{V} &= \frac{X}{U} + \frac{B}{V} \quad \text{bezw. } Y = \frac{V}{U}X + B \\ \frac{Z}{W} &= \frac{X}{U} + \frac{C}{W} \quad \text{bezw. } Z = \frac{W}{U}X + C \end{aligned}\right\} \quad 6)$$

[1]) Beziehungsweise, bei in Wirklichkeit irrationalen Zahlen, des in der gewünschten Annäherung identisch gelegenen Punktes.

B und C sind bekanntlich die Koordinaten der Durchstoßpunkte dieser Geraden mit der Y-Z-Ebene. Die Gleichungen 5) können wir als einen Spezialfall der Gleichungen 6) auffassen, insofern als dort der Durchstoßpunkt mit dem Koordinatenanfangspunkt zusammenfällt, B und C also gleich Null werden.

Im homogenen Diskontinuum tritt an Stelle eines einzelnen Punktes, einer einzelnen Geraden oder Ebene stets die ganze Identitätsschar. Es interessiert uns weniger, ob ein Punkt auf einer bestimmten Geraden liegt, als ob er überhaupt auf irgend eine der Geraden einer gegebenen Identitätsschar fällt. Wir müssen daher immer die Scharengleichungen kennen.

Welcher Art sind nun die Gleichungen derjenigen Geraden, die einer durch 6) gegebenen Geraden ident sind? Zunächst ist aus der analytischen Geometrie des Raumes bekannt, daß U, V, W nur für die Richtung maßgebend sind, parallele Geraden also gleiches U, V, W, das heißt gleiche Indizes besitzen. Hingegen werden die Koordinaten der Durchstoßpunkte andere werden. Nun gehen definitionsgemäß identische Geraden durch identische Punkte, erfüllen also X_1, Y_1, Z_1 die Gleichungen der gegebenen Geraden, so werden $X_1 + r$, $Y_1 + s$, $Z_1 + t$ den Gleichungen dazu identischer Geraden Genüge leisten, wobei r, s, t ganze positive oder negative Zahlen einschließlich Null sein müssen. Wir erhalten demnach zur Bestimmung von B′ einer identischen Geraden die beiden Bedingungen:

$$\text{I.} \quad U \cdot B = Y_1 \cdot U - X_1 \cdot V$$

$$\text{II.} \quad U \cdot B' = (Y_1 + s) \cdot U - (X_1 + r) \cdot V$$

Subtraktion der Gleichung I von II ergibt:

$$U(B' - B) = sU - rV. \qquad 7)$$

Nun sind r, s sowie U, V ganze Zahlen, infolgedessen muß auch $U(B' - B)$ eine ganze Zahl sein. Für den speziellen Fall, daß $U = 1$ wird, ist selbst $(B' - B)$ eine ganze Zahl. Die Gleichung 7) tritt in diophantischer Form auf. Sofern U und V keine gemeinsamen ganzzahligen Teiler besitzen, ist somit für irgend einen ganzzahligen positiven negativen Wert von $U(B' - B)$ eine Lösung möglich. Haben U und V einen derartigen gemeinsamen Teiler, so muß er auch $U(B' - B)$ zukommen. Es sei der allfällig vorhandene gemeinsame Faktor mit d bezeichnet, dann ergibt sich der Satz:

Ist B die Y-Koordinate des Durchstoßpunktes einer Geraden mit den Indizes U, V, W auf der Y-Z-Ebene, so sind alle B′, die der Bedingung $\frac{U(B' - B)}{d} = r_1$ genügen, mögliche Y-Koordinatenwerte von Durchstoßpunkten dazu identischer Geraden. r_1 kann irgend eine positive oder negative ganze Zahl (einschließlich Null) sein. Ganz analog

erhält man für die C′ identischer Geraden die diophantische Gleichung:

$$U(C' - C) = tU - rW \qquad 8)$$

Sie führt zu einem dem vorigen parallelen Satz.

Nicht alle möglichen Kombinationen der so abgeleiteten B′- und C′-Werte brauchen aber zusammengehörigen Koordinatenwerten von Durchstoßpunkten identischer Geraden zu entsprechen; damit sie das gleichzeitig sind, muß noch eine weitere Bedingung erfüllt sein. Der Punkt $[\![0\ B'\ C']\!]$ muß nämlich mit einem Punkt $[\![r, B+s, C+t]\!]$ auf einer Geraden liegen, deren Richtung durch U, V, W gekennzeichnet ist. Das gibt nach der analytischen Geometrie die Bedingungen:

$$\frac{V}{U} = \frac{(B' - B) - s}{(-r)}$$

$$\frac{W}{U} = \frac{(C' - C) - t}{(-r)}$$

woraus erhalten wird:

$$W[U(B' - B)] - V[U(C' - C)] = [sW - tV]U \qquad 9)$$

Alle in eckige Klammern eingeschlossenen Werte sind ganze Zahlen, der auf der rechten Seite stehende kann eine beliebige ganze Zahl sein[1]), zu einem auf der linken Seite stehenden bekannten Klammerwert will man einen die Gleichung befriedigenden anderen Wert suchen. Die in den eckigen Klammern eingeschlossenen Werte seien der Reihe nach mit o, p, q bezeichnet, so daß

$$Wo = Vp + qU$$

die aufzulösende diophantische Gleichung ist. Ist B′ (also auch o) bekannt, so erhält man durch Auflösung der Gleichung eine ganze unendliche Reihe zugehöriger p- (das heißt auch C′)-Werte. Sie bilden eine arithmetische Reihe mit U als konstanter Differenz. Hätten W und V einen gemeinsamen Teiler d_1, so dürften nur die Werte von p berücksichtigt werden, die gleichzeitig q-Werte ergeben, welche durch d_1 ganzzahlig teilbar sind.

Die Gleichungen 7), 8), 9) ermöglichen also stets die Aufstellung aller Gleichungen von Geraden, die einer gegebenen Geraden identisch sind. Durch U, V, W und ein zusammengehöriges Wertepaar B, C ist die ganze Identitätsschar von Geraden eindeutig bestimmt.

Wir können daher U, V, W und B, C zur Symbolisierung der ganzen Identitätsschar verwenden. Um eine einfache, unzweideutige Charakterisierung zu erlangen, benutzen wir die kleinsten positiven, zusammengehörigen B- und C-Werte, das heißt, wir kennzeichnen die Schar durch diejenige Gerade, deren Durchstoßpunkt im ersten positiven Parallelepiped dem Nullpunkt am nächsten

[1]) sofern W und V keinen gemeinsamen Teiler haben.

liegt. Zu gegebenen B- und C-Werten erhält man die kleinstmöglichen positiven Werte B_k und C_k folgendermaßen.

Es muß nach 7)

$$BU = B_k U + s \text{ sein,}$$

wenn s eine positive oder negative ganze Zahl ist (eventuell durch einen U, V gemeinsamen ganzzahligen Faktor teilbar).

Somit ist

$$B_k = \frac{BU - s}{U}$$

und es ist lediglich der Zähler zur kleinsten Zahl zu machen, die dem ganzen Bruch einen positiven Wert verleiht. In gleicher Weise kann man die kleinsten und nächstkleinsten C-Werte bestimmen und an Hand von Gleichung 9) das in Frage kommende zusammengehörige Paar festlegen. Das Symbol der Identitätsschar der Geraden schreiben wir nun zu $[U, V, W]^{B_k C_k}$, so daß das Symbol einer, durch die dem Nullpunkt identischen Punkte gehenden, Schar speziell zu $[U, V, W]^{0,0}$ wird[1]).

U, V, W haben wir als Indizes der Geraden bezeichnet, B und C wollen wir die Kennziffern nennen. Ein allgemeiner Satz lautet dann: Parallele Geraden besitzen gleiche Indizes. Identische parallele Geraden besitzen außerdem Kennziffern B und C, deren Produkte mit dem ersten Index durch Addition oder Subtraktion ganzer Zahlen einzeln auseinander ableitbar sind und deren gegenseitige Kombination die Gleichung 9) befriedigt.

Diejenigen Geraden, die der Y-Z-Ebene parallel sind, besitzen mit dieser Ebene keine reellen Durchstoßpunkte. B und C sind ∞. Nun kann man den Geradengleichungen immer entsprechend umgeänderte Formen geben, wobei als neue Konstanten die Durchstoßpunktkoordinaten mit der YZ- oder XY-Ebene auftreten. Alle Ableitungen sind im übrigen den gegebenen analog, so daß darauf nicht weiter eingegangen zu werden braucht. Man benutzt die Koordinaten A, C′ des Durchstoßpunktes auf der X-Z-Ebene und schreibt das Symbol der Identitätsschar als ${}^{A_k C'_k}[U\,V\,W]$. U ist dann übrigens stets $= 0$.

Von Geraden [001] muß man schließlich die Durchstoßpunkte auf der X-Y-Ebene kennen. Die Symbolisierung lautet $[0, 0, 1]_{A'_k, B'_k}$. Die Stellung der Kennziffern entspricht den gegenseitigen Lagen der 3 Koordinatenebenen.

Die so festgesetzte Bezeichnungsweise hat den Vorteil, daß eine Gerade sofort eingezeichnet werden kann. In gewissem Sinne (vergl.

[1]) $[U, V, W]^{BC}$ ist auch das Symbol einer Einzelgeraden, das ja von dem der Schar (außer durch die speziellen B-, C-Werte) nicht unterschieden zu werden braucht, da die Identitätsschar stets ohne weiteres vorhanden ist und jede ihrer Geraden genau die gleichen Verhältnisse aufweist.

Ebenendarstellung) konsequenter wäre es, wenn als Kennziffern statt B und C direkt UB und UC gewählt würden. Unterschiede zwischen beiden Bezeichnungsweisen ergeben sich natürlich nur, wenn U von 1 verschieden ist. Auch als zyklometrische Funktion läßt sich die Gleichung einer identischen Geradenschar schreiben, beispielsweise als:

$$\left.\begin{aligned} \frac{Y}{V} &= \frac{X}{U} + \frac{\text{arc tg } k_B}{\pi \cdot V \cdot U} \\ \frac{Z}{W} &= \frac{X}{U} + \frac{\text{arc tg } k_C}{\pi \cdot W \cdot U}, \end{aligned}\right\} \quad 10)$$

wobei aber zu bemerken ist, daß im allgemeinen nicht alle Kombinationen verwendbar sind. (Siehe Gleichung 9).)

Schließlich seien zur Erläuterung einige Beispiele angeführt.

I. Eine Gerade einer Identitätsschar besitze das Symbol $[5, 4, 1]^{\frac{21}{55}, \frac{1}{5}}$. Es handelt sich also um eine Gerade, die der Verbindungslinie des Nullpunktes mit dem Punkt $[\![5, 4, 1]\!]$ parallel geht und der ein Punkt $\left[\!\left[0, \frac{21}{55}, \frac{1}{5}\right]\!\right]$ angehört.

Zusammengehörige B-, C-Werte, speziell auch B_k und C_k sind gesucht.

$$B_n = \frac{BU - s}{U} = \frac{5 \cdot \frac{21}{55} - s}{5} = \frac{21 - 11s}{55},$$

wo s eine beliebige positive oder negative ganze Zahl ist.

Ebenso wird $C_n = \frac{CU - s'}{U} = \frac{5 \cdot \frac{1}{5} - s'}{5} = \frac{1 - s'}{5}$

$B_k = \frac{10}{55} = \frac{2}{11}$. Nächste Werte sind $\frac{21}{55}, \frac{32}{55}$ usw.

$C_k = \frac{0}{5} = 0$. Nächste Werte sind $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ usw.

Das zu $B = \frac{2}{11}$ gehörige C_x findet man nach

$$W \cdot 5\left(\frac{2}{11} - \frac{21}{55}\right) = V \cdot \left[5\left(C_x - \frac{1}{5}\right)\right] + sU$$

$$-1 \qquad = 4 \cdot \left[5\left(C_x - \frac{1}{5}\right)\right] + 5s$$

s und $\left[5\left(C_x - \frac{1}{5}\right)\right]$ können beliebige ganze Zahlen sein. Die Auflösung der diophantischen Gleichung ergibt für den Klammerausdruck als mögliche arithmetische Reihe . . . . $-4, 1, 6, 11$ . . . . . .

$C_x - \frac{1}{5}$ muß somit . . . . $\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{6}{5}, \frac{11}{5}$ . . . . . sein.

Der zu $B = \frac{2}{11}$ gehörige kleinste positive C-Wert ist somit $= \frac{2}{5}$.

Die Schar ist je nach der relativen Größe von f und g (Länge der Koordinatenachsen und Einheitsmaßstäbe Y, Z) als:

$[5, 4, 1]^{\frac{2}{11}, \frac{2}{5}}$ oder $[5, 4, 1]^{\frac{21}{55}, \frac{1}{5}}$ eventuell $[5, 4, 1]^{\frac{32}{55}, 0}$ zu bezeichnen[1]).

II. Die $[7, 3, 1]^{00}$ nächstgelegenen identischen Geraden besitzen folgende zusammengehörige B- und C-Werte:

Für B und C kommen einzeln die Reihen .... $-\frac{4}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{1}{7}, 0, +\frac{1}{7}, +\frac{2}{7}, +\frac{3}{7}$ ..... in Frage.

Gleichung 9) angewandt ergibt als einfachste zusammengehörige Wertepaare:

B	C
$-\frac{4}{7}$ bezw. $+\frac{3}{7}$	$+\frac{1}{7}$
$-\frac{3}{7}$ bezw. $+\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$ bezw. $+\frac{6}{7}$
$-\frac{2}{7}$ bezw. $+\frac{5}{7}$	$-\frac{3}{7}$ bezw. $+\frac{4}{7}$
$-\frac{1}{7}$ bezw. $+\frac{6}{7}$	$-\frac{5}{7}$ bezw. $+\frac{2}{7}$
0	0
$+\frac{1}{7}$ bezw. $-\frac{6}{7}$	$-\frac{2}{7}$ bezw. $+\frac{5}{7}$
$+\frac{2}{7}$ bezw. $-\frac{5}{7}$	$-\frac{4}{7}$ bezw. $+\frac{3}{7}$ usw.

Die Identitätsschar muß natürlich mit $[7\ 3\ 1]^{00}$ bezeichnet werden.

Die Gleichung einer Ebene schreibt sich zu:

$$X \cdot H + Y \cdot K + Z \cdot L = D \qquad 11)$$

Das Symbol der Ebene sei $(HKL)_D$ mit H, K, L als Indizes in runden Klammern und D als Kennziffer. (Fig. 4.)

H, K, L sollen keinen gemeinsamen ganzzahligen Teiler besitzen und selbst ganzzahlig sein; das ist in beliebiger Annäherung stets möglich. Erweitern oder Abkürzen bringt die Gleichung auf die gewünschte Form, wenn die Konstanten dieser Bedingung zunächst nicht genügen sollten. Der Schnittpunkt der Ebene $(HKL)_D$ mit der X-Achse (e-Achse) ergibt sich aus $X_e \cdot H = D$ zu $X_e = \frac{D}{H}$.

X_e nennt man den Achsenabschnitt der Ebene auf der X-Achse.

---

[1]) Die Komma zwischen den Indizes eines Symbols besitzen keine Bedeutung. Sie werden anfänglich hingesetzt, um das Lesen der Symbole zu erleichtern. Später finden sie sich nur noch da, wo die Deutlichkeit es verlangt (beispielsweise bei Anwesenheit zweistelliger Zahlen).

Ebenso sind $\frac{D}{K}$ und $\frac{D}{L}$ die Achsenabschnitte der Ebene auf den Y- und Z-Achsen. Die Indizes sind somit den Achsenabschnitten umgekehrt proportional. Parallele Ebenen besitzen gleiche H K L und verschiedene Kennziffern, welche letztere dann den variablen Werten der einzelnen Achsenabschnitte direkt proportional sind.

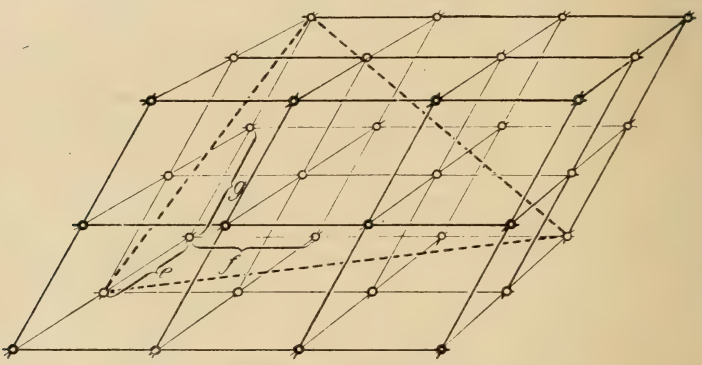


Fig. 4. Die eingezeichnete Ebene hat das Symbol $(623)_6$.

Durch den Koordinatenanfangspunkt gehende Ebenen sind durch $D = 0$ gekennzeichnet. Ihr Symbol ist $= (H K L)_0$.

Die zu einer Identitätsschar gehörigen D-Werte findet man folgendermaßen: Sind M, N, P die Koordinaten eines Punktes, der in der Ebene $(H K L)_D$ liegt, so muß irgend eine dazu identische Ebene durch zu diesem Punkt identische Punkte gehen und gleiche Indizes besitzen. Aus den beiden Bedingungen

$$H(M + r) + K(N + s) + L(P + t) = D'$$
$$HM + KN + LP = D$$

erhält man durch Subtraktion

$$D' - D = Hr + Ks + Lt \qquad 12)$$

r, s, t können beliebige positive oder negative ganze Zahlen einschließlich Null sein. Einer davon läßt sich immer als Null wählen. Von den drei Indizes besitzen nach unserer Festsetzung immer mindestens zwei keinen gemeinsamen Teiler, sind es beispielsweise H und K, so läßt sich die Gleichung 12) umändern zu

$$D' - D = Hr + Ks \qquad 13)$$

Sie läßt sich nun diophantisch auflösen und gibt reelle Werte für irgend eine linksstehende positive oder negative ganze Zahl.

Somit gehören alle parallelen Ebenen (H K L) mit $D' - D =$ irgend eine positive oder negative ganze Zahl, zu ein und derselben Identitätsschar. Ist aber $D' - D$ nicht ganzzahlig, so sind die Ebenen einander nicht identisch.

Wir erhalten den Satz:

Parallele Ebenen besitzen gleiche Indizes, identische parallele Ebenen besitzen außerdem Kennziffern, die sich lediglich durch addierte oder subtrahierte ganze Zahlen voneinander unterscheiden.

Haben wir je ein r_1 und s_1 der Gleichung 13 für ein gegebenes D' bestimmt, so liegen außer dem Punkt $[\![M + r_1, N + s_1, P]\!]$ noch alle jene identischen Punkte $[\![M + r', N + s', P]\!]$ in der Ebene $(H K L)_{D'}$, für die

$$r' = r_1 + Kq$$
$$s' = s_1 - Hq$$

erfüllt ist, wo q eine beliebige ganze Zahl darstellt.

Die Identitätsschar einer Ebene bezeichnen wir, wie die Ebene selbst, mit $(H K L)_D$, wählen aber zur Charakterisierung den kleinsten positiven D-Wert der Parallelschar. Diese Kennziffer ist daher stets ein positiver echter Bruch (einschließlich Null).

Eine Ebene (H K O) geht der Z-Achse, eine Ebene (O K L) der X-Achse parallel. Die drei Koordinatenebenen sind zu bezeichnen als $(100)_0$, $(010)_0$, $(001)_0$, ...

Weglassen der Kennziffer bedeutet (wie übrigens auch bei den Geraden) lediglich eine Richtungs- oder Stellungsangabe ohne nähere Spezialisierung der Identitätsschar.

Die Identitätsschar $(111)_0$ enthält die Ebene $(111)_{\frac{3}{4}}$ nicht. Zu der ersteren gehören beispielsweise $(111)_{\bar{1}}$, $(111)_1$, $(111)_2$ . . . . $(111)_n$, wo n eine ganze Zahl ist. Zu der Identitätsschar $(111)_{\frac{3}{4}}$ gehören Ebenen wie $(111)_{\frac{\bar{1}}{4}}$, $(111)_{\frac{7}{4}}$, $(111)_{\frac{11}{4}}$ usw.

Wie bei den Kennziffern werden auch bei den Indizes negative Werte durch darüber geschriebene Minuszeichen dargestellt.

Die Ebene $(\bar{3}\ 2\ 1)_{\frac{1}{5}}$ besitzt beispielsweise die Achsenabschnitte

$$X = -\frac{1}{15}e;\quad Y = +\frac{1}{10}f;\quad Z = +\frac{1}{5}g.$$

Es seien nun zunächst einige Aufgaben besprochen, die für strukturelle Probleme von besonderer Bedeutung sind.

A. Gegeben ein Punkt $[\![X_1, Y_1, Z_1]\!]$ sowie eine Gerade $[U, V, W]^{B_1 C_1}$. Gehört die dem gegebenen Punkt identische Punktschar der identischen Geradenschar an, von der $[U, V, W]^{B_1 C_1}$ irgend ein Repräsentant ist? U, V, W sollen der Einfachheit halber auch zu zweit keinen gemeinsamen ganzzahligen Teiler besitzen.

Es müssen die Gleichungen:

$$Y_1 = X_1 \frac{V}{U} + B_1 + \frac{r}{U}$$

$$Z_1 = X_1 \frac{W}{U} + C_1 + \frac{t}{U}$$

erfüllt sein, wo r und t ganzzahlig sind.

I. $UY_1 - VX_1 - UB_1 =$ ganzzahlig (einschließlich Null)

II. $UZ_1 - WX_1 - UC_1 =$ ganzzahlig (einschließlich Null).

Außerdem muß nach Gleichung 9)

$$I \cdot W - II \cdot V = qU$$

sein, worin q eine beliebige ganze Zahl ist, das heißt

$\frac{I \cdot W - II \cdot V}{U}$ = ebenfalls gleich ganzzahlig (einschließlich Null) ist.

Beispiel: 1) Punkt $= \left[\!\left[0, \frac{5}{7}, \frac{3}{7}\right]\!\right]$; Gerade $= [7\ 3\ 1]^{00}$

$$I = -\frac{5}{7} \cdot 7 - 0 - 0 = -5$$

$$II = +\frac{3}{7} \cdot 7 - 0 - 0 = +3$$

$$\frac{-5 \cdot 1 - 3 \cdot 3}{7} = -\frac{14}{7} = -2 = \text{ganzzahlig.}$$

Der Punkt gehört einer Geraden der Identitätsschar $[7\ 3\ 1]^{00}$ an.

2) Punkt $\left[0, \frac{5}{7}, \frac{3}{7}\right]$; Gerade $[7\ 3\ 1]^{\frac{1}{7}\frac{1}{7}}$

$$I = -5 - 0 - 1 = -6$$

$$II = +3 - 0 - 1 = +2$$

$$\frac{-6 - 6}{7} = \frac{12}{7} = \text{keine ganze Zahl.}$$

Kein $\left[\!\left[0, \frac{5}{7}, \frac{3}{7}\right]\!\right]$ identischer Punkt liegt auf einer Geraden der Identitätsschar $[7\ 3\ 1]^{\frac{1}{7}\frac{1}{7}}$.

B. Eine identische Punktschar $[\![M\,N\,P]\!]$ gehört einer identischen Ebenenschar irgend einer Ebene $(HKL)_D$ an, wenn

$$MH + NK + PL - D = r = \text{ganzzahlig ist.} \qquad 14)$$

C. Eine Gerade $[U\,V\,W]^{B_1\,C_1}$ liegt in einer der Ebenen der Identitätsschar $(HKL)_D$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind. Zunächst muß die Gerade der Ebene parallel sein, das heißt beide durch den Nullpunkt gelegt müssen einander angehören:

$$UH + VK + WL = 0 \qquad 15)$$

Ferner muß der Durchstoßpunkt $B_1\,C_1$ der $Y-ZSpur$ einer zu $(HKL)_D$ identischen Ebene angehören:

$$KB_1 + LC_1 - D = r = \text{ganzzahlig (einschließlich Null)} \qquad 16)$$

D. Eine Gerade [U V W] ist den Schnittkanten zweier Ebenensysteme $(H_1 K_1 L_1)$ und $(H_2 K_2 L_2)$ parallel, wenn die Bedingungen:

$$U H_2 + V K_2 + W L_2 = 0$$
$$U H_1 + V K_1 + W L_1 = 0 \text{ gleichzeitig erfüllt sind.}$$

Das ergibt die notwendigen und hinreichenden Bedingungen:

$$U : V : W = (K_2 L_1 - K_1 L_2) : (L_2 H_1 - L_1 H_2) : (H_2 K_1 - H_1 K_2) \quad 17)$$

Handelt es sich nicht nur um parallele Lage, sondern sucht man zu zwei bestimmten Ebenen die reelle Schnittkante, so müssen noch die zwei entsprechenden Gleichungen (16) erfüllt sein. (r = Null.)

E. Zwei Gerade $[U_1 V_1 W_1]$ und $[U_2 V_2 W_2]$ sollen parallel einer Ebene (H K L) sein. Dann müssen folgende zwei Bedingungsgleichungen befriedigt werden:

$$U_1 H + V_1 K + W_1 L = 0$$
$$U_2 H + V_2 K + W_2 L = 0$$

Durch Multiplizieren einmal mit U_1 bezw. U_2 und einmal mit V_1 bezw. V_2 erhält man die notwendige und hinreichende Bedingung

$$H : K : L = (V_1 W_2 - V_2 W_1) : (W_1 U_2 - W_2 U_1) : (U_1 V_2 - U_2 V_1) \quad 18)$$

Sie ist analog der Bedingung 17). Sie muß als eine Spezialbedingung auch dann erfüllt sein, wenn die Geraden sich schneiden und H K L die Indizes der dadurch bestimmten Ebene sein sollen.

Die Aufgaben ließen sich beliebig vermehren. Die Lösungen sind rein analytisch-geometrischer Natur und in Spezialfällen daher stets leicht auffindbar. In Kapitel IV werden noch einige besonders wichtige Berechnungsmethoden erläutert werden. Vorläufig genügen die gemachten Angaben zur Darstellung der Symmetrieverhältnisse eines homogenen Diskontinuums.

Wir können jetzt Punkte, Geraden und Ebenen eindeutig ihrer Lage nach bezeichnen. Wir wissen, daß zu jedem Punkt, jeder Geraden und jeder Ebene eines homogenen Diskontinuums unendlich viele identische Punkte bezw. Gerade bezw. Ebenen gehören, und daß durch die Lage des einen dieser Elemente jeweilen die ganze Identitätsschar bestimmt ist, sofern drei kürzeste nicht komplanare Identitätsabstände bekannt sind.

II. Kapitel: Die Symmetrieeigenschaften homogener Diskontinua

I. Identität und primitive Translationen

Die Symmetrieeigenschaften irgend eines Gebildes werden nach Art und Zahl der Operationen beurteilt, die das Gebilde in sich selbst überführen. Punkte, Gerade und Ebenen werden durch derartige Operationen in andere Punkte, Geraden und Ebenen übergeführt, denen nun die genau gleiche Stellung zukommt, so daß Ausgangsgebilde und Operationsprodukt in jeder Hinsicht zur Deckung gebracht werden können. Derartige Operationen heißen Deckoperationen und die dadurch einander zugeordneten Punkte, Geraden und Ebenen werden gleichwertig genannt.

Zunächst ist aus den vorausgegangenen Erläuterungen ersichtlich, daß in jedem homogenen Diskontinuum alle identischen Punkte einander gleichwertig sind. Die Operationen, die in diesem Falle das homogene Diskontinuum in sich selbst überführen, sind Parallelverschiebungen oder Translationen, sie entsprechen parallelen Koordinatenachsentransformationen, die alle Beziehungen unverändert lassen.

Jede Parallelverschiebung oder Translation, die einen Punkt des homogenen Diskontinuums in einen anderen Punkt seiner Identitätsschar überführt, bringt das gesamte Diskontinuum mit sich selbst zur Deckung. Machen wir irgend einen Punkt des homogenen Diskontinuums zum Koordinatenanfangspunkt eines Koordinatensystems mit e, f, g (den drei kürzesten nichtkomplanaren Identitätsabständen) als Achsenrichtungen, so müssen die Translationen, welche den Anfangspunkt in irgendeinen identischen Punkt überführen, der Bedingung gehorchen:

$$\tau = r \cdot e + s \cdot f + t \cdot g \qquad 19a)$$

wo r, s, t beliebige positive oder negative ganze Zahlen sind und unter der Summe dreier richtungsverschiedener, von einem Punkt ausgehender, Strecken in Größe und Richtung die Diagonale des dadurch bestimmten Parallelepipeds verstanden wird.

r, s, t sind nichts anderes als die Koordinaten $X_1\ Y_1\ Z_1$ (bezogen auf e, f, g als Einheitsmaßstäbe) des Endpunktes der Translation.

Besitzen r, s, t keinen gemeinsamen ganzzahligen Teiler, so stellen sie zugleich als $[U, V, W]^{00}$ ($r = U$, $s = V$, $t = W$) das Symbol der Translationsgeraden dar. Auf der Translationsgeraden liegt dann zwischen Anfangspunkt und Endpunkt kein damit identischer Punkt, die Translation heißt primitiv. (Es gibt keinen Punkt mit kleineren ganzzahligen Koordinaten, der auf der Geraden liegt.) Die Translationsstrecke heißt in diesem Falle primitive Strecke der zugehörigen Geraden oder Periode bezw. kürzester Identitätsabstand auf [U V W]. Besitzen r, s, t einen größten gemeinsamen ganzzahligen Teiler d, so sind die Indizes der Translationsgeraden gegeben durch $U = \frac{r}{d}$; $V = \frac{s}{d}$; $W = \frac{t}{d}$. Die Translationsstrecke ist jetzt das d-fache der primitiven Strecke oder der Periode in ihrer Richtung, und der Endpunkt der Translation ist nicht der nächste, sondern der d^{te} identische Punkt auf der Geraden.

Da die Identitätsabstände einzig von der Richtung abhängig sind, besitzen naturgemäß alle zu [U, V, W] parallelen Geraden die gleichen primitiven Strecken oder Perioden. Die Größe dieser Strecke ist dem Abstande des Punktes mit den Koordinaten U, V, W vom Nullpunkte gleich. Sie heißt auch etwa Parameter der Geraden.

Die absolute Größe ergibt sich zu:

$$\tau^2 = e^2U^2 + f^2V^2 + g^2W^2 + 2fgVW\cos\xi + 2geWU\cos\eta + 2efUV\cos\zeta \qquad 19b)$$

Die Winkel ξ, η, ζ sind die Winkel zwischen den Koordinatenachsen im ersten positiven Parallelepiped.

$$\xi = \measuredangle f{-}g \qquad \eta = \measuredangle g{-}e \qquad \zeta = \measuredangle e{-}f$$

Die Gleichung (19) stellt somit die Beziehung zwischen Symbol der Geraden und Identitätsabstand oder Periode auf ihr her.

Irgend zwei von einem Punkte, beispielsweise dem Nullpunkte, ausgehende Geraden bestimmen eine Ebene (bezw. eine identische Schar von Ebenen) deren Indizes nach den früheren Erörterungen (Seite 17) gegeben sind durch

$$H : K : L = (V_1W_2 - V_2W_1) : (W_1U_2 - W_2U_1) : (U_1V_2 - U_2V_1)$$

Mittels der primitiven Strecken der zwei Identitätsscharen der Geraden läßt sich die Ebene in Parallelogramme einteilen mit diesen Strecken als Seiten. Wir sagen nun, die beiden primitiven Translationen bilden ein primitives Translationenpaar, wenn der Flächeninhalt des von ihnen gebildeten Parallelogrammes genau dem Flächeninhalt der Nichtidentität auf dieser Ebene entspricht. Dann liegt im Innern des Parallelogrammes kein mit den Eckpunkten identischer Punkt und jede Punktart der Ebene ist einmal und nur einmal im Parallelogramm enthalten. Die Schnittpunkte der Translationsparallelen auf der Ebene liefern ein vollständiges System identischer

Punkte der Ebene. Daß es in jeder Ebene unendlich viele primitive Paare primitiver Translationen gibt, ist sofort ersichtlich, wenn wir eine Ebene für sich betrachten.

Zu dem Zwecke sei zunächst eine Koordinatenebene, beispielsweise die XY-Ebene, in Untersuchung gezogen. e und f sind die kürzesten Identitätsabstände auf ihr und bilden als solche ein primitives Paar. Die Schnittpunkte ihrer Parallelen liefern ein vollständiges zweidimensionales System identischer Punkte. Ganz gleich verhalten sich aber beispielsweise $A_0 - A_9$ und $A_0 - A_{13}$ (Parallelogramme wie $A_0 A_9 A_{22} A_{13}$) oder $A_0 - A_5$ und $A_0 - A_4$ (Parallelogramme wie $A_0 A_5 A_9 A_4$ beziehungsweise $A_1 A_5 A_{10} A_6$) oder $A_0 - A_6$ mit $A_0 - A_5$ usw. (Siehe Fig. 5.)

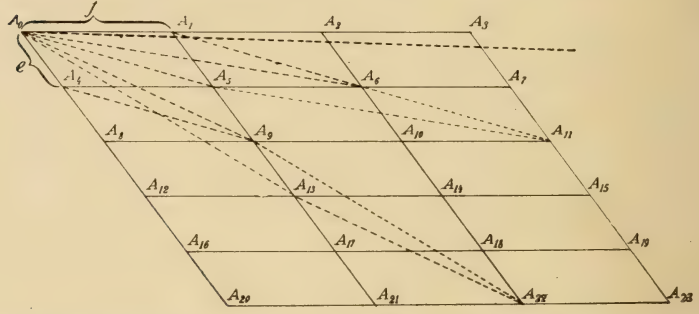


Fig. 5. Zweidimensionales homogenes Diskontinuum zur Erläuterung des Begriffes der primitiven Parallelogramme, beziehungsweise primitiven Paare von Translationen.

Jede Gerade auf der XY-Ebene hat hinsichtlich des Raumes Indizes von der Form [U V 0], das heißt W = 0. Folgendermaßen findet man die Bedingungen, denen die Indizes $U_1 V_1$ und $U_2 V_2$ genügen müssen, damit die kürzesten Identitätsabstände beider dadurch bestimmten (durch einen Punkt gehenden) Geraden ein primitives Paar bilden. Bezeichnen wir wie vorhin den $\sphericalangle$ e — f mit ζ. Aus der analytischen Geometrie ist bekannt, daß der Inhalt eines Parallelogrammes mit dem Nullpunkt und den Punkten $[\![U_1 V_1]\!]$, $[\![U_2 V_2]\!]$ als Ecken, abgesehen vom Vorzeichen, gegeben ist durch:

$$J = \begin{vmatrix} U_1 V_1 \\ U_2 V_2 \end{vmatrix} \sin \zeta \cdot e \cdot f. \qquad 20)$$

Mit e · f muß multipliziert werden, weil wir die Koordinaten der Punkte ja auf e und f als Einheitsmaßstäbe beziehen. $\begin{vmatrix} U_1 V_1 \\ U_2 V_2 \end{vmatrix}$ bedeutet die Determinante; in diesem speziellen Fall also $U_1 V_2 - U_2 V_1$. Der Inhalt des von den kürzesten, auf den Koordinatenachsen liegenden,

Identitätsabständen e und f bestimmten Parallelogrammes ist somit

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \sin \zeta \cdot e \cdot f = 1 \sin \zeta \cdot e \cdot f.$$

Dies ist definitionsgemäß der Inhalt der Fläche der Nichtidentität auf der Ebene. Diesem Inhalte muß der Inhalt eines von einem primitiven Translationenpaar gebildeten Parallelogrammes gleich sein. Das hat die einzige Bedingung

$$\begin{vmatrix} U_1 V_1 \\ U_2 V_2 \end{vmatrix} = \pm 1 \text{ beziehungsweise } U_1 V_2 - U_2 V_1 = \pm 1 \qquad 21)$$

zur Folge[1]). Ist $U_1 V_1$ gegeben, so findet man alle damit ein primitives Paar bildenden $U_2 V_2$ durch Auflösung der diophantischen Gleichung (21). Alle Endpunkte der primitiven zweiten Strecke, also die Punkte mit den Koordinaten $X = U_2$, $Y = V_2$, liegen auf einer dem gegebenen $U_1 V_1$ nächstgelegenen identischen Parallelen, und zwar je nachdem ob der Wert $+$ oder -1 ist, auf der einen oder anderen Seite der ersten Geraden. (Siehe z. B. die Anmerkung, erstes und letztes Exempel.)

Die allgemeinen Bedingungen, daß zwei Translationen auf einer beliebigen (nicht Koordinaten-) Ebene ein primitives Paar bilden, wollen wir, einem Gedankengang von Bravais folgend, sofort auf einem anderen Wege ableiten.

Drei nicht komplanare primitive Translationen, die von einem Punkte ausgehen, bilden ein primitives Translationentripel, wenn der Inhalt des von ihnen gebildeten Parallelepipeds dem Rauminhalte der Nichtidentität entspricht. Dann liegen im Innern des Parallelepipeds keine den Eckpunkten identischen Punkte, überhaupt keine zwei identischen Punkte. Die Schnittpunkte der identischen Scharen der drei Translationsgeraden liefern ein vollständiges System identischer Punkte. Aus der analytischen Geometrie des Raumes ist bekannt, daß der Inhalt eines Parallelepipeds mit einem Eckpunkt im Nullpunkt und drei nächsten Eckpunkten in $[\![U_1 V_1 W_1]\!]$ $[\![U_2 V_2 W_2]\!]$ $[\![U_3 V_3 W_3]\!]$, abgesehen vom Vorzeichen, den Wert hat

$$J = \begin{vmatrix} U_1 V_1 W_1 \\ U_2 V_2 W_2 \\ U_3 V_3 W_3 \end{vmatrix} \sin \zeta \cdot \sin \eta \cdot \sin E \cdot e \cdot f \cdot g \qquad 22)$$

ζ und η sind wie auf Seite 19 Koordinatenachsenwinkel; E ist der Winkel zwischen den Ebenen (010)/(001); der erste Ausdruck bedeutet eine Determinante.

---

[1]) So erhält man beispielsweise (Fig. 5):

für A_0A_9 und A_0A_{13}: $U_1V_2 - U_2V_1 = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = -1$
für A_0A_5 und A_0A_4: $U_1V_2 - U_2V_1 = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$
für A_0A_6 und A_0A_5: $U_1V_2 - U_2V_1 = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = -1$
für A_0A_9 und A_0A_5: $U_1V_2 - U_2V_1 = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = +1$ usw.

Nun ist ein Parallelepiped der Nichtidentität, wie wir Seite 4 sahen, durch das Parallelepiped mit e, f, g als Kanten gegeben.

$$J = \begin{vmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{vmatrix} \sin\zeta \sin\eta \sin E \cdot e \cdot f \cdot g = 1 \cdot \sin\zeta \cdot \sin\eta \cdot \sin E \cdot e \cdot f \cdot g.$$

Daher müssen die Indizes der ein primitives Tripel bildenden Translationsgeraden der Bedingung genügen:

$$\begin{vmatrix} U_1 V_1 W_1 \\ U_2 V_2 W_2 \\ U_3 V_3 W_3 \end{vmatrix} = +1 \qquad 23)$$

Diese Bedingung ist hinreichend. Aus ihr geht hervor, daß es unendlich viele primitive Translationentripel eines homogenen Diskontinuums gibt. Wir können irgend eines zu Koordinatenachsen und zu Einheitsmaßstäben machen und alle Beziehungen, die im ersten Kapitel abgeleitet wurden, bleiben bestehen. Je zwei der drei Translationsgeraden liegen in einer Ebene und sind für diese Ebene ein primitives Paar. Alle Translationen, die dieses Paar zu einem primitiven Tripel ergänzen, müssen ihre Endpunkte in einer dieser Ebene nächstgelegenen parallelen identischen Ebene haben, denn sonst würden den Eckpunkten identische Punkte im Innern des Parallelepipeds liegen. Bezeichnen wir, auf das Koordinatensystem e, f, g bezogen, die Ebene der ersten zwei gegebenen Geraden mit $(HKL)_0$, so muß:

$U_3H + V_3K + W_3L = \pm 1$ sein (nach dem Satz auf Seite 15 kann die nächste identische Ebene nur $(HKL)_{\pm 1}$ sein).

Anderseits läßt sich die oben (23) stehende Determinante auch in der Form schreiben:

$$U_3(V_1W_2 - V_2W_1) + V_3(W_1U_2 - U_1W_1) + W(U_1V_2 - U_2V_1) = \pm 1$$

woraus folgt, daß

$$\begin{vmatrix} V_1 W_1 \\ V_2 W_2 \end{vmatrix} = H; \quad \begin{vmatrix} W_1 U_1 \\ W_2 U_2 \end{vmatrix} = K; \quad \begin{vmatrix} U_1 V_1 \\ U_2 V_2 \end{vmatrix} = L \qquad 24)$$

sein müssen.

Hierbei dürfen H K L, also auch die entsprechenden Determinanten, keine gemeinsamen ganzzahligen Teiler besitzen. Gleichung (24) ist nun die Bedingung dafür, daß zwei Gerade in einer Ebene (H K L) ein primitives Paar von Translationen bilden. Ist die Determinante dreier primitiver Translationen:

$$\begin{vmatrix} U_1 V_1 W_1 \\ U_2 V_2 W_2 \\ U_3 V_3 W_3 \end{vmatrix} = \pm T,$$

so ist der Inhalt des Parallelepipeds mit den Punkten $[\![000]\!]$, $[\![U_1 V_1 W_1]\!]$, $[\![U_2 V_2 W_2]\!]$, $[\![U_3 V_3 W_3]\!]$ als nächstgelegenen Ecken offenbar Tmal größer als der Inhalt des Raumes der Nichtidentität. Es gehören dann dem Parallelepiped von jeder identischen Punktschar T identische Punkte an. Man sagt, das Parallelepiped absorbiere T identische Punkte,

oder die Zähligkeit der Identität sei hinsichtlich des Parallelepipeds $= T$. Ein dem Raume der Nichtidentität entsprechendes Parallelepiped heißt primitives Parallelepiped; ist $T = 2$, so wollen wir das Parallelepiped doppeltprimitiv nennen. Vierfachprimitiv ist ein aus Translationen gebildetes Parallelepiped mit $T = 4$, das heißt mit einer Absorption von je 4 Punkten einer Identitätsschar.

Haben die Determinanten (24) eines Paares primitiver Translationen einen größten gemeinsamen Teiler t, so absorbiert das betreffende Parallelogramm von jeder Schar identischer Punkte der Ebene deren t. Es ist t-fach primitiv.

In einfacher Weise lassen sich die hier obwaltenden Verhältnisse darstellen, indem man die Bedingungen der Koordinatentransformationen hinschreibt, die zu Deckoperationen führen. Die Angabe dreier, einem primitiven Tripel von Translationen entsprechenden, Transformationsbedingungen genügt, da sich daraus nach Gleichung 19a auf Seite 18 alle anderen möglichen Translationen als das Resultat einer Reihe nacheinander ausgeführter derartiger Verschiebungen ableiten lassen.

Es seien ganz allgemein x, y, z die mit einem Maßstab (Centimetermaßstab) gemessenen Koordinaten eines Punktes, bezogen auf das alte Koordinatensystem, x′, y′, z′ die Koordinaten des gleichen Punktes, bezogen auf das neue Koordinatensystem, ξ, η, ζ die Winkel der alten Koordinatenachsen, a_0, b_0, c_0 die Koordinaten des neuen Koordinaten-Anfangspunktes, bezogen auf das alte System. Dann lauten die Gleichungen der Transformation:

$$\left.\begin{aligned} x &= a_0 + \frac{(1-\cos^2\xi)\Phi_1 - (\cos\zeta - \cos\xi\cos\eta)\Phi_2 - (\cos\eta - \cos\xi\cos\zeta)\Phi_3}{1 + 2\cos\xi\cos\eta\cos\zeta - \cos^2\xi - \cos^2\eta - \cos^2\zeta} \\ y &= b_0 + \frac{(1-\cos^2\eta)\Phi_2 - (\cos\xi - \cos\eta\cos\zeta)\Phi_3 - (\cos\zeta - \cos\xi\cos\eta)\Phi_1}{1 + 2\cos\xi\cos\eta\cos\zeta - \cos^2\xi - \cos^2\eta - \cos^2\zeta} \\ z &= c_0 + \frac{(1-\cos^2\zeta)\Phi_3 - (\cos\eta - \cos\zeta\cos\xi)\Phi_1 - (\cos\xi - \cos\eta\cos\zeta)\Phi_2}{1 + 2\cos\xi\cos\eta\cos\zeta - \cos^2\xi - \cos^2\eta - \cos^2\zeta} \end{aligned}\right\} 25)$$

wo

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= x' \cos(x'x) + y' \cos(y'x) + z' \cos(z'x) \\ \Phi_2 &= x' \cos(x'y) + y' \cos(y'y) + z' \cos(z'y) \\ \Phi_3 &= x' \cos(x'z) + y' \cos(y'z) + z' \cos(z'z) \end{aligned}$$

Für ein gegebenes Diskontinuum, mit einem gegebenen primitiven Tripel, sind von der speziellen Art der Transformation einzig die zwölf Größen a_0, b_0, c_0; $\cos(x'x)$, $\cos(y'x)$, $\cos(z'x)$; $\cos(x'y)$, $\cos(y'y)$, $\cos(z'y)$; $\cos(x'z)$, $\cos(y'z)$, $\cos(z'z)$ abhängig. (3 Verschiebungsgrößen, 9 Richtungskosinus.)

Wir schreiben sie in Zukunft immer in dieser Reihenfolge und bezeichnen das System der zwölf Größen kurz als Decktransformationsbedingung, wenn es sich um eine Koordinaten-

transformation handelt, die das gesamte Diskontinuum mit sich selbst zur Deckung bringt. Von allen möglichen Transformationen sind dann die, deren zwölf Werte wir mitteilen (sowie alle daraus ableitbaren) dadurch ausgezeichnet, daß sie zugleich Deckbewegungen entsprechen. Die Kenntnis dieser Bedingungen ist für die Kristallphysik von ganz außerordentlicher Bedeutung, da irgend ein physikalisches Gesetz auf alle gleichwertigen Koordinatensysteme transformiert ein und dieselbe Form annehmen muß. Mit ihrer Hilfe läßt sich in jedem einzelnen Falle die Spezialisierung von Gesetzen auf die Symmetrieklassen und einzelnen Raumsysteme durchführen.

Die Translationen sind Parallelverschiebungen, die den Winkel der Koordinatenachsen unverändert lassen. Sind e, f, g drei beliebige, ein primitives Tripel bildende, Translationen, so lauten die drei Decktransformationen, die alle anderen bestimmen:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{I.} & e, 0, 0; & 1, \cos\zeta, \cos\eta; & \cos\zeta, 1, \cos\xi; \quad \cos\eta, \cos\xi, 1 \\ \text{II.} & 0, f, 0; & 1, \cos\zeta, \cos\eta; & \cos\zeta, 1, \cos\xi; \quad \cos\eta, \cos\xi, 1 \\ \text{III.} & 0, 0, g; & 1, \cos\zeta, \cos\eta; & \cos\zeta, 1, \cos\xi; \quad \cos\eta, \cos\xi, 1 \end{array}\right\} \quad 26)$$

sofern e, f, g zugleich der Richtung nach Koordinatenachsen sind. Werden Translationsrichtungen, deren primitive Strecken kein primitives Tripel bilden, zu Koordinatenachsenrichtungen gewählt, so müssen die Einzelperioden irgend eines primitiven Tripels in ihnen ausgedrückt werden. Es ändern sich dann die drei ersten Größen der Bedingungen von Gleichung 26).

Die Decktransformationsbedingungen beziehen wir, im Gegensatz zu den übrigen Darlegungen, auf das System eines einzigen Einheitsmaßstabes; infolgedessen treten die Strecken der Verschiebungen in ihrer absoluten Größe auf. Es wird dies bei Anwendungen von Vorteil sein, ohne daß dadurch Mißverständnisse entstehen können, da ja naturgemäß auch bei einer anderen Wahl die Richtungskosinus gleich bleiben. Hingegen ist bei der Transformation bestimmter Punkte, Geraden oder Ebenen, die durch ihre ungleichwertigen Koordinaten oder Indizes gegeben sind, darauf Rücksicht zu nehmen.

Alle bis jetzt abgeleiteten Eigenschaften kommen jedem reell homogenen Diskontinuum zu. Sie sind ja nur der Ausdruck dafür, daß die Identität in bestimmten einzig von der Richtung abhängigen Abständen auftreten muß. Die Abhängigkeit selbst ist durch Gleichung 19b) gegeben. Diese Gleichung und die Betrachtung irgend einer diesbezüglichen Figur zeigen, daß die Identitätsabstände nicht kontinuierliche sondern diskontinuierliche Funktionen der Richtung sind. Zu dem Zwecke möge die einfache Figur 5 (Seite 20) eines zweidimensionalen Diskontinuums erörtert werden. In der Richtung $A_0 - A_1 - A_2 - A_3$ besitzt definitionsgemäß der Identitätsabstand einen kleinsten Wert f. Es ist das, auf e und f als Koordinatenachsen

bezogen, die Gerade [0 1 0]. Betrachten wir eine ganz wenig davon abweichende Richtung, so findet sich auf ihr erst in außerordentlich großer Entfernung wieder ein dem Anfangspunkt A_0 identischer Punkt. Der Identitätsabstand in dieser Richtung ist sehr groß, unter den Indizes der Geraden kommen (in der Erweiterung auf ganze Zahlen) sehr hohe Werte vor. Die Geraden mit relativ einfachen Indizes, und infolgedessen nach (19) mit kleinen Perioden, folgen sprungweise aufeinander. Alle Eigenschaften, die direkt von der Größe der Identitätsabstände abhängig sind, müssen daher ein diskontinuierliches Verhalten aufweisen.

2. Eigentliche Symmetrieelemente und ihre gegenseitigen Beziehungen

Außer den Identitätsbeziehungen kann ein homogenes Diskontinuum noch eigentliche Symmetrieelemente besitzen, die ermöglichen, daß nach Ausführung bestimmter Operationen das Diskontinuum ebenfalls in sich selbst übergeführt wird. Derartige mögliche Symmetrieelemente sind: Symmetrieachse, Symmetrieebene, Achse zusammengesetzter Symmetrie, Ebene zusammengesetzter Symmetrie, (Inversions- oder Symmetriezentrum). Die möglichen Kombinationen dieser Symmetrieelemente für homogene Diskontinua aufzusuchen ist das nächstliegende, erste Ziel einer theoretischen Grundlage der Kristallstrukturlehre. Den Operationen entsprechen, alle Beziehungen unverändert lassende, Koordinatenachsentransformationen mit nicht gleichbleibender Achsenrichtung.

Die Symmetrieachsen

Charakteristisch für eine n-zählige Symmetriachse ist, daß nach jeder Drehung von $\frac{360^0}{n}$ um die Achse irgend einem Punkt oder beliebigen Element im gleichen Abstand und in nun paralleler Lage ein gleichwertiger Punkt oder ein Element zugeordnet werden können und daß, wenn die Operation, die den Punkt in den nächsten gleichwertigen direkt überführt, n-mal nacheinander in gleichem Sinne ausgeführt wird, sich die Identität wieder einstellt. Nun kann die Identität sich einstellen, indem nach n-maligem Ausführen der Operation die Ausgangspunkte tatsächlich in sich selbst zurückfallen oder aber indem sie nunmehr die Lage damit identischer Punkte einnehmen. Im ersteren Falle ist die kleinste Deckoperation eine einfache Drehung um die Achse (n-zählige Drehungsachse), im zweiten Falle ist mit der Drehung eine Translation in der Achsenrichtung verknüpft, und zwar muß sicherlich das n-fache derjenigen Translation, die zur Drehung um $\frac{360^0}{n}$ gehört

(Schraubungskomponente), ein Ein- oder Vielfaches des Identitätsabstandes auf der Achse sein[1]) (n-zählige Schraubenachse).

Entspricht es einem Vielfachen des Identitätsabstandes in der Achsenrichtung, das zugleich mit n einen gemeinsamen ganzzahligen Teiler r besitzt, so haben die Identitätsbeziehungen zur Folge, daß außer den durch die Schraubenbewegung auseinander hervorgegangenen zusammengehörigen Punkte sich noch andere einstellen, die bewirken, daß die n-zählige Schraubenachse gleichzeitig eine r-zählige Drehungsachse wird. Da wir die Drehungsachse als eine Schraubenachse auffassen können, deren Schraubenkomponente (Translation, die zum kleinsten Drehungswinkel gehört) Null ist, so ergeben sich, unter Berücksichtigung des soeben ausgesprochenen Satzes, nur die folgenden Fälle verschiedenartiger gleichzähliger Achsen:

Schraubungskomponente: 0 oder $\frac{\tau}{n}$ oder $\frac{2\tau}{n}$ oder $\frac{3\tau}{n}$ . . . . . $\frac{(n-1)\tau}{n}$,

wo τ der Identitätsabstand oder die Periode in Richtung der Achse ist, n die Zähligkeit der Achse. Die Schraubenachsen mit $\frac{\tau}{n}$ und $\frac{(n-1)\tau}{n}$ als Schraubungskomponenten verhalten sich zueinander wie linke und rechte Schraube.

Es seien nun an der Hand der Figuren 6—9 die Verhältnisse der (wie wir später sehen werden einzig in Frage kommenden) 2-, 3-, 4-, 6-zähligen Achsen eingehend erörtert. Da der Begriff der Zähligkeit auch in einem anderen Sinne eine große Rolle spielt, werden hier zur Vermeidung von Mißverständnissen zweizählige Achsen digonale, dreizählige trigonale, vierzählige tetragonale und sechszählige hexagonale Achsen[2]) genannt. Die Achsen kennzeichnen wir in den Figuren, indem ein in der Nähe gelegener Punkt allen Achsenoperationen unterworfen, das heißt in allen seinen gleichwertigen Lagen eingezeichnet, wird.

Digonale Achsen (Fig. 6) gibt es zweierlei, eine Drehungsachse und eine Schraubenachse. Die Drehungsachse (Fig. 6a) führt den Punkt 1 in den auf gleicher Achsenhöhe befindlichen Punkt 2 über. (Drehungswinkel $= 180^0 = \pi$). Im Identitätsabstande τ müssen beide Punkte sich in gleicher Lage wiederholen. Die Schraubenachse mit der Schraubungskomponente $\frac{\tau}{2}$ ist in Fig. 6b dargestellt. Der Punkt 1 befindet sich nun nach 180^0 Drehung um $\frac{\tau}{2}$ verschoben. Die Operation zweimal aus-

[1]) Damit nach n-maligem Ausführen der Operation sich wieder die Identität einstellen kann.

[2]) F. Rinne nennt treffend die Drehungachsen Gyren (Di-, Tri-, Tetra-, Hexagyren), die Drehspiegelachsen Gyroiden und die Schraubenachsen Helicogyren.

geführt bringt den Punkt 1 mit dem nächstliegenden identischen Punkt 1 zur Deckung. Ein Windungssinn ist hier nicht erkennbar, beziehungsweise Rechts- und Linkswindung sind gleichzeitig vorhanden. Eine digonale Schraubenachse mit der Schraubungskomponente τ ist einer digonalen Drehungsachse äquivalent, da die Identitätsbeziehungen jedem 1 ein 2 in gegenüberliegender Lage zuordnen und umgekehrt.

Eine digonale Schraubenachse mit $\frac{3\tau}{2}$ würde sich von einer Schraubenachse mit $\frac{\tau}{2}$ als Schraubungskomponente nicht unterscheiden, da die Identitätsbeziehungen den Punkt 2 in $\frac{3\tau}{2}$ Entfernung von 1 in die Entfernung $\frac{\tau}{2}$ bringen usw. Es gibt also in der Tat nur zweierlei digonale Achsen. Eine digonale Achse kurzweg bezeichnen wir mit ⬭, die Drehungsachse mit ⬭, die Schraubenachse mit ⬭.

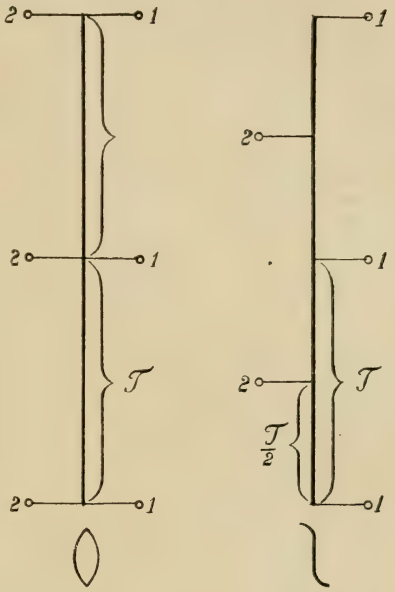


Fig. 6a. Fig. 6b.

Digonale Drehungsachsen und Schraubenachsen und ihre Symbole.

Trigonale Achsen gibt es dreierlei (Fig. 7 a, b, c), eine Drehungsachse, eine linksgewundene und eine rechtsgewundene Schraubenachse. (Der kleinste Drehungswinkel ist $120^0 = \frac{2\pi}{3}$.) Die letztere kann als linke Schraubenachse mit einer Schraubungskomponente von $\frac{2\tau}{3}$ angesehen werden. Die durch eine derartige Schraubenoperation auseinander hervorgehenden Punkte besitzen in Figur 7c keine Striche. 1, 2, 3, 1 ... stellen die Schraubenbewegung dar. Da zu jedem Punkt in der Entfernung τ ein identischer Punkt gehört, stellen sich die gestrichenen Lagen 3′, 1′, 2′ ... von selbst ein und verleihen der Achse den Charakter einer rechtsgewundenen Schraube mit $\frac{\tau}{3}$ als Schraubungskomponente. Die Symbole sind leicht verständlich, das allgemeine Zeichen für eine trigonale Achse ist ein gestrichelt gezeichnetes, gleichseitiges Dreieck.

Tetragonale Achsen gibt es vielerlei (Fig. 8 a, b, c, d), außer der Drehungsachse drei Schraubenachsen, von denen die eine zugleich digonale Drehungsachse ist. Ist die Schraubungskomponente $\frac{\tau}{4}$, so wird nach viermaligem Ausführen der Operation der nächstgelegene identische Punkt erreicht. Es handelt sich um eine einfache tetragonale Schraubenachse von beispielsweise linkem Windungssinn[1]) (Fig. 8 b). Hat die

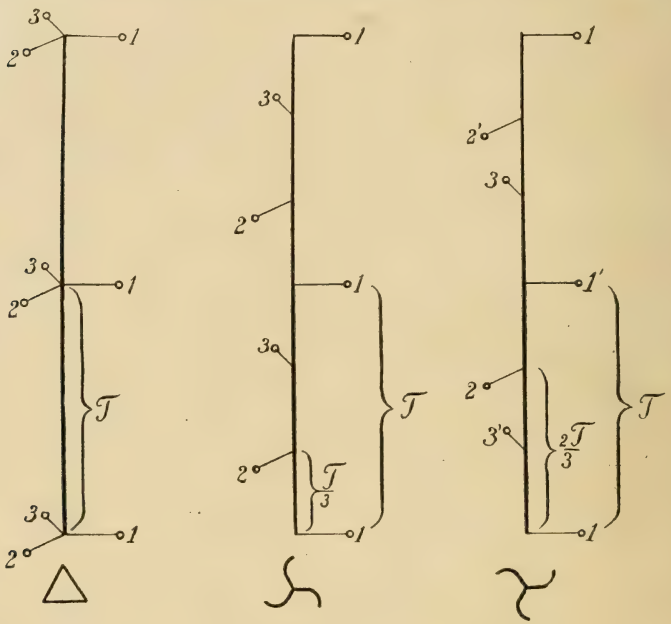


Fig. 7a. Fig. 7b. Fig. 7c.

Trigonale Drehungsachsen und Schraubenachsen und ihre Symbole.

Schraubungskomponente den Wert $\frac{\tau}{2}$, führt also die viermalige Schraubung einen Punkt in den um 2τ davon entfernten identischen Punkt über, so erzeugen die Identitätsbedingungen gleichzeitig eine digonale Drehungsachse (Fig. 8 c). Die ungestrichenen Zahlen 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3 bezeichnen Punkte, die mittels der angegebenen Schraubenoperation auseinander hervorgehen. $1'$, $1''$, $2'$, $3'$, $3''$, $4'$, $4''$, stellen sich infolge der Identitäts-

[1]) Der linke Windungssinn wird hier formell bevorzugt, weil er im Uhrzeigersinne erfolgt.

beziehungen ein und ergänzen die vierzählige (tetragonale) Schraubenachse zu einer digonalen Drehungsachse.

In dem Symbol kommt dieser Doppelcharakter zum Ausdruck.

Eine linke Schraubenachse mit der Schraubungskomponente $\frac{3\tau}{4}$ ist schließlich zugleich eine rechte tetragonale Schraubenachse mit der Schraubungskomponente $\frac{\tau}{4}$. 1, 2, 3, 4, 1 wären die Punkte, die der

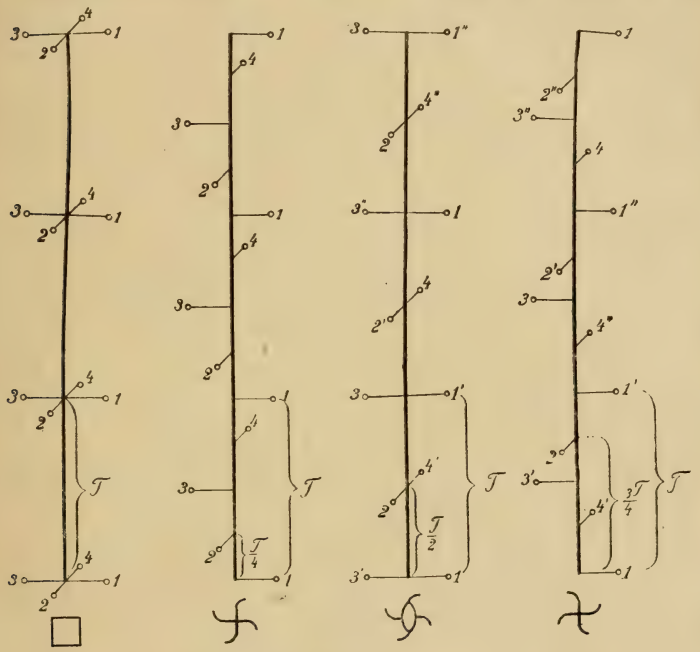


Fig. 8a. Fig. 8b. Fig. 8c. Fig. 8d.

Tetragonale Drehungsachsen und Schraubenachsen und ihre Symbole.

ersten Operation angehören; $1'\,1''$, $2'\,2''$, $3'\,3''$, $4'\,4''$ sind durch die Identitätsbeziehungen bedingt und geben der Achse den Charakter einer einfachen rechten Schraubenachse (Fig. 8d).

Die, für die viererlei tetragonalen Achsen in der Folge stets verwendeten, Symbole brauchen nicht besonders erläutert zu werden.

Es gibt sechserlei verschiedene hexagonale Achsen (Fig. 9a—9f). Die eine ist hexagonale Drehungsachse, fünf sind als hexagonale Achsen nur Schraubenachsen. Diese letzteren können als digonale oder trigonale

Achsen Drehungsachsen sein. Die einfache linke hexagonale Schraubenachse (Fig. 9b) entspricht einer Schraubungskomponente von $\frac{\tau}{6}$. Mit $\frac{2\tau}{6}$ als Schraubungskomponente läßt sich eine hexagonale Schraubenachse ableiten, die gleichzeitig trigonale linke Schraubenachse und digonale Drehungsachse ist. Der Schraubungskomponente $\frac{3\tau}{6}$ gehört eine Achse an, die in hexagonaler und digonaler Hinsicht Schraubenachse ist, aber in der Form einer trigonalen Drehungsachse auftritt. $\frac{4\tau}{6}$ als Schraubungskomponente erzeugt eine ähnliche Achse wie $\frac{2\tau}{6}$, der Windungssinn der trigonalen Schraubenachse ist jedoch ein umgekehrter. Zur einfachen rechten hexagonalen Schraubenachse wird die hexagonale Achse, die bei linkem Windungssinn eine Schraubenkomponente von $\frac{5\tau}{6}$ besitzen würde. Zahlen ohne Striche zeigen Punktlagen an, die infolge der grundlegenden Operationen auseinander hervorgehen. Zahlen mit Strichen sind in dieser Hinsicht Punktlagen, die durch die Identitätsbedingungen erzeugt werden. In den ohne weiteres verständlichen Symbolen kommt der einfache oder komplexe Charakter zum Ausdruck.

Jede n-zählige Achse, gleichgültig ob Drehungsachse oder Schraubenachse, hat zur Folge, daß die im Winkelabstande von $\frac{360^0}{n}$ um die Achse gleichgeneigten Identitätsabstände gleich groß sind. Durch Einführen der Achsen wird also sofort das System der Perioden spezialisiert. Die Form der Translationsgruppe, wie man dieses System der Perioden oder Identitätsabstände nennt, muß somit die Achsensymmetrie zum Ausdrucke bringen. Aus den Identitätsbeziehungen eines homogenen Diskontinuums folgt ferner, daß der Abstand zwischen identischen (gleichzähligen) Achsen nicht unter einen endlichen Wert sinken kann und daß die Identitätsabstände auf parallelen Achsen (Perioden in Richtung der Achsen) einander gleich sein müssen.

Es ist nun zu untersuchen, wie vielzählig eine Achse sein kann, damit sie diesen Bedingungen eines homogenen Diskontinuums genügt. Eine beliebige Gerade sei n-zählige (Drehungs- oder Schrauben-) Achse. Wir konstruieren irgend eine zu ihr senkrecht stehende Ebene und fassen zunächst den Durchstoßpunkt a ins Auge. In einem kürzesten Abstand d_k liege der Durchstoßpunkt einer mit der ersten Achse identischen Achse. Einen derartigen endlichen kürzesten Abstand muß es infolge der Identitätsbedingungen des Diskontinuums stets geben. Dieser Durchstoßpunkt b braucht übrigens mit dem Durchstoßpunkt a selbst nicht identisch zu sein; die, beide Achsen verbindende, primitive Translation liegt dann schief zur Achsenrichtung. Lassen wir

die erste Achse wirken (Drehung oder Schraubung), so ordnen sich in den Winkelabständen $\frac{360^0}{n}$, $\frac{360^0}{2n}$ ..... neue identische Achsen zu, mit

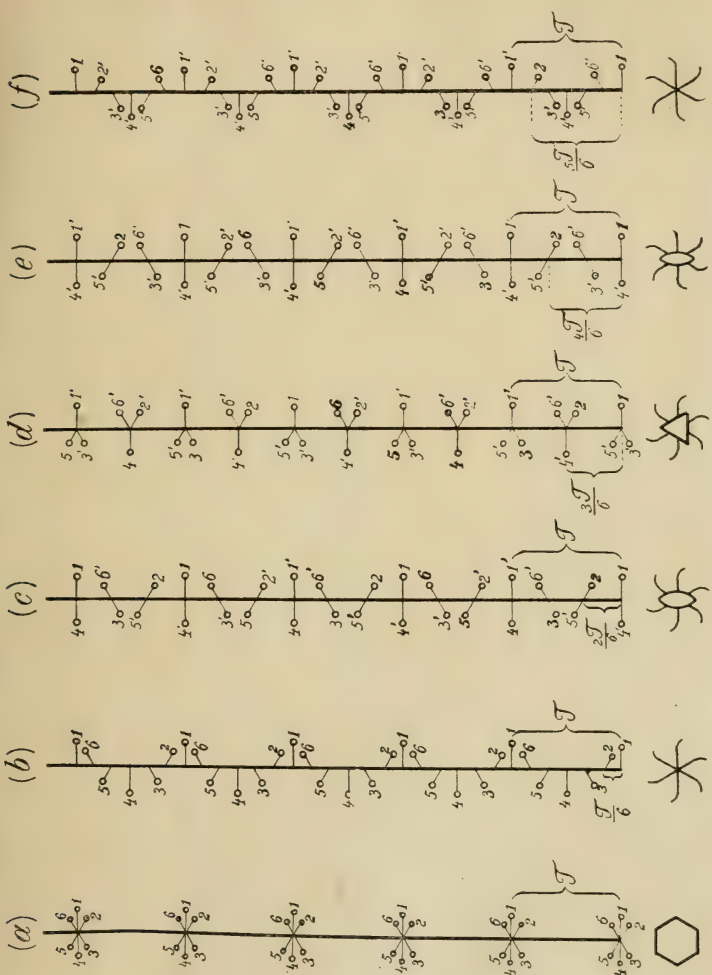


Fig. 9. Hexagonale Drehungsachsen und Schraubenachsen mit ihren Symbolen.

neuen Durchstoßpunkten c, d, e ..... Nun darf nach unserer Voraussetzung keine Entfernung ac, ad, ae ..... cd, ce ..... de ..... kleiner sein als $ab = d_k$. n muß also zunächst ganzzahlig und

≤ 6 sein. Lassen wir nun aber auch jede der neuen identischen Achsen wirken, so entstehen weitere Durchstoßpunkte identischer Achsen. Keiner von diesen darf einem schon gezeichneten näher liegen als b zu a. Führt man diese Betrachtungen durch, so fällt die fünfzählige Achse als möglicher Fall weg. Es bleiben übrig (1zählige Achse = Identität) zwei-, drei-, vier-, sechszählige Achsen. (Digonale, trigonale, tetragonale, hexagonale Achsen.) Sie sind die einzig möglichen Symmetrieachsen, die ein homogenes Diskontinuum besitzen kann. Für sie haben wir die möglichen verschiedenen Fälle von Schrauben- und -Drehungsachsen bereits abgeleitet.

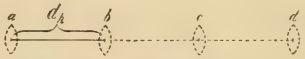


Fig. 10. Anordnung identischer digonaler Achsen im homogenen Diskontinuum.

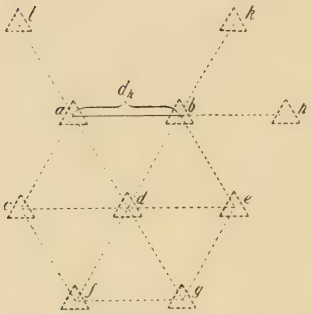


Fig. 11. Anordnung identischer trigonaler Achsen im homogenen Diskontinuum.

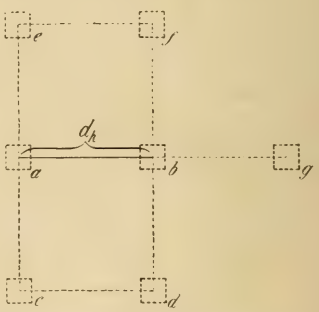


Fig. 12. Anordnung identischer tetragonaler Achsen im homogenen Diskontinuum.

Die Einzelbetrachtung wird durch die Figuren 10—14 erleichtert. Zwei digonale Achsen erzeugen zunächst eine Kette von Achsen mit lauter gleichen Abständen (Fig. 10). Aus den beiden gegebenen trigonalen Achsen a, b erzeugt die Achsenoperation sofort die identischen Achsen e, k, c, l (Fig. 11). Die Figur ergänzt sich unter Berücksichtigung weiterer Operationen und des zentrosymmetrischen Charakters der Perioden zu einem Netz der Durchstoßpunkte, das gleichseitige Dreiecke bildet. Kein nächster Abstand identischer Achsen ist also kleiner als der endliche Wert d_k. Ein gleiches Netz von Durchstoßpunkten erhält man bei Ableitung der hexagonalen Achsenscharen (Fig. 14).

Auch eine tetragonale Achse führt zu keinem Widerspruch. Die identischen Achsen erzeugen auf einer zu ihnen senkrechten Ebene ein quadratisches Netz von Durchstoßpunkten (Fig. 12).

Anders verhält es sich mit den pentagonalen Achsen. Die Ausführung der Operationen ergibt zunächst Abstände c g, die kleiner sind als d_k und die bei weiterer Fortsetzung zu unendlich kleinen Abständen führen würden. Pentagonale Achsen und homogenes Diskontinuum sind unvereinbar (Fig. 13).

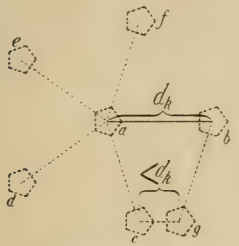


Fig. 13. Die pentagonalen Achsen sind mit homogenem Diskontinuum unvereinbar.

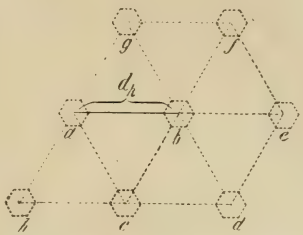


Fig. 14. Anordnung identischer hexagonaler Achsen im homogenen Diskontinuum.

Ein eleganter einfacher Beweis, daß mit einem homogenen Diskontinuum nur monogonale, digonale, trigonale, tetragonale oder hexagonale Achsen verträglich sind, wird auf folgende, meines Wissens bis jetzt noch nicht bekannte, Weise erhalten. (Siehe Fig. 15.)

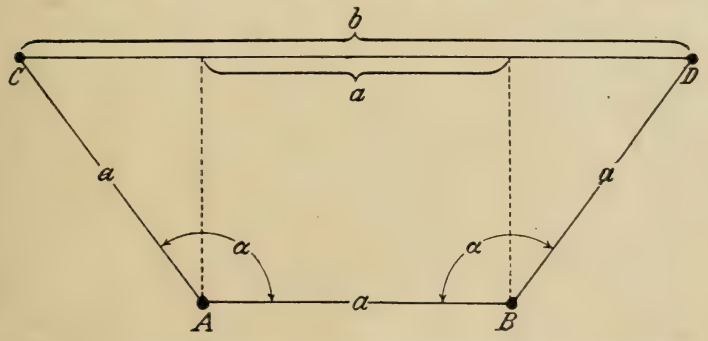


Fig. 15. Allgemeine Ableitung der möglichen Achsenzähligkeit im homogenen Diskontinuum.

Wir legen eine Ebene senkrecht zur Achsenschar, sie sei die Zeichenebene. In A und B stechen zwei nächst benachbarte identische Achsen ein, die Schraubenachsen oder Drehungsachsen sein können. Der kürzeste Identitätsabstand kann mit AB zusammenfallen oder schief auf der Ebene stehen. Im letzteren Fall ist AB seine Projektion auf die Zeichnungsebene. Der kleinste Drehwinkel der Achsen sei α. Wir

denken uns die Drehung um A und B in entgegengesetztem Sinne ausgeführt. In den Abständen AC und BD = AB = a müssen mit den Ausgangsachsen identische Achsen einstechen. CD ist parallel AB, kann also infolge der Identitätsbeziehungen nur ein Vielfaches von a = na sein, wo n eine ganze Zahl einschließlich Null ist. Nun setzt sich im Trapez ABCD die Seite CD zusammen aus $a \pm 2a \cdot \sin(\alpha - 90)$, wie sofort aus der Figur hervorgeht.

Das liefert die notwendige Bedingung:

$$a \pm 2a \cdot \sin(\alpha - 90) = na$$

bezw.

$$1 \pm 2\cos \cdot \alpha = n$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{n-1}{2} = \pm \frac{N}{2},$$

wo N ebenfalls eine ganze $\pm$-Zahl (einschließlich Null) ist.

Die möglichen Werte eingesetzt, ergibt folgendes:

N	+	−
N = 0	$\cos \alpha = +0$; $\alpha = 90°$	—
N = 1	$\cos \alpha = +1/2$; $\alpha = 60°$	$\cos \alpha = -1/2$; $\alpha = 120°$
N = 2	$\cos \alpha = +1$; $\alpha = 0°$	$\cos \alpha = -1$; $\alpha = 180°$
N > 2	gibt Werte größer als 1, die als cos-Werte nicht brauchbar sind	—

Die Achsen müssen daher ein-, zwei-, drei-, vier- oder sechszählig sein.

Die Symmetrieebenen

Jede Symmetrieebene teilt den Raum in zwei Teile, die ein gegenseitig spiegelbildliches Verhalten aufweisen. Führt man die Spiegelungsoperation an einem Element in gleichem Sinne zweimal nacheinander aus, so muß wieder die Identität entstehen. Zwei mögliche Fälle kommen für das homogene Diskontinuum in Frage. Einmal kann die Identität nach zweimaligem Ausführen der Operation sich direkt einstellen, indem alle Punkte in ihre Ausgangslagen zurückfallen (Spiegelebene), oder aber die Punkte werden in andere ihnen identische Punkte übergeführt. Im letzteren Falle ist mit jeder Spiegelung eine Translation oder Gleitung längs der Ebene verknüpft (Gleitspiegelebene), und zwar muß die zur Spiegelung gehörige Gleitkomponente die Hälfte des Identitätsabstandes in der Gleitrichtung sein. (Siehe die Figuren 16 und 17.) Als Gleitrichtung ist irgend eine in der Ebene liegende Richtung zulässig, weil aber eine jede primitive Translationsstrecke sich immer in e′ und f′ (den zwei kürzesten Perioden auf der Ebene) nach $\tau = r \cdot e' + s \cdot f'$ ausdrücken läßt, ergibt sich die Gleitkomponente zu $\frac{r}{2}e' + \frac{s}{2}f'$, wo r und s ganze Zahlen (einschließlich 0) sind. Die Identi-

tätsbeziehungen haben dann zur Folge, daß stets als kleinste Gleitkomponente entweder $\frac{e'}{2}$, $\frac{f'}{2}$ oder $\frac{e'+f'}{2}$ angenommen werden können. Den drei Möglichkeiten entsprechen drei Untergruppen von Gleitspiegelebenen, die nach den Prinzipien der Symmetrielehre allerdings nur da voneinander zu unterscheiden sind, wo eine oder zwei der angegebenen Richtungen vor den anderen ausgezeichnet sind.

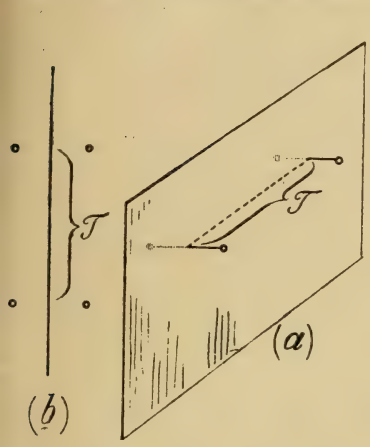


Fig. 16. Spiegelebene.
(a) = perspektivisches Bild; (b) = Projektion in der Ebenenrichtung.

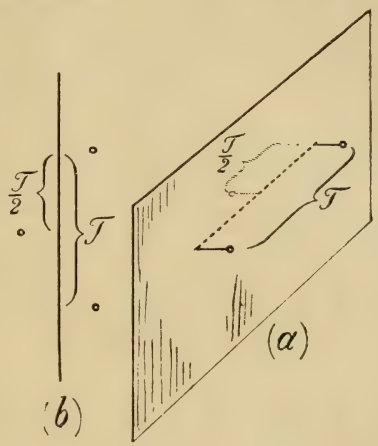


Fig. 17. Gleitspiegelebene.
(a) = perspektivisches Bild; (b) = Projektion in der Ebenenrichtung.

Die Achsen und Ebenen zusammengesetzter Symmetrie

Achsen und Ebenen zusammengesetzter Symmetrie enthalten keine neuen Operationen; die Deckoperation besteht lediglich aus einer notwendigen Kombination einer Operation der I. Art (Drehung, Schraubung) mit einer Operation der II. Art (Spiegelung, Gleitspiegelung). Ein Element wird in ein gleichwertiges Element übergeführt, indem gleichzeitig (und zwar immer nur in Kombination) eine n-zählige Achse und eine dazu senkrechte Symmetrieebene wirksam sind. Beide Elemente, Achse und Ebene zusammengesetzter Symmetrie, sind aneinander gebunden. Drehung und Spiegelung zusammen ausgeführt charakterisieren die Drehspiegelachsen und Drehspiegelebenen. Nach der kleinsten Drehung, die mit einer Spiegelung verbunden ist, wird die Achse bezeichnet. Der digonalen Drehspiegelachse ist eine Drehung von 180^0, verbunden mit einer Spiegelung an einer zur

Achse senkrecht stehenden Ebene, eigen. Sie entspricht dem, was man gewöhnlich von den Drehspiegelachsen und -Ebenen absondert und Symmmetriezentrum nennt (Inversionszentrum) (Fig. 18). Es ist dies statthaft, weil Achsenrichtung und damit auch Lage der Drehspiegelebene in diesem Falle unbestimmt bleiben. Die trigonale Drehspiegelachse ist identisch mit einer trigonalen Drehungsachse und einer senkrecht dazu stehenden wirklichen Spiegelebene (da eine Drehung von 4π ausgeführt werden muß, bis ein Punkt in seine Ausgangslage zurückfällt). Man bezeichnet sie daher stets mit dieser einfacheren Kombination zweier selbständiger Symmetrieelemente. Die tetragonale Drehspiegelachse ist in Fig. 19 dargestellt.

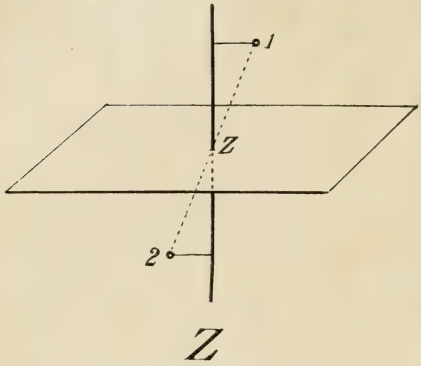


Fig. 18. Symmetriezentrum (Inversionszentrum) oder digonale Drehspiegelachse.

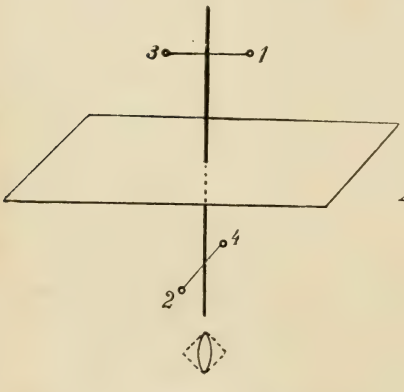


Fig. 19. Tetragonale Drehspiegelachse.

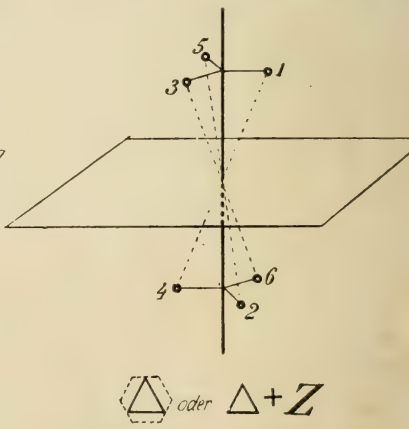


Fig. 20. Hexagonale Drehspiegelachse = Trigonale Drehungsachse + Symmetriezentrum.

Die Drehspiegelachse ist gleichzeitig digonale Drehungsachse. Fig. 20 kennzeichnet schließlich die hexagonale Drehspiegelachse, man sieht, daß sie außerdem trigonale Drehungsachse ist. Die Reihenfolge der den Punkten beigeschriebenen Zahlen entspricht der Reihenfolge der

Einzeloperationen, die nacheinander ausgeführt schließlich einen Punkt in seine Ausgangslage zurückbringen. Da jede hexagonale Achse gleichzeitig trigonale und digonale Achse ist, wird die hexagonale Achse einer trigonalen Achse mit einem Symmetrizentrum ident. Neue Symmetrieelemente sind daher zunächst nur das Symmetriezentrum, die tetragonale und die hexagonale Drehspiegelachse (mit ihren Drehspiegelebenen). (Letztere bereits ersetzbar durch trigonale Drehungsachse und Symmetriezentrum auf der Achse).

Es fragt sich nun, ob die gleichzeitigen Kombinationen von Schraubung und Spiegelung oder Drehung und Gleitspiegelung oder Schraubung und Gleitspiegelung besondere Deckoperationen darstellen. Dies ist nicht der Fall.

Verknüpft man die Schraubenbewegung mit einer Spiegelung (als Schraubungsdrehspiegelung), so ergibt sich wieder eine $\frac{n}{2}$-zählige Drehungsachse von gleicher Lage, verbunden mit einer Drehspiegelebene, die lediglich um $\frac{s}{2}$ in der Achsenrichtung verschoben ist (s = Schraubungskomponente). Drehung und Gleitspiegelung in Kombination sind ebenfalls durch eine Drehspiegeloperation zu ersetzen. Die neue Lage der Achse ist für die tetragonale Drehspiegelachse beispielsweise die folgende:

Bezeichnet man die Gleitrichtung als X-Achse, ferner die dazu senkrechte Richtung in der Gleitspiegelebene als Y-Achse, so ist die neue Achsenlage gegenüber der alten verschoben um $\frac{g'}{2}$ in der X-Richtung und $\frac{g'}{2}$ in der Y-Richtung (bezw. um die Diagonale des von diesen Komponenten bestimmten Quadrates). Dabei ist $g' =$ die Gleitkomponente $= \frac{\tau_x}{2} = \frac{\tau_y}{2}$. Unter Berücksichtigung beider Sätze bestimmt sich schließlich die Lage der resultierenden Drehspiegelachsen und Drehspiegelebenen, wenn es sich um eine Kombination von Schraubung mit Gleitspiegelung handelt. Die diesbezüglichen Sätze lassen sich alle leicht mathematisch beweisen, am einfachsten mit Hilfe der Decktransformationsbedingungen. Diese nehmen dann Werte an, welche sich auf ein neues Achsensystem interpretieren lassen. Der Weg wird später beschritten werden. Der Beweis läßt sich für jeden Einzelfall auch konstruktiv geben. Als Beispiele möge man die Figuren 21 und 22 betrachten.

In Fig. 21 sei 1 der Ausgangspunkt. Die digonale Drehspiegelachse sei Schraubenachse, die obere Ebene stelle die mit der Schraubung verbundene Drehspiegelebene dar. Ob wir nun zuerst die Schraubung $1 - 1''$ oder die Drehspiegelung $1 - 1'$ ausführen und nachher die Operation durch Spiegelung bezw. Parallelverschiebung ergänzen, ist gleich-

gültig, stets wird schließlich 1 in 2 übergeführt, was einer gewöhnlichen Drehspiegelung an einer um $\frac{\tau}{4}$ verschobenen Ebene gleichkommt.

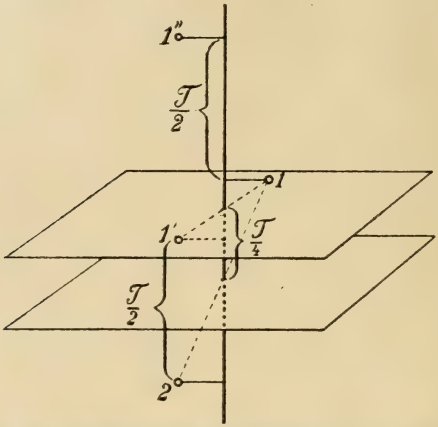


Fig. 21. Digonale Drehspiegelachse (Symmetriezentrum) aus Schraubung und Spiegelung als gleichzeitige Operation erhalten.

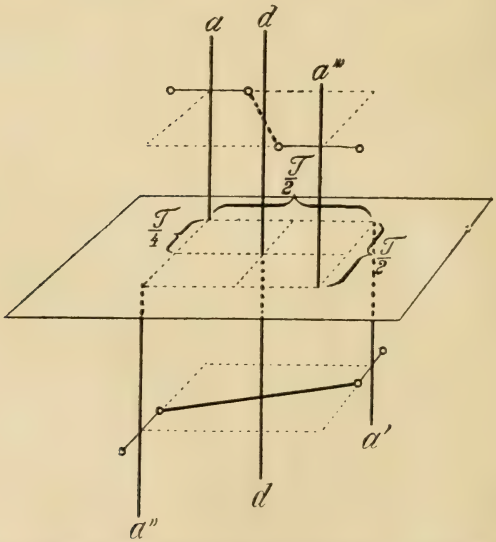


Fig. 22. Tetragonale Drehspiegelachse aus Drehung und Gleitspiegelung als gleichzeitige Operation erhalten.

Fig. 22 zeigt die Kombination einer Drehgleitspiegelebene mit einer tetragonalen Drehspiegelachse. $\frac{\tau}{2}$ ist die Gleitkomponente, die der tetragonalen Achse wegen in zwei aufeinander senkrecht stehenden Richtungen vorhanden sein muß, so daß a′ a″ a‴ ebenfalls digonale Drehungsachsen sein müssen. a′ a″ sind die durch die Gleitspiegelung aus a hervorgegangenen Fortsetzungen von a. a‴ ist mit a identisch. Man sieht, daß d eine gewöhnliche Drehspiegelachse ist und daß der Fußpunkt von d auf der Drehspiegelebene lediglich um $\frac{\tau}{4}$, $\frac{\tau'}{4}$ der beiden Gleitrichtungen verschoben ist.

Bei den, neue Symmetrieelemente ergebenden, gleichzeitigen Kombinationen von Operationen der I. und II. Art stellen sich somit je nach der Zähligkeit der Achsen stets Symmetriezentren oder tetragonale bezw. hexagonale Drehspiegelachsen ein. Die möglichen Symmetrieelemente, welche homogene Diskontinua besitzen können, und deren Lagenfixierung zur Charakterisierung notwendig und hinreichend ist, lauten somit:

digonale Drehungsachsen und digonale Schraubenachsen je einerlei Art,
trigonale Drehungsachsen und zweierlei trigonale Schraubenachsen,
tetragonale Drehungsachsen und dreierlei tetragonale Schraubenachsen,
hexagonale Drehungsachsen und fünferlei hexagonale Schraubenachsen,
Spiegelebenen,
Gleitspiegelebenen mit dreierlei verschiedenen einfachsten Gleitrichtungen,
Symmetriezentren,
tetragonale Drehspiegelachsen,
hexagonale Drehspiegelachsen (= trigonale Drehungsachsen + Symmetriezentren).

Weitere, von diesen unabhängige, Symmetrieelemente gibt es nicht.

Die möglichen Kombinationen der Symmetrielemente

Nun müssen die möglichen und verschiedenartigen Kombinationen, in denen diese Symmetrieelemente vorkommen können, aufgesucht werden. Zwei Kombinationen sind als verschieden zu bezeichnen, wenn verschiedenartige Elemente kombiniert sind oder wenn sich bei ähnlicher Art der Symmetrieelemente eine prinzipiell verschiedenartige gegenseitige Anordnung dieser Elemente im Raume einstellt. Die Gruppe der vorhandenen Operationen wird als Raumgruppe,

die Kombination der zugehörigen Symmetrieelemente als Raumsystem bezeichnet.

Jedes Symmetrieelement wird im homogenen Diskontinuum als identische Parallelschar auftreten. Die Schar ist durch die Translationsgrößen des homogenen Diskontinuums bestimmt, wenn die respektive Lage eines Elementes der Schar gegeben ist. Man braucht daher von allen nichtidentischen Symmetrieelementen lediglich die gegenseitigen Lagebeziehungen in einem Raume der Nichtidentität (primitives Parallelepiped) festzustellen.

Die Betrachtung dieses einen (sich ja lediglich parallel wiederholenden) Raumteiles ist für die Kenntnis des ganzen Raumsystemes notwendig und hinreichend. Hinsichtlich der Identitätsabstände (Translationsgruppe des homogenen Diskontinuums) ist zu untersuchen, von welchem Einfluß die Symmetriebeziehungen auf ihre Größe sind. Senkrecht zu einer n-zähligen Achse (Schrauben- oder -Drehungsachse) oder Drehspiegelachse müssen die einen Winkel von $\frac{360^0}{n}$ miteinander bildenden Identitätsabstände jeweilen notwendig gleichlang sein; ebenso unter sich in allen geneigten Richtungen, die durch Drehung um die Achse ineinander übergeführt werden. Links und rechts einer Symmetrieebene (Spiegel- oder Gleitspiegelebene) muß ein Identitätsabstand seinem Spiegelbild gleich sein. Der zentrosymmetrische Charakter liegt den Identitätsabständen von selbst inne.

Die möglichen verschiedenartigen Kombinationen nicht identischer Symmetrieelemente werden durch eine Reihe von Sätzen, die ihr Zusammenvorkommen regeln, auf eine relativ geringe Zahl (nämlich 230) beschränkt. Durch die Kombination weniger von ihnen sind meistens andere von selbst gegeben und in ihrer genauen Lage fixiert. Man kann so jeweilen eine oder mehrere, völlig das System kennzeichnende, Minimalkombinationen von der resultierenden Totalkombination der Symmetrieelemente unterscheiden. Die sich automatisch ergebenden Symmetrieelemente findet man am einfachsten mittels der Decktransformationsbedingungen. Jede Symmetrieeigenschaft entspricht ja einer Deckoperation, das heißt einer Koordinatenachsentransformation, nach deren Ausführung das System genau die gleichen Relationen aufweist wie vorher. An Stelle bestimmter Punkte, Geraden und Ebenen sind in nun gleicher Lage zu den Symmetrieelementen gleichwertige Punkte, Gerade und Ebenen getreten.

Ist der Koordinatenanfangspunkt eines schiefwinkligen Achsensystems Symmetriezentrum, so gehört zu jedem Punkt $[\![MNP]\!]$ ein Punkt $[\![M, \overline{N}, \overline{P}]\!]$. Die Decktransformationsbedingung führt jede positive

Achse in ihre negative über und lautet (nach Seite 23 bezogen auf die 12 variablen Werte):

$$0,\ 0,\ 0;\ \bar{1},\ \overline{\cos\gamma},\ \cos\beta;\ \overline{\cos\gamma},\ \bar{1},\ \overline{\cos\alpha};\ \overline{\cos\beta},\ \overline{\cos\alpha},\ 1 \qquad 27)$$

α, β, γ sind die Koordinatenachsenwinkel.

Besitzt das Symmetriezentrum die Koordinaten $[\![m_1,\ n_1,\ p_1]\!]$, so lautet die Decktransformationsbedingung:

$$2\,m_1,\ 2\,n_1,\ 2\,p_1;\ \bar{1},\ \overline{\cos\gamma},\ \cos\beta;\ \overline{\cos\gamma},\ \bar{1},\ \overline{\cos\alpha};\ \overline{\cos\beta},\ \overline{\cos\alpha},\ 1 \qquad 28)$$

Sind nun e, f, g drei kürzeste Identitätsabstände, so kommen dem homogenen Diskontinuum stets auch die Decktransformationsbedingungen von 26) Seite 24 zu. Es sei der Koordinatenanfangspunkt Symmetriezentrum. Dann läßt sich zunächst die Transformation 27) ausführen und nach ihr irgend eine (oder zwei oder alle drei) der Transformationen von 26). Die resultierende Transformationsbedingung muß wiederum eine Decktransformationsbedingung sein. Sie ist beispielsweise von der Gestalt:

$$e,\ 0,\ 0;\ \bar{1},\ \overline{\cos\gamma},\ \overline{\cos\beta};\ \overline{\cos\gamma},\ 1,\ \overline{\cos\alpha};\ \overline{\cos\beta},\ \overline{\cos\alpha},\ 1$$

und zeigt sofort nach 28), daß der Punkt mit den Koordinaten $\left[\!\left[\frac{e}{2},\ 0,\ 0\right]\!\right]$ ebenfalls Symmetriezentrum ist. Führt man die Betrachtungen vollständig durch, so ergibt sich, daß jede Kantenmitte und Flächenmitte, sowie der Schwerpunkt des Parallelepipeds e, f, g, Symmetriezentren sind.

Wenn α, β, γ einzeln den Wert von 90^0 besitzen, so vereinfachen sich die Bedingungen 26), 27), 28) zu:

$$\left.\begin{array}{l} e,\ 0,\ 0;\ 1,\ 0,\ 0;\ 0,\ 1,\ 0;\ 0,\ 0,\ 1 \\ 0,\ f,\ 0;\ 1,\ 0,\ 0;\ 0,\ 1,\ 0;\ 0,\ 0,\ 1 \\ 0,\ 0,\ g;\ 1,\ 0,\ 0;\ 0,\ 1,\ 0;\ 0,\ 0,\ 1 \end{array}\right\} \qquad 26a)$$

$$0,\ 0,\ 0;\ \bar{1},\ 0,\ 0;\ 0,\ \bar{1},\ 0;\ 0,\ 0,\ \bar{1} \qquad 27a)$$

$$2\,m_1,\ 2\,n_1,\ 2\,p_1;\ \bar{1},\ 0,\ 0;\ 0,\ \bar{1},\ 0;\ 0,\ 0,\ \bar{1} \qquad 28a)$$

Ist für einen derartigen Fall die Z-Achse (Richtung g) digonale Drehungsachse, so führt die Decktransformation die positiven X-Achsen und Y-Achsen in ihre negativen Achsen über, während die Z-Achse unverändert bleibt.

Das gibt die Decktransformationsbedingung:

$$0,\ 0,\ 0;\ \bar{1},\ 0,\ 0;\ 0,\ \bar{1},\ 0;\ 0,\ 0,\ 1 \qquad 29)$$

Geht die digonale Drehungsachse der Z-Achse parallel und sind die Koordinaten des Fußpunktes als $[\![m_1,\ n_1,\ 0_1]\!]$ gegeben, so lautet die Decktransformationsbedingung:

$$2\,m_1,\ 2\,n_1,\ 0;\ 1,\ 0,\ 0;\ 0,\ \bar{1},\ 0;\ 0,\ 0,\ 1 \qquad 30)$$

Daraus läßt sich in Verbindung mit 26a) sofort ableiten, daß in einem homogenen Diskontinuum, dessen Z-Achse digonale Drehungsachse

ist, auch die durch die Kantenmitten und Flächenmitten des Grundparallelogrammes (hier Rechteckes) gehenden Geraden [001] digonale Drehungsachsen darstellen.

Ist die Z-Achse digonale Schraubenachse, so lautet die Decktransformationsbedingung:

$$0, 0, \frac{g}{2}; \bar{1}, 0, 0; 0, \bar{1}, 0; 0, 0, 1 \qquad 31)$$

Eine Decktransformationsbedingung von der Gestalt

$$2\,m_1, 2\,n_1, \frac{g}{2}; \bar{1}, 0, 0; 0, \bar{1}, 0; 0, 0, 1 \qquad 32)$$

sagt also aus, daß durch den Fußpunkt mit den Koordinaten $[\![m_1, n_1, 0]\!]$ eine zur Z-Achse parallele digonale Schraubenachse geht $\left(\frac{g}{2} = \text{Schraubungskomponente}\right)$. Ähnlich sind die Gleichungsbedingungen für digonale Achsen parallel e oder f.

So lautet die Decktransformationsbedingung für e = digonale Drehungsachse:

$$0, 0, 0; 1, 0, 0; 0, \bar{1}, 0; 0, 0, \bar{1} \qquad 33)$$

Besitzt ein homogenes Diskontinuum gleichzeitig die Decktransformationsbedingungen 29) und 33), so folgt unter anderem, daß diejenige Transformation der Koordinatenachsen, welche entsteht, wenn 29) und 33) nacheinander ausgeführt werden, ebenfalls Decktransformation ist. Sie lautet:

$$0, 0, 0; \bar{1}, 0, 0; \overset{(-\,-)}{0, 1, 0}; 0, 0, \bar{1}$$

$$\text{bezw. } 0, 0, 0; \bar{1}, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, \bar{1} \qquad 34)$$

und ist der Ausdruck dafür, daß senkrecht zu beiden digonalen Achsen in der Richtung und Lage von f ebenfalls eine digonale Drehungsachse vorhanden ist.

Wären die beiden gemeinsamen Bedingungen durch 32) und 33) gegeben, so würde die resultierende Decktransformationsbedingung lauten:

$$2\,m_1, 2\,n_1, \frac{g}{2}; \bar{1}, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, \bar{1} \qquad 35)$$

Sie würde anzeigen, daß im Abstande $m_1, \frac{g}{4}$ vom Nullpunkt parallel zu f eine digonale Schraubenachse mit einer Schraubungskomponente von $2\,n_1$ zu suchen ist usw.

Ist die durch den Nullpunkt gehende Z-Achse tetragonale Drehungsachse, so führt die, einer Drehung um 90° entsprechende, Decktransformation die X-Achse in die $\bar{Y}$-Achse über, die Y-Achse in die X-Achse, währenddem die Z-Achse unverändert bleibt. Die entsprechende Bedingung wird zu:

$$0, 0, 0; 0, 1, 0; 1, 0, 0; 0, 0, 1. \qquad 36)$$

Die Bedingung: $0, 0, \frac{3g}{4}$; $0, 1, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 0, 1$ 37)

bezeichnet in diesem Sinne eine durch den Nullpunkt gehende tetragonale Schraubenachse parallel der Z-Richtung mit einer Schraubungskomponente von $\frac{3g}{4}$ im linken Windungssinn. Nach Seite 29 ist das die einfache rechtsgewundene tetragonale Schraubenachse usw.

Besitzt ein homogenes Diskontinuum außer 34) auch die Bedingung 36), so entspricht der Kombination beider die neue Decktransformationsbedingung:

$$0, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, 0, 1 \qquad 38)$$

X- und Y-Achse sind mit ihren negativen Richtungen vertauscht; es ist also $[\bar{1}10]^{00}$ digonale Drehungsachse usw.

Die einer Symmetrieebene zukommenden Decktransformationen lassen in der Ebene (bezw. parallel dazu) liegende Koordinatenachsen unverändert, senkrecht dazu stehende werden in ihre negativen Werte übergeführt.

$$0, 0, 0;\ 1, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, \bar{1} \qquad 39)$$

ist als Decktransformationsbedingung charakteristisch für eine Spiegelebene $(001)_0$. Sind gleichzeitig 29) und 39) vorhanden, so ergibt die Kombination beider Bedingungen neu:

$$0, 0, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, \bar{1}$$

d. h. der Schnittpunkt zwischen digonaler Drehungsachse und senkrecht dazu liegender Spiegelebene ist ein Symmetriezentrum.

$$m_1, n_1, p_1;\ 1, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, \bar{1} \qquad 40)$$

ist die Decktransformationsbedingung bei Anwesenheit einer zu (001) parallelen Gleitspiegelebene, im Abstande $\frac{p_1}{2}$ vom Nullpunkt und mit der Gleitkomponente $m_1 + n_1$.

Diese Beispiele mögen zur Erläuterung des allgemeinen Prinzipes genügen. Es wird keine Schwierigkeiten bereiten in jedem Einzelfalle die einem bestimmten Symmetrieelement zukommenden Decktransformationsbedingungen aufzusuchen und umgekehrt eine durch Kombination erhaltene Bedingung als Symmetrieelement zu deuten. Die meisten Sätze, die das Zusammenvorkommen von Symmetrieelementen regeln, lassen sich auf diese Weise erhalten. Wir wollen alle diejenigen, welche für die Ableitung der möglichen Raumgruppen bezw. Raumsysteme notwendig sind, zunächst im Zusammenhang mitteilen, eine spezielle Beweisführung aber nur da anbringen, wo sich ein besonderes Verfahren zur Erlangung von Allgemeinsätzen empfiehlt. Indem Drehungsachsen und Spiegelebenen als Sonderfälle der Schraubenachsen und Gleitspiegelebenen betrachtet werden, lassen sich die Sätze so formulieren, daß sie

jeweilen für irgendwelche gleichzähligen Achsen und verallgemeinerte Symmetrieebenen gültig sind.

Zunächst folgt aus der Grundvoraussetzung eines homogenen Diskontinuums:

1. Identische Symmetrieelemente sind einander parallel und müssen voneinander einen endlichen kleinsten Abstand besitzen. Dadurch wird die mögliche Zähligkeit der Achsen in der früher angegebenen Weise beschränkt.

2. Die Zahl nichtidentischer Symmetrieelemente ist stets eine endliche. So gibt es immer nur Achsen und Symmetrieebenen einer beschränkten Zahl verschiedener Richtungen.

3. Jede identische Parallelschar von Symmetrieelementen eines homogenen Diskontinuums bedingt dazu parallele Scharen mit ihr nichtidentischer Symmetrieelemente, die ebenfalls endliche Abstände voneinander besitzen müssen. Legen wir an irgend einer Stelle des homogenen Diskontinuums ein Symmetrieelement durch, so erzeugt dies außer seiner Identitätsschar noch eine beschränkte Zahl anderer dazu paralleler Scharen. Die Gesamtheit der derart zusammengehörigen Parallelschar nennen wir die dem Symmetrieelement isomorphe Schar. Folgende Sätze lassen sich mittels der Decktransformationsbedingungen leicht erhalten und werden im weiteren Verlauf auch auf konstruktivem Wege bewiesen:

3a. Die einer digonalen Achse isomorphen Parallelscharen bestehen aus insgesamt viererlei nichtidentischen Scharen digonaler Achsen.

Es können alle vier Drehungsachsen oder alle vier Schraubenachsen sein, oder es sind zwei davon Drehungsachsen, zwei Schraubenachsen.

3b. Die einer trigonalen Achse isomorphen Parallelscharen bestehen aus dreierlei nichtidentischen Scharen trigonaler Achsen.

Entweder sind alle Drehungsachsen oder rechte Schraubenachsen oder linke Schraubenachsen: oder aber eine Identitätsschar besteht aus Drehungsachsen, eine aus rechten und eine aus linken Schraubenachsen.

3c. Die einer tetragonalen Achse isomorphen Parallelscharen bestehen im allgemeinen aus zweierlei tetragonalen nichtidentischen und aus zweierlei digonalen nichtidentischen Achsen mit ihren Identitätsscharen.

Die Achsen können sein:

I. Alle vier Drehungsachsen.
II. Alle vier rechte Schraubenachsen.
III. Alle vier linke Schraubenachsen.
IV. Die tetragonalen Achsen sind als solche Schraubenachsen, als digonale Achsen Drehungsachsen, dann sind auch die zwei nur digonalen Achsen Drehungsachsen.

V. Die eine tetragonale Achse ist als solche Schraubenachse und zugleich digonale Drehungsachse, die andere ist tetragonale Drehungsachse. Dann sind die nur digonalen Achsen Schraubenachsen.

VI. Die eine tetragonale Achse ist rechte, die andere linke Schraubenachse $\left(\text{Schraubungskomponente } \frac{\tau}{4}\right)$; dann sind die nur digonalen Achsen Drehungsachsen.

Eine tetragonale Drehspiegelachse muß immer digonale Drehungsachse sein. Die isomorphe Parallelschar besteht aus zweierlei nichtidentischen tetragonalen Drehspiegelachsen und zwei weiteren nichtidentischen digonalen Achsen, die als solche entweder Drehungs- oder Schraubenachsen sein können. Ist eine gewöhnliche tetragonale Achse zugleich tetragonale Drehspiegelachse, so brauchen die in verschiedenem Sinne vierzähligen Achsen nicht zusammenzufallen.

3d. Die einer hexagonalen Achse isomorphen Parallelscharen bestehen aus einer hexagonalen, zwei nichtidentischen trigonalen und drei weiteren nichtidentischen digonalen Achsen mit ihren Identitätsscharen.

I. Alle Achsen können Drehungsachsen sein.

II. Alle Achsen können rechte Schraubenachsen sein.

III. Alle Achsen können linke Schraubenachsen sein.

IV. Die hexagonale Achse ist als digonale Achse Schraubenachse, als trigonale Achse Drehungsachse. Dann sind auch die zweierlei rein trigonalen Achsen Drehungsachsen, die dreierlei rein digonalen Achsen Schraubenachsen.

V. Die hexagonale Achse ist als trigonale Achse rechte Schraubenachse, als digonale Achse Drehungsachse. Dann sind auch die rein digonalen Achsen Drehungsachsen, die rein trigonalen Achsen rechte Schraubenachsen.

VI. Die hexagonale Achse ist als trigonale Achse linke Schraubenachse, als digonale Achse Drehungsachse. Dann sind auch die rein digonalen Achsen Drehungsachsen, die nur trigonalen Achsen linke Schraubenachsen.

Die einer hexagonalen Drehspiegelachse isomorphe Parallelschar ergibt sich am einfachsten aus der Kombination trigonaler Drehungsachsen mit Symmetriezentren.

3e. Die einem Symmetriezentrum isomorphen Parallelscharen bestehen immer aus achterlei nichtidentischen Symmetriezentren mit ihren Identitätsscharen.

3f. Die einer Symmetrieebene isomorphen Parallelscharen bestehen aus zweierlei nichtidentischen Symmetrieebenenscharen. Beide

können Spiegelebenen oder Gleitspiegelebenen der gleichen Gleitungskomponente sein. Oder aber die eine Ebene ist Spiegelebene, die andere Gleitspiegelebene, beziehungsweise beide sind Gleitspiegelebenen mit verschiedenen Gleitkomponenten.

Diese isomorphen Parallelscharen sind nun die eigentlichen „Symmetrieelemente" für das Diskontinuum. Kein Symmetriebestandteil kann anders als in derartigen Scharen auftreten, keiner Richtung können andere Symmetriebestandteile parallel gehen als solche, die eine der obigen Scharen bilden. Das Problem, alle möglichen homogenen Diskontinua mit Symmetrieeigenschaften aufzusuchen, ist daher identisch mit der Aufgabe, alle möglichen endlichen Kombinationen derartiger isomorpher Parallelscharen von Symmetrieelementen festzustellen. Bei der Kombination ist darauf zu achten, daß die Scharen als solche erhalten bleiben müssen. Das ist einer der wichtigsten Grundsätze, der für die Ableitung aller möglichen Raumsysteme in Frage kommt. Dadurch wird die gegenseitige Lage verschiedenartiger Symmetriebestandteile von vornherein Beschränkungen unterworfen.

4. Wir können nun zunächst alle möglichen Kombinationen der, bestimmtzähligen Achsen isomorphen, Parallelscharen von Achsen aufsuchen. Dabei haben wir hinsichtlich der gegenseitigen Lage auf zweierlei Umstände Rücksicht zu nehmen, einmal auf die Zähligkeiten der Achsen, welchen die Scharen isomorph sind, sowie auf die Winkel, welche die Parallelscharen miteinander bilden, andererseits auf die speziellen Lagen der Achsen der einen Schar zu den Achsen der anderen Schar. Die letzteren müssen immer so sein, daß durch die Einzeloperationen jede Achse in eine gleichartige Achse ihrer eigenen Schar (eventuell in sich selbst) oder einer gleichwertigen Schar übergeführt wird. Zur Feststellung des ersteren genügt es statt der Scharen (die sich ja durch die Bedingungen des Diskontinuums von selbst einstellen) die Ableitung für einzelne Achsen vorzunehmen.

Wir wenden uns daher zunächst der Frage zu, welche Winkel Achsen miteinander bilden können. Alle Sätze, welche für in einem Punkte sich schneidende Drehungsachsen einer endlichen Symmetriegruppe abgeleitet werden können, gelten auch für irgendwelche einander nichtparallele entsprechend zählige (windschiefe) Drehungsachsen oder Schraubenachsen, sofern lediglich Zähligkeit (Drehwinkel) und allgemeine Achsenrichtung (Winkel zwischen den Achsen) in Frage kommen. Denn wir können uns die Operationen einer Schraubungsachse vollzogen denken, indem Drehung und Schraubungstranslation nacheinander ausgeführt werden. Die Translation als Parallelverschiebung kann aber niemals weder Drehwinkel noch Achsenrichtung ändern. Durch bloße, die Winkelverhältnisse unberührt lassende, Parallel-

verschiebungen können auch alle einander nichtparallelen, windschiefen Achsen zum Schnitt gebracht werden.

5. Daraus folgen die nachstehenden Sätze über die Kombinationsmöglichkeiten von Achsen.

5a. Sind zwei beliebige ungleichwertige Achsen vorhanden, so entstehen immer mehrere gleichwertige Achsen. Durch die mit einer Achse verknüpften Deckoperationen wird die zweite Achse vervielfältigt und umgekehrt. Hier muß, da wir von einem Anfangspunkt aus rechnen, jede Achse zunächst als einseitig oder polar aufgefaßt werden. Eine zweiseitige Achse ist bereits eine Kombination zweier polarer Achsen im Winkel von 180°. Aus der Fig. 23 ergeben sich die Beziehungen zwischen dem Drehwinkel der einen Achse (α), dem Winkel zwischen den ungleichwertigen Achsen (δ) und dem Winkel zwischen den durch Drehung um α auseinander hervorgegangenen gleichwertigen Achsen (γ). Sie sind:

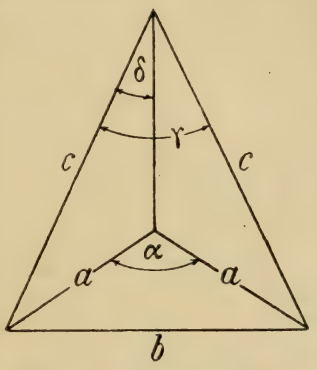


Fig. 23. Winkelbeziehungen zwischen Achsen (perspektivische Figur).

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \delta \qquad 41)$$

Damit ist das Problem, mögliche Kombinationen von Achsen aufzusuchen, darauf zurückgeführt, die möglichen Kombinationen gleichwertiger Achsen festzustellen.

5b. Andererseits bedingen zwei nichtparallele (ungleichwertige) Achsen stets eine dritte Achse, deren Zähligkeit und Winkelabstände durch die Zähligkeiten und den Winkelabstand der gegebenen Achsen bestimmt sind.

Es seien die in O sich schneidenden Achsen 1 und 2 (OA und OB) der Fig. 24 gegeben. Sie schließen miteinander einen Winkel AB = c ein. Ihre kleinsten Drehwinkel seien respektive α und β. Wir machen $\measuredangle \mathrm{BAC} = \frac{\alpha}{2}$, $\measuredangle \mathrm{ABC} = \frac{\beta}{2}$, ebenso $\measuredangle \mathrm{BAC'} = \frac{\alpha}{2}$, $\measuredangle \mathrm{ABC'} = \frac{\beta}{2}$. Betrachten wir nun die Gerade OC = 3. Nach einer Drehung um den Betrag α um 1 fällt OC mit OC′ = 3′ zusammen. Wird jetzt um $\measuredangle \beta$ (das heißt von O aus gesehen im gleichen Sinne) um die Achse OB = 2

gedreht, so fällt OC′ auf OC, also die ursprüngliche Gerade in sich selbst zurück. Andere Geraden, beispielsweise 2 selbst verändern beim Nacheinanderausführen der beiden Operationen ihren Platz. 2 wird beispielsweise bei der Drehung von β um sich selbst ihre Lage beibehalten, nach einer Drehung um α aber in die Richtung OB′ fallen. OC ist somit eine neue Achse mit einem Drehungswinkel $\gamma = \measuredangle \mathrm{BCB'}$.

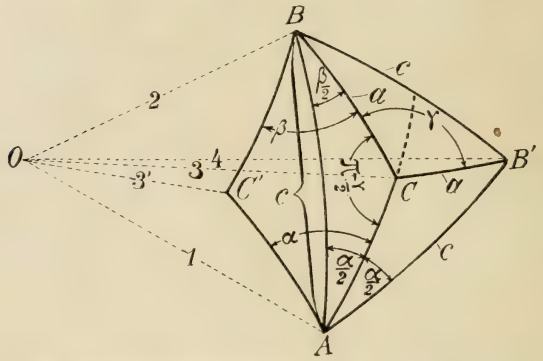


Fig. 24. Winkelbeziehungen zwischen Achsen (perspektivische Figur).

Da die Dreiecke ACB und AB′C kongruent sind, ist $\measuredangle \mathrm{ACB} = \pi - \frac{\gamma}{2}$ $\cos\left(\pi - \frac{\gamma}{2}\right) = -\cos\frac{\gamma}{2}$. Aus dem sphärischen Dreieck ABC folgen ohne weiteres die Beziehungen:

$$\cos\frac{\gamma}{2} = +\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos c \qquad 42)$$

$$\cos a = \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} \qquad 43)$$

$$\cos b = \frac{\cos\frac{\beta}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} \qquad 44)$$

5c. Über die mit einem homogenen Diskontinuum verträglichen Winkel, welche gleichwertige digonale, trigonale, tetragonale oder hexagonale Achsen miteinander bilden können, gibt folgende Konstruktion Aufschluß (Fig. 25). Zwei gleichwertige Achsen OJ und $\mathrm{OJ_1}$ bilden einen kleinsten Winkel ω miteinander. Senkrecht zur Winkelhalbierenden sei der kürzeste Identitätsabstand

in der Achsenebene durch a gegeben. Die vorausgesetzte Gleichwertigkeit der Achsen gibt $JJ_1 = a$ einen endlichen Wert und macht, daß die Punkte J und J_1 einander reell identisch sind. Nun denken wir uns die Drehungen um die Achsen OJ und OJ_1 in einander entgegengesetztem Sinne ausgeführt. Der Drehwinkel sei α. In den Entfernungen a und dem Winkel ε finden wir zu J und J_1 identische Punkte J_2 und J_3 Es ist $\sin \frac{\varepsilon}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\omega}{2}$. J_2J_3 ist JJ_1 parallel, da ja JJ_1 als Senkrechte auf der Winkelhalbierenden gleiche Winkel mit den Achsen einschließt. Es muß daher $J_2J_3 = b$, das heißt wie früher $= N \cdot a$ sein, wo N eine ganze Zahl ist.

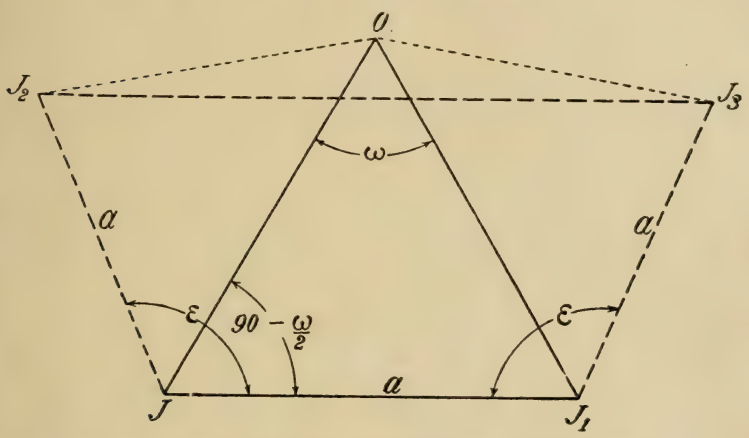


Fig. 25. Winkel zwischen gleichwertigen Achsen (perspektivische Figur).

Wie bei der Ableitung der möglichen Achsenzähligkeiten erhalten wir, daß $\sin \frac{\varepsilon}{2}$ nur die Werte 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, 1 annehmen kann, beziehungsweise daß ε 0^0, 60^0, 90^0, 120^0 oder 180^0 sein muß.

$$\text{Somit wird } \cos \frac{\omega}{2} = \frac{\text{irgend einer der 5 obigen Sinuswerte}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \qquad 45)$$

Indem wir der Reihe nach die $\sin \frac{\varepsilon}{2}$-Werte für gegebenes $\frac{\alpha}{2}$ einsetzen, erhalten wir alle möglichen Winkel, die gleichwertige Achsen miteinander bilden können. (In Frage kommen nur diejenigen, welche als echte Brüche im Cosinussinne zu deuten sind.)

Folgendes ist die resultierende Tabelle:

α	$\sin\frac{\varepsilon}{2}=0$		$\sin\frac{\varepsilon}{2}=\frac{1}{2}$		$\sin\frac{\varepsilon}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$		$\sin\frac{\varepsilon}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$		$\sin\frac{\varepsilon}{2}=1$	
	$\cos\frac{\omega}{2}$	ω	$\cos\frac{\omega}{2}$	ω	$\cos\frac{\omega}{2}$	ω	$\cos\frac{\omega}{2}$	ω	$\cos\frac{\omega}{2}$	ω
180°	0	180°	$\frac{1}{2}$	60°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	90°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	120°	1	0°
120°	0	180°	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	109° 28′ 16″	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	70° 31′ 44″	1	0°	—	—
90°	0	180°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	90°	1	0°	—	—	—	—
60°	0	180°	1	0°	—	—	—	—	—	—

Zunächst erhalten wir den Werten von Null Grad entsprechend vier „Klassen" von Achsenraumsystemen, die eine einzige n-zählige polare Achsenschar besitzen.

Ferner können wir nach der Formel 41), welche die Gestalt

$$\sin\frac{\omega}{2}=\sin\frac{\alpha^1}{2}\cdot\sin\delta$$

annimmt, bestimmen, in bezug auf was für eine Achse (α^1 = Drehwinkel) in was für einem Winkel (δ) die gleichwertigen Achsen der Tabelle einander gleichwertig sein können[1]). $\frac{\alpha^1}{2}$ muß ja der Grundvoraussetzung des homogenen Diskontinuums wegen 30°, 45°, 60° oder 90° sein.

ω ist ein aus unserer Tabelle ersichtlicher möglicher Wert des Zwischenwinkels gleichwertiger Achsen. δ ist dann der Winkel, welche unsere die Gleichwertigkeit bedingende neue Achse mit den gleichwertigen Achsen einschließt.

I. $\omega = 180°$; $\sin\frac{\omega}{2}=\sin\frac{\alpha^1}{2}\sin\delta=1$. Ohne weiteres ist, da $\sin\frac{\alpha^1}{2}=1$ oder ein echter Bruch ist, $\sin\delta$ aber ebenfalls 1 oder ein echter Bruch sein muß, ersichtlich, daß nur eine Achse mit $\sin\frac{\alpha^1}{2}=1$ im Winkelabstand δ, dessen Sinus = 1 ist, die Gleichwertigkeit erzeugen kann. Das heißt: Mit zwei infolge Achsensymmetrie gleichwertigen Achsen im Winkel von 180° (einer zweiseitigen Achse) steht eine senkrecht darauf liegende digonale Achse in Verbindung. ω kann für alle vier-

[1]) Die Gleichwertigkeit in bezug auf Symmetrieebenen wird sich später ergeben, zunächst suchen wir die Raumsysteme auf, die nur Achsen besitzen.

erlei Achsen 180^0 sein. Wir können nun nach den Formeln 42)—44) die weiteren durch die digonale und die n-zählige Achse bedingten Achsen aufsuchen und erhalten so vier „Klassen" von Achsenraumsystemen, die je durch eine n-zählige zweiseitige Hauptachsenschar und n-senkrecht daraufstehende digonale Achsenscharen charakterisiert sind. Ist n = gerade, so sind die digonalen Achsenscharen zweiseitig. Gleichwertige digonale Achsen bilden Winkel von $\frac{360^0}{n}$ miteinander, ungleichwertige Winkel von $\frac{360^0}{2n}$.

II. $\omega = 60^0$ kommt nur als Winkel zwischen gleichwertigen digonalen Achsen vor.

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} = \sin\frac{\alpha^1}{2}\sin\delta. \quad \text{Daraus folgt} \quad \sin\delta = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha^1}{2}}.$$

Für $\sin\frac{\alpha^1}{2}$ die möglichen Werte eingesetzt ergibt:

A. $\sin\delta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$ = eine hexagonale Achse im Winkel von 90^0, identisch mit unter I. gefundenen Achsenraumsystemen.

B. $\sin\delta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ = eine tetragonale Achse im Winkel von 45^0. Die weitere Diskussion nach den Formeln 42) bis 44) zeigt, daß drei aufeinander senkrecht stehende zweiseitige tetragonale, 6 gleichwertige digonale Achsenscharen mit Winkeln von 90^0 und 60^0 bezw. 120^0, sowie vier zweiseitige trigonale Achsenscharen mit Winkeln von $109^0\,28'\,16''$ bezw. $70^0\,31'\,44''$ resultieren. Die durch derartige Winkelverhältnisse charakterisierte Klasse von Achsenraumsystemen heißt „Klasse der verallgemeinerten Oktaedergruppen". (Schema der Achsenrichtungen in Fig. 26.)

C. Zu der gleichen Achsenkombination gelangen wir, wenn $\sin\frac{\alpha^1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ angenommen wird. Zunächst ergibt sich nach $\sin\delta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ eine trigonale Achse im Winkel von $35^0\,15'\,52''$.

D. Wird $\frac{\sin\alpha^1}{2} = 1$ gesetzt, so liefert die Formel zunächst $\sin\delta = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$. Eine digonale Achse im Winkel von 30^0 bedingt die Gleichwertigkeit. In weiterer Verfolgung der

Verhältnisse wird leicht erkannt werden, daß eine unter I. bereits abgeleitete Achsenkombination sich einstellt. (Dieselbe wie unter A.)

III. $\omega = 90^0$ kommt als Winkel zwischen gleichwertigen digonalen und tetragonalen Achsen vor.

A. $\sin \frac{\alpha^1}{2} = \frac{1}{2}$; $\sin \delta = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = > 1 =$ unmöglich.

B. $\sin \frac{\alpha^1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\sin \delta = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 1$. Eine tetragonale Achse im Winkel von 90^0 bedingt die Gleichwertigkeit. Die weitere Untersuchung würde zeigen, daß bei digonalen Ausgangsachsen eine unter I. gefundene Anordnung resultiert, bei tetragonalen Achsen die verallgemeinerte Oktaedergruppe.

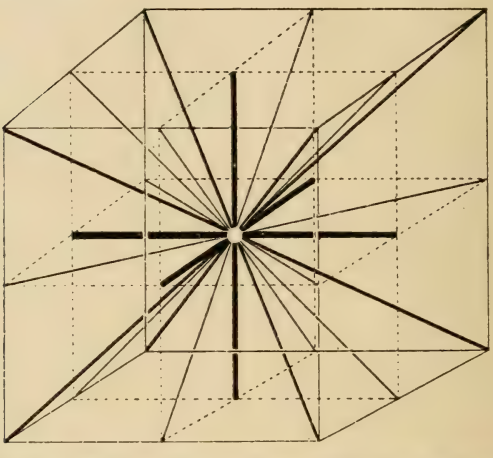


Fig. 26. Achsenlage einer Oktaedergruppe. Alle Achsen miteinander in einem Punkt zum Schnitt gebracht. Stärkste Linien = tetragonale Achsen, mittelstarke = trigonale Achsen, schwächere = digonale Achsen.

C. $\sin \frac{\alpha^1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\sin \delta = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Die Gleichwertigkeit wird durch eine trigonale Achse im Winkel von $54^0\,44'\,8''$ hervorgerufen. Sind die Ausgangsachsen digonal, so ergibt die Anwendung der Formeln 42)—44) eine als verallgemeinerte Tetraedergruppe bezeichnete Achsenanordnung mit vier gleichwertigen, polaren trigonalen Achsenscharen unter Winkeln von $109^0\,28'\,16''$ und drei gleichwertigen digonalen, senkrecht aufeinanderstehenden, Achsenscharen, die

die Winkel der trigonalen Achsen halbieren. (Schema der Achsenrichtungen in Fig. 27.) Sind die Ausgangsachsen von tetragonalem Charakter, so resultiert wiederum die verallgemeinerte Oktaedergruppe.

D. $\sin \frac{\alpha^1}{2} = 1$ gesetzt. $\sin \delta = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Der Fall ist mit bereits abgeleiteten identisch.

IV. $\omega = 120^0$ kommt nur bei digonalen Achsen vor. Die für $\sin \frac{\alpha^1}{2}$ allein zulässigen Werte sind $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ und 1. Sie führen ebenfalls zu bereits abgeleiteten Achsenanordnungen.

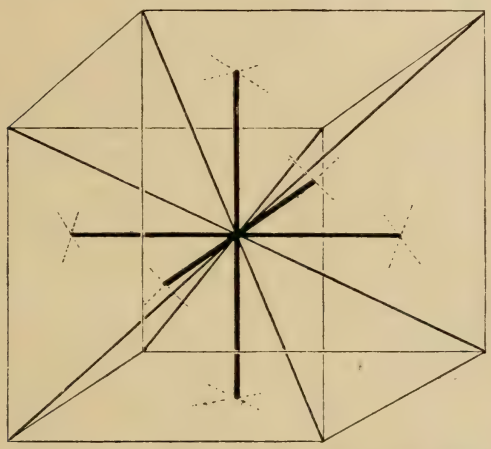


Fig. 27. Achsenlage einer Tetraedergruppe. Alle Achsen miteinander in einem Punkt zum Schnitt gebracht. Stärkste Linien = digonale Achsen, schwächere Linien (Würfeldiagonalen) = trigonale Achsen.

V. Das gleiche gilt für die nur bei trigonalen Achsen vorkommenden ω-Werte von $109^0\,28'\,16''$ und $70^0\,31'\,44''$. (Oktaeder- und Tetraedergruppen.) Bereits haben wir ja Raumsysteme erhalten mit allen in der Tabelle auf Seite 50 als möglich abgeleiteten Winkeln zwischen gleichwertigen Achsen; da zwei verschiedene Achsen die anderen bedingen, so ist ohne weiteres verständlich, daß neue Fälle nicht mehr entstehen können. Man kann aber systematisch weiteruntersuchen und dieses offensichtliche Resultat bestätigen.

Indem wir uns (wie bereits getan) die Achsenraumsysteme, welche gleichzählige Achsenscharen unter gleichen Winkeln

enthalten, zu „Klassen“ vereinigt denken, können wir das Ergebnis der Untersuchungen folgendermaßen zusammenfassen. Es gibt, eingeschlossen die Identität, 11 Klassen von Achsenraumsystemen, die durch Art und Zahl der isomorphen Achsenscharen und die Winkel, welche diese Scharen miteinander bilden, definiert sind. Die isomorphen Scharen selbst können sich noch in verschiedener Weise aus Schraubenachsen oder Drehungsachsen zusammensetzen.

Die Klassen lassen sich zweckmäßig ordnen nach:

1. Identität.
2. Achsenraumsysteme mit polaren höchstzähligen Achsen.
   (4 Klassen mit je nur einer einfachen Schar und die Klasse der verallgemeinerten Tetraedergruppen.)
3. Achsenraumsysteme mit zweiseitigen höchstzähligen Achsen.
   (4 unter I. abgeleitete Klassen, sowie die Klasse der verallgemeinerten Oktaedergruppen.)

Oder man faßt die Klassen der Tetraedergruppen und Oktaedergruppen zusammen und stellt sie den Klassen der Identität und den $4 + 4$ zuerst abgeleiteten einfacheren Achsenraumsystemsklassen gegenüber.

6. Damit auch die speziellen gegenseitigen Lagen und die Art der Schraubenoperation in den Kreis der Betrachtungen gezogen werden können, wollen wir folgendes festsetzen: Achsen, die einer Ebene parallel sind, die aber im übrigen windschief zueinander stehen, denken wir uns auf diese Ebene projiziert. Mit „Kreuzungspunkt“ bezeichnen wir den Schnittpunkt dieser Projektionen auf der Ebene, er ist zugleich Schnittpunkt der Achsen selbst, wenn diese in der Ebene liegen (letzteres als inbegriffener Spezialfall). Den Winkel der Projektionen nennen wir Winkel der Achsen. Die Drehungsachse ist eine Schraubenachse mit der Schraubungskomponente Null.

Dann gelten für das homogene Diskontinuum die Sätze:

Zwei unter einem Winkel $\frac{\pi}{n}$ stehende digonale Achsenscharen bedingen darauf senkrecht stehende n-zählige Achsen. Gleichzeitig entstehen digonale Achsenscharen von im ganzen n Richtungen, die alle einer Ebene parallel sind, beziehungsweise in ihr liegen. Da für das homogene Diskontinuum einzig zwei-, drei-, vier-, sechszählige Achsen in Frage kommen, können digonale Achsen nur Winkel von 90^0, 120^0 bezw. 60^0, 45^0 oder 30^0 miteinander bilden. Gleichwertige digonale Achsenscharen schließen jeweilen Winkel von $\frac{2\pi}{n}$ miteinander ein. Einem stets vorhandenen Kreuzungspunkt O aller n-Scharen digonaler Achsen kann man im Abstande OA in ihrer Parallelebene eine senkrecht

darauf stehende n-zählige Achse stets dann zuordnen, wenn die von A auf die Projektion der Achsen gefällten Lote (bezw. die Achsen selbst) jede digonale Achse in der Hälfte ihres Schraubungskomponentenbetrages von O aus treffen. Die Schraubungskomponente der n-zähligen Achse selbst ist dem doppelten Abstande zweier um $\frac{\pi}{n}$ gedrehter derart zugeordneter digonalen Achsen gleich. Von besonderer Bedeutung ist der auf die n = zwei-zählige (digonale) Achse sich beziehende Spezialfall. Er möge daher einzeln formuliert werden:

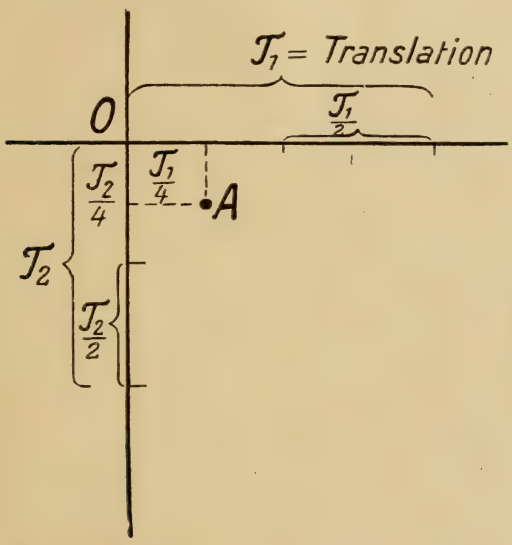


Fig. 28. A = Einstichpunkt einer digonalen Achse, wenn τ_1 und τ_2 digonalen Schraubenachsen parallel gehen.

7. Zwei rechtwinklig zueinander stehende (windschiefe oder sich schneidende) digonale Achsen bedingen eine auf beiden senkrecht stehende dritte digonale Achse, die vom Kreuzungspunkt um je den halben Schraubungskomponentenbetrag $\left(\frac{\tau}{4}\right)$ entfernt ist. (Im Diagonalendpunkt eines von dem halben Schraubungskomponenten gebildeten Rechteckes.) (Siehe Fig. 28.) Die dritte Achse selbst besitzt eine Schraubungskomponente, die gleich ist dem doppelten kürzesten Abstand zweier Achsen der ersten und zweiten Schar. Digonale Drehungsachsen stehen somit senkrecht zu zwei sich schneidenden digonalen Achsen-

scharen; digonale Schraubenachsen senkrecht zu zwei windschiefen Achsenscharen.

8. Drehspiegelachsen, die nicht durch Drehungsachse und Symmetrieebene darstellbar sind, gibt es nach den Erörterungen auf Seite 36 dreierlei Arten: die digonale Drehspiegelachse = Symmetriezentrum, die tetragonale Drehspiegelachse und die hexagonale Drehspiegelachse, immer mit den ihnen entsprechenden isomorphen Parallelscharen. Die tetragonale Drehspiegelachse ist gleichzeitig digonale, die hexagonale Drehspiegelachse ist gleichzeitig trigonale Drehungsachse.

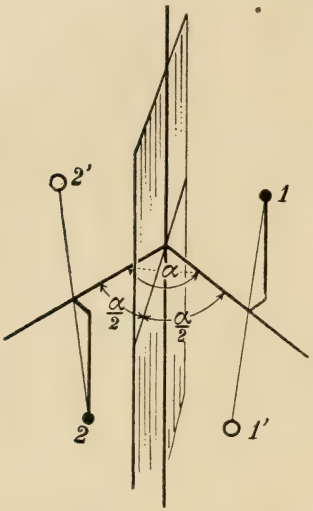


Fig. 29. Beziehung zwischen Drehspiegelachse, Symmetrieebene und Drehungsachse. 2 aus 1 hervorgehend durch Drehspiegelung an der vertikalen Drehspiegelachse $n = \frac{360}{\alpha}$, 1′ aus 1, 2′ aus 2, erzeugt durch die senkrecht darauf stehenden digonalen Achsen. Es stellt sich eine Symmetrieebene ein, die den Winkel α halbiert.

Nun gilt der ganz allgemeine Satz:

8a. Eine Drehspiegelachsenschar und senkrecht darauf stehende geradzählige Achsenscharen bedingen Symmetrieebenenscharen, welche die Winkel zwischen zwei geradzähligen, hinsichtlich der Drehspiegelachse gleichwertigen, Achsenscharen halbieren. Da es sich nur um Zähligkeiten der Achsen und Winkelgrößen handelt, genügt es, den Satz mit Drehungsachsen und Spiegelebenen zu beweisen. Konstruktiv ist der Beweis durch Fig. 29 gegeben. Eine geradzählige Achse erzeugt immer Punkte in 180° Verdrehung, diese stehen dann spiegelbildlich zu solchen, welche durch die Operation der Drehspiegelachse auseinander hervorgehen. Der Satz ist umkehrbar, irgend zwei der drei Ausgangselemente bedingen das dritte.

Wenn wir nun weiterhin die Symmetrieebenenscharen in allen möglichen Positionen den Achsenraumsystemen zufügen, so erhalten wir nach diesem Satz ohne weiteres der allgemeinen Richtung nach alle entstehenden Drehspiegelachsen (inklusive Symmetriezentren), wenn Achsen von verschiedener Richtung vorhanden sind (von denen die eine geradzählig ist). Nur die dreierlei „Klassen“ von Achsensystemen mit einer einzigen Drehspiegelachsenschar sind vorweg abzuleiten. Zu berücksichtigen ist natürlich, daß die Achsen von Raumsystemen mit Dreh-

spiegelachsen, abgesehen von der Zusatzsymmetrie der Drehspiegelung, wiederum hinsichtlich Zahl, Art und Winkel der Achsenscharen mit einem der vorgängig als allein möglich abgeleiteten reinen Achsenraumsystem übereinstimmen müssen.

9. Weitere Symmetrieelemente sind die den Symmetrieebenen isomorphen Parallelscharen von Symmetrieebenen.

Nun ergibt sich nach einem sofort zu erwähnenden speziellen Satz, daß durch die Kombination irgend zweier nichtparalleler Symmetrieebenen, bezw. zweier nicht paralleler Scharen von Symmetrieebenen, Achsen bezw. Achsenscharen sich einstellen. Die Winkel, welche Achsenscharen miteinander bilden dürfen, sind aber bereits durch die Achsenraumsysteme gegeben. Wir können daher alle Raumsysteme mit Symmetrieebenen und Achsen ableiten, indem wir zu den Achsenraumsystemen Scharen von Symmetrieebenen zufügen, die außer etwa zusätzlicher Veränderung polarer Achsen zu zweiseitigen, von Drehungsachsen zu Drehspiegelachsen und der Zusammengehörigkeit, die Achsenbeziehungen unverändert lassen. Deshalb dürfen die so zugefügten Symmetrieebenen nicht beliebige Winkel mit den vorhandenen Achsen einschließen; sie müssen zu ihnen parallel oder rechtwinklig verlaufen. Gleichwertige Achsen können außerdem durch Symmetrieebenen, die den Winkel der Achsen halbieren, ineinander übergeführt werden. Alle anderen Fälle würden immerfort neue Achsen und Symmetrieebenen erzeugen und infolgedessen keine endlichen Symmetriegruppen liefern. Symmetriezentren oder Symmetrieebenen können übrigens nur in Raumgruppen als zusätzliche Symmetrieelemente auftreten, die entweder Drehungsachsen oder Schraubenachsen von doppelt darstellbarem Windungssinn $\left(\text{Schraubungskomponente} = \frac{\tau}{2}\right)$ besitzen, oder in denen zu jeder Achse des einen Windungssinnes eine Achse des entgegengesetzten Windungssinnes gehört. (Weil Achsen von nur einerlei Windungssinn durch irgendeine Symmetrieebene in Achsen des entgegengesetzten Windungssinnes übergeführt werden.) Speziell gilt, daß Gleitspiegelebenen senkrecht zu einer Achsenschar nur dann verwendbar sind, wenn der Abstand zweier durch Gleitspiegelung ineinander überführbarer Achsen die Hälfte der primitiven Translation in der Gleitrichtung ist.

Als Nebensätze, die man mittels der Decktransformationsbedingungen sofort erhält, sind folgende zur speziellen Lagebestimmung und Feststellung der Schraubungsoperationen von Bedeutung:

10. Eine auf einer beliebigen Symmetrieebene (Spiegelebene oder Gleitspiegelebene) senkrecht stehende digonale Achse bedingt ein Symmetriezentrum, das vom Schnittpunkt um die Hälfte der Gleitungskomponente und die Hälfte der Schraubungskomponente entfernt ist. (Wie immer im Sinne der Diagonale des von den halben Verschiebungs-

komponenten gebildeten Rechteckes.) — Hexagonale und tetragonale Achsen sind in diesem Sinne als digonale Achsen aufzufassen, die Schraubungskomponente bezieht sich dann auf die zugehörige Zweizähligkeit.

11. Parallel der Schnittlinie zweier senkrecht aufeinander stehenden Symmetrieebenen liegt im beidseitigen Abstand der Hälfte der dazu senkrechten Gleitkomponenten eine digonale Achse mit einer Schraubungskomponente entsprechend der Differenz der zur Achse parallelen Gleitkomponenten (bezw. der Teilkomponenten in den ausgezeichneten Richtungen). Es ist dies ein Spezialfall eines allgemeineren Satzes, der für die Ableitung in der Form: „Parallel zur Schnittlinie zweier einen Winkel $\frac{\pi}{n}$ bildenden Symmetrieebenen liegt eine n-zählige Achsenschar mit Schraubungskomponenten der n-zähligen Achse gleich der Differenz der zur Achse parallelen Gleitkomponenten[1])", nötig ist. Der Satz ist wieder so aufzufassen, daß zwei Elemente das dritte bedingen. Eine Symmetrieebenenschar und eine ihr parallele digonale Achsenschar erzeugen also stets eine auf der ersten Symmetrieebenenschar senkrecht stehende zweite Symmetrieebenenschar. Eine n-zählige Achsenschar und eine ihr parallele Symmetrieebenenschar erzeugen im ganzen n-Symmetrieebenenscharen, die miteinander Winkel von $\frac{\pi}{n}$ bilden.

3. Schema der speziellen Ableitung aller möglichen Raumgruppen bezw. Raumsysteme

In diesem Abschnitt wird ein Weg angegeben, der gestattet, alle möglichen Raumsysteme abzuleiten. Beschreitet man ihn, so wird man die Gewißheit erlangen, daß es nicht mehr und nicht weniger als 230 hinsichtlich der Symmetrieverhältnisse prinzipiell verschiedene Raumsysteme gibt. Dabei soll auf die gegenseitigen Lagebeziehungen der Symmetrieelemente nur insofern Rücksicht genommen werden, als zur Skizzierung der Ableitung absolut notwendig ist. Einem eigenen Kapitel ist die eingehende Untersuchung dieser Verhältnisse reserviert (Kapitel III). Man wird Kapitel III hier schon stets zu Rate ziehen, wie ja die Ableitung gewissermaßen nur als Kommentar dazu gedacht ist.

Indem wir uns mit der Angabe der mit einem Symmetrieelement verknüpften Parallelscharen begnügen, wissen wir, daß sich nach den soeben mitgeteilten Sätzen die gegenseitigen Lagebeziehungen bis ins einzelne regeln.

Die Raumgruppen oder Raumsysteme erhalten die von A. Schoenflies vorgeschlagenen Bezeichnungen. Die hier angewandte Ableitung

[1]) bezw. Teilkomponenten = Projektionen der Gleitrichtung in Achsenrichtung.

deckt sich formal nicht immer mit derjenigen von Schoenflies. Die letztere ist auch weniger konsequent und benutzt mehrere Prinzipien. Diese formale Verschiedenheit bedingt, daß die Raumgruppen öfters in unserer Ableitung nicht in der durch Ziffern markierten Reihenfolge von Schoenflies auftreten. So wünschenswert auch eine ursprünglich mehr einheitliche und prinzipielle Indexnumerierung gewesen wäre, so unzweckmäßig und verwirrend würde es sein, wenn jetzt ein neuer Bezeichnungsmodus vorgeschlagen würde. Es ist daher davon Umgang genommen worden und es muß die hier unmotivierte Indexnummernbezeichnung wohl oder übel mit in Kauf genommen werden. Kleine Unterschiede in der Bezeichnungsweise sind rein technischer Natur. So werden die zwischen Zahl und Buchstaben des Index von Schoenflies angegebenen Kommas durchgängig als unwesentlich weggelassen.

Der Gang der Ableitung ist der folgende: Zunächst werden alle Raumgruppen bezw. Raumsysteme abgeleitet, die als Ausgangs-Symmetrieelement lediglich irgend eine der möglichen Achsen besitzen. Mit anderen Worten, es werden die einer Achse isomorphen Parallelscharen von Achsen aufgesucht. Dann werden die Raumsysteme mit Achsen verschiedener Richtung gebildet. Hierauf erfolgt die Ableitung der nur Symmetrieebenen oder nur Symmetriezentren besitzenden Raumsysteme. Und schließlich werden Symmetrieelemente der zweiten Art in zulässiger Weise mit Symmetrieelementen der ersten Art kombiniert, beziehungsweise Achsenraumsysteme mit Symmetrieebenenraumsystemen. Wir bezeichnen jetzt mit Achse kurzweg eine zweiseitige Achse und charakterisieren die einseitige Achse als polar.

I. Raumsysteme mit nur einzähligen (monogonalen) Achsen einer beliebigen Richtung

Die einzählige Achse ist lediglich Ausdruck für die Identität. Ein derartiges Raumsystem besitzt nur die im 1. Abschnitt dieses Kapitels näher erläuterten Identitätsbeziehungen. Die drei kürzesten nicht komplanaren Identitätsabstände können beliebige Winkel miteinander bilden. Sie stehen in beliebigen Längenverhältnissen zueinander.

Das Symbol $\mathfrak{C}_1$ kennzeichnet die Raumgruppe, beziehungsweise den Typus derartiger Raumsysteme. Abgesehen von auftretenden speziellen Winkeln der kürzesten Identitätsabstände und bestimmten Längenverhältnissen zugeordneter primitiver Strecke, finden sich die durch $\mathfrak{C}_1$ repräsentierten Identitätsbeziehungen in jedem Raumsystem eines homogenen Diskontinuums wieder. Man sagt, $\mathfrak{C}_1$ sei Untergruppe aller Raumgruppen. $\mathfrak{C}_1$ ist kurzweg das Symbol eines homogenen Diskontinuums, losgelöst von allen etwa noch vorhandenen eigentlichen Symmetriebeziehungen.

II. Raumsysteme mit einer Parallelschar polarer digonaler Achsen

Alle hierhergehörigen Raumgruppen besitzen das, die Zähligkeit der Achsen zum Ausdruck bringende, Symbol $\mathfrak{C}_2$. Die einzelnen Gruppen werden durch oben stehende Indexzahlen voneinander unterschieden.

Wir können uns zunächst bei der Ableitung auf Satz 3 des vorhergehenden Abschnittes stützen. Bei der Wichtigkeit der isomorphen Parallelscharen für die weiteren Untersuchungen ist es aber erwünscht, die speziellen Sätze 3a auf rein konstruktivem Wege zu beweisen.

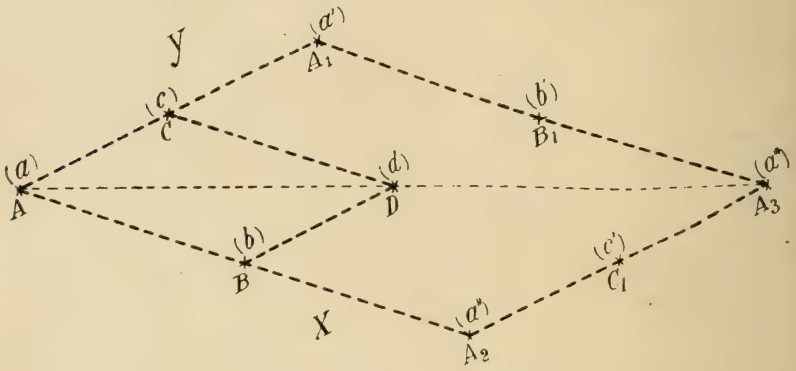


Fig. 30. Achsenparallelogramm digonaler Achsen (Einstichpunkte auf einer zu den Achsen senkrechten Ebene).

Es seien fürs erste alle Achsen der Parallelschar polare digonale Drehungsachsen. Durch den Punkt A (Fig. 30) gehe senkrecht zur Zeichenebene eine polare digonale Drehungsachse (a). Von den Abständen zwischen parallelen Drehungsachsen seien die zwei kürzesten herausgegriffen, die betreffenden, im übrigen beliebigen, Richtungen seien mit X und Y bezeichnet. Durch C auf Y gehe die nächste polare digonale Drehungsachse (c). Sie hat zur Folge, daß im Abstande $2\,AC = A\,A_1$ eine polare digonale Achse (a′) einsticht, die mit (a) identisch ist. Dies geht auch aus Fig. 31 hervor, in der die Achsenebene gezeichnet ist und ein mit Pfeil versehener (also asymmetrisch gedachter) Punkt der Drehungsoperation von (a) und (c) unterworfen wird. (a) führt 1 in 2 über; (c) 2 in 2′ und 1 in 1′. Man erkennt sofort, daß in bezug auf die durch A_1 gehende Parallele (a′) 2′ und 1′ die gleiche Lage haben wie 1 und 2 zu (a). Aus der gleichen Figur ist ersichtlich, daß (c) mit (a) und (a′) nicht identisch ist. Umgekehrt folgt aus dieser Figur, daß

mitten zwischen zwei identischen digonalen Drehungsachsen immer eine weitere nichtidentische Drehungsachse vorhanden ist. Denn denken wir uns 1, 2 und 2′, 1′ durch die Identität der Achsen (a) und (a′) gegeben, so besitzen sie wechselweise eine Lage zueinander, welche die Gerade (c) zur digonalen Drehungsachse stempelt. Die Anordnung der Achsen a und c setzt sich in der Richtung Y von selbst ins Unendliche fort. Auf X (Fig. 30) gehe die (a) nächste polare digonale Achse durch B. Sie bedingt durch A_2 ($A A_2 = 2AB$) eine mit (a) identische digonale Drehungsachse (a″). Der Satz von den Identitätsabständen ergibt nun ohne weiteres die durch C_1, B_1, A_3 gehenden Achsen (c′), (b′), (a‴). Da aber (a‴) mit (a) identisch ist, geht durch die Mitte von AA_2 notwendigerweise eine weitere polare digonale Drehungsachse (d).

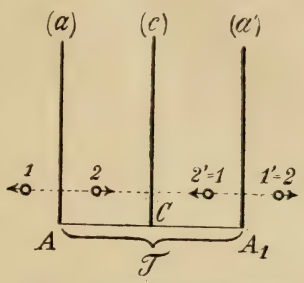


Fig. 31. Digonale Drehungsachsen (Achsenebene).

In der zu den Achsen senkrechten Ebene (Zeichnungsebene) umfaßt das Parallelogramm $A A_1 A_2 A_3$ die gesamte Nichtidentität. Es wird

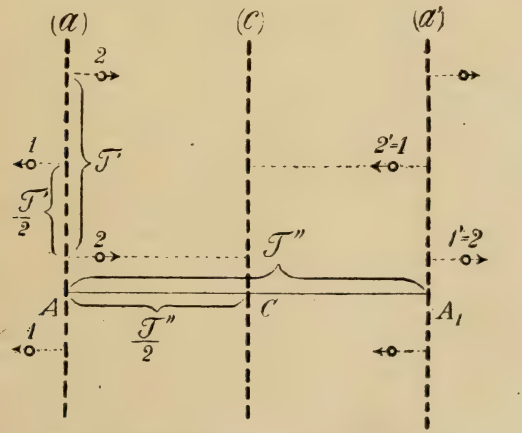


Fig. 32. Digonale Schraubenachsen (Achsenebene).

von den beiden kürzesten Identitätsabständen in der Ebene gebildet. Das senkrecht darauf errichtete Parallelepiped mit dem der Achsenrichtung zukommenden Identitätsabstand als Höhe (bezw. Höhenkante)

umfaßt gleicherweise die gesamte Raumidentität. Es sind ja, wie aus der Ableitung hervorgeht, nicht nur (a′) (a″) mit (a) identisch, sondern auch speziell die Punkte A_1, A_2 mit A, so daß sich senkrecht über den identischen Eckpunkten in gleicher Höhe die nächsten identischen Punkte befinden. Durch dieses Parallelepiped kann aber keine neue Drehungsachse gehen, da wir vorausgesetzt haben, AB und AC seien die kürzesten Abstände zwischen parallelen Achsen. Würden wir in irgend einem Punkt des Parallelogrammes $A A_1 A_2 A_3$ eine neue Drehungsachse errichten, so hätte sie mindestens von einer schon gezeichneten einen kürzeren Abstand, was der Voraussetzung widerspricht. Die 4 digonalen Drehungsachsen (a), (b), (c), (d) kennzeichnen somit durch ihre Identitätsscharen ein Raumsystem. Es ist $\mathfrak{C}_2^1$ 2

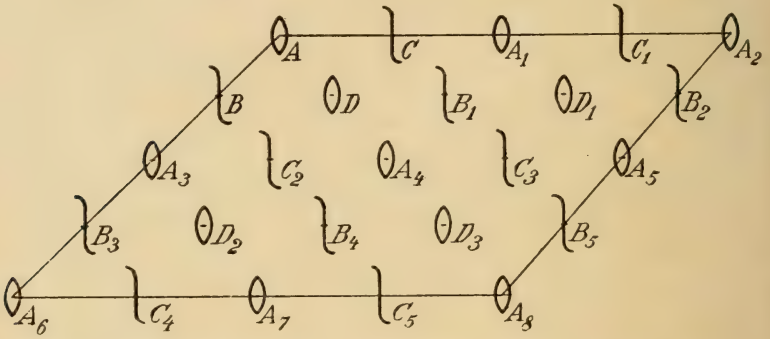


Fig. 33. Achsenparallelogramm digonaler Schraubenachsen und Drehungsachsen ($\mathfrak{C}_2^3$).

Die polaren digonalen Achsen können auch Schraubenachsen sein. AC und AB seien wieder die kürzesten Abstände der parallelen Achsen. Fig. 32 zeigt, daß dann durch A_1 eine mit (a) identische Schraubenachse geht. Die Ableitungen bleiben sich gleich mit dem Unterschied, daß alle Achsen Schraubenachsen sind. Die vier nichtidentischen Achsen lauten wiederum (a) (b) (c) (d) (Fig. 30). Die Punkte A_1 A_2 A_3 sind dem Punkt A identisch. Ein mit der Ganghöhe der Schraubenachsen als Vertikalkante auf dem Parallelogramm errichtetes Parallelepiped entspricht dem Nichtidentitätsraum.

Das Raumsystem heißt $\mathfrak{C}_2^2$ 3

Nun kann man weiterhin die Parallelscharen polarer digonaler Achsen aus Drehungsachsen und Schraubenachsen kombinieren. Die durch A gehende und senkrecht zur Zeichnungsebene stehende Achse (a) der Fig. 33 sei beispielsweise polare digonale Drehungsachse. In einem kürzesten Abstand AC liege der Durchstoßpunkt einer nächsten polaren digonalen

Schraubenachse. Dann geht durch A_1 ($A A_1 = 2 A C$) notwendigerweise eine mit (a) identische zweizählige polare Drehungsachse (a′). (Siehe Fig. 34, die der Fig. 32 ähnlich gezeichnet ist.) Aber schon jetzt sei bemerkt, daß A_1 nicht ein mit A identischer Punkt ist, sondern daß ein solcher sich erst in halber Schraubenganghöhe (halbe primitive Achsentranslation) über A_1 befindet. Die Ganghöhe von (c) ist selbstverständlich dem Identitätsabstand in der Achsenrichtung gleich. Die Achse (a′) erzeugt in (C′) durch C_1 eine zu (c) identische polare digonale Schraubenachse. Schließlich wird (a″) als Drehungsachse (a′) und (a) identisch und zwar so, daß der Punkt A_2 selbst dem Punkt A identisch ist. Geht durch B (Fig. 33) eine zweite nächste Schraubenachse, so geht durch A_3 eine

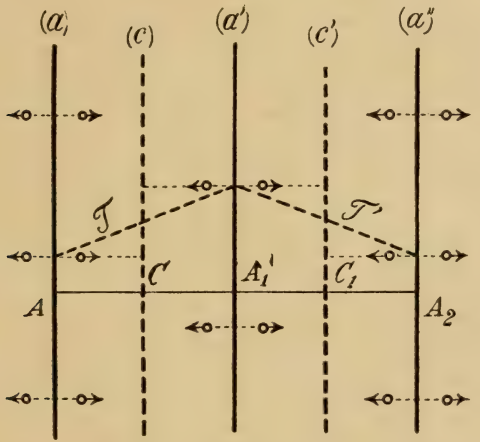


Fig. 34. Digonale Drehungsachsen und Schraubenachsen (Achsenebene).

mit (a) identische Drehungsachse; aber wiederum ist der Punkt A_6 auf der zur Achsenrichtung senkrechten Ebene mit A selbst identisch. Die Identitätsbeziehungen liefern ohne weiteres die neuen Achsen durch $A_4\ A_5\ A_7\ A_8\ \ldots.$, $C_2\ C_3\ C_4\ C_5\ \ldots.$, $B_1\ B_2\ B_3\ B_4\ B_5\ \ldots\ldots$ Mitten zwischen zwei identischen Drehungsachsen durch A und A_4 muß notwendigerweise, da A selbst A_4 gleich ist, eine neue polare digonale Drehungsachse liegen. Es ist dies die durch D gehende Achse (d). Ihr gehört ebenfalls eine ganze Identitätsschar an und die gezeichnete Anordnung setzt sich nach allen Richtungen ins Unendliche fort. Weitere digonale Achsen können voraussetzungsgemäß nicht vorhanden sein. Hätten wir angenommen, (c) sei wieder Drehungsachse, so würde (d) Schraubenachse geworden sein. Da die Richtungen an keine Bedingungen

geknüpft sind, entsteht keine prinzipiell neue Anordnung. Es gibt daher nur eine mögliche Kombination paralleler digonaler Schraubenachsen und Drehungsachsen. (Zwei Identitätsscharen bestehen aus Schraubenachsen, zwei aus Drehungsachsen.) Das entsprechende Raumsystem heißt $\mathfrak{C}_2^3$. Diesmal sind aber in der Normalebene zu den Achsen 4
weder AA_1 noch AA_3 primitive Translationen.

Die primitive Translation (τ oder τ' der Figur 34), welche zwei nächste, durch digonale Schraubenachsen voneinander getrennte, identische digonale Drehungsachsen miteinander verbindet, steht schief (**nicht** senkrecht) zur Achsenrichtung. Erst die übernächsten identischen Drehungsachsen oder Schraubenachsen liefern mit ihren Fußpunkten auf der Normalebene primitive Translationen. Form der Translationsgruppe und Kombination von Drehungsachsen und Schraubenachsen stehen in kausalem Zusammenhang; sie bedingen sich gegenseitig.

Außer den drei abgeleiteten Raumsystemen sind keine denkbar, die nur aus Parallelscharen polarer digonaler Achsen gebildet werden. Der Vergleich aller drei zeigt, daß auf einer zu den Achsen normalen Ebene die Durchstoßpunkte zweier nächster oder übernächster identischer Achsen sich identisch sind. Das Parallelepiped mit diesen identischen Punkten als Ecken einer Grundfläche und dem Identitätsabstand in der Achsenrichtung als Höhe ist daher entweder primitiv oder doppelt- bezw. vierfachprimitiv. Es besitzt die äußere Form einer sogenannten rhomboidischen Säule.

III. Raumsysteme mit einer Parallelschar polarer trigonaler Achsen

(1.) Alle Achsen seien Drehungsachsen. A (Fig. 35) stelle den Durchstoßpunkt einer polaren trigonalen Drehungsachse (a) auf einer zu ihr senkrechten Ebene dar. Die parallelen trigonalen Drehungsachsen müssen Abstände voneinander besitzen, die nicht unter einen endlichen Wert sinken können. In der kleinstmöglichen Entfernung von A steche die parallele trigonale Drehungsachse (b) ein, deren Durchstoßpunkt durch B (Fig. 35) gegeben ist. Dann müssen durch A_1 und A_2 mit (a) identische polare trigonale Drehungsachsen gehen. Die Punkte A_1 und A_2 sind A selbst identisch, die primitiven Translationen AA_1, AA_2, A_2A_1 sind einander gleich. Auf diesen Strecken oder im Innern des gleichseitigen Dreieckes liegen keine weiteren identischen Punkte oder Achsen, weil sonst ein Abstand sicherlich kürzer als AB wäre, was der Voraussetzung widerspricht.

Der primitiven Translation A_1A_2 parallel verläuft AA_3. Durch A_3 geht also ebenfalls eine (a) parallele, identische Achse. A_3 selbst ist A ident. Nun sind aber AA_2A_3 Ecken eines gleichseitigen Dreieckes.

Im Schwerpunkt dieses Dreieckes (C) stößt daher eine dritte polare trigonale Achse (c) durch. Sie genügt der Voraussetzung, da $BC = AC = AB = A_2C = A_3C$, aber keine Entfernung kleiner als AB, ist. Anderszählige Achsen oder weitere polare trigonale Achsen können nicht auftreten. Das gezeichnete Achsenparallelogramm wiederholt sich nach allen Richtungen in paralleler Stellung. Die dadurch bestimmte Raumgruppe heißt $\mathfrak{C}_3^1$. Die einfachste Form eines Nichtidentitätsraumes als Parallelepiped ist durch die zwei in AA_2 zusammenstoßenden trigonalen gleichseitigen Säulen gegeben. 5

(2.) Alle trigonalen Achsen sollen polare Schraubenachsen von gleichem Windungssinn sein. Durch A und B der Fig. 35 gehen wieder die zwei nächstgelegenen Achsen. Die Ableitung zeigt, daß in A_1, A_2, A_3 mit der durch A gehenden Achse identische Schraubenachsen einstechen, und daß A_1, A_2, A_3 selbst mit Punkt A ident sind. Ferner steht in C auf der Zeichenebene eine trigonale Schraubenachse von gleichem Windungssinn senkrecht. Die Translationsgruppe besitzt gleichen Charakter wie in $\mathfrak{C}_3^1$. Je nach dem Windungssinn der Schraubenachsen unterscheidet man die Raumgruppen $\mathfrak{C}_3^2$ und $\mathfrak{C}_3^3$. 6 7

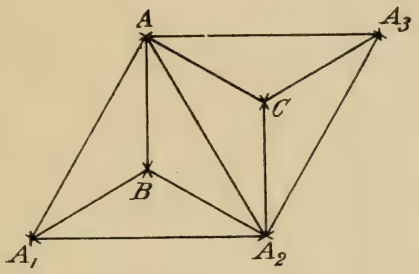


Fig. 35. Achsennetz trigonaler Achsen (auf einer zu den Achsen senkrechten Ebene).

(3.) (a) durch A sei eine polare trigonale Drehungsachse, (b) durch B eine polare trigonale Schraubenachse. Die gleiche Konstruktion wie früher ergibt in diesem Falle, daß (c) durch C eine trigonale Schraubenachse von (b) entgegengesetztem Windungssinn ist. Denselben Fall erhält man ausgehend von zwei nächsten polaren Schraubenachsen von verschiedenem Windungssinn, die neu entstehende Achse wird dann Drehungsachse. Die Raumgruppe wird mit $\mathfrak{C}_3^4$ bezeichnet. Auf 8 den durch A_1 und A_3 gehenden Drehungsachsen liegt nun erst in $\frac{1}{3}$-Höhe der Achsentranslation ein mit A identischer Punkt, auf A_2 in $\frac{2}{3}$- bezw. $\frac{1}{3}$-Höhe. Das einfachste primitive Parallelepiped wird zu einem Rhomboeder.

Immer, wenn zwei nächstgelegene identische trigonale Achsen nicht durch eine auf ihnen senkrecht stehende primitive Translation miteinander verbunden werden können, stellt sich die Raumgruppe $\mathfrak{C}_3^4$ ein.

Damit sind die Kombinationsmöglichkeiten polarer, trigonaler paralleler Achsen erschöpft.

IV. Raumsysteme, die einer polaren tetragonalen Achse isomorphe Parallelscharen von Achsen enthalten

(1.) Auf A und B (Fig. 36) stehen zwei nächstgelegene, polare, tetragonale Drehungsachsen senkrecht. Die Drehung um die Achse (b) hat zur Folge, daß $A_1 A_2 A_3$ die Durchstoßpunkte von zu (a) identischen Drehungsachsen sind. $AA_1 = AA_3 = A_3A_2 = A_2A_1 =$ Seiten eines Quadrates. Die Punkte $A_1 A_2 A_3$ sind dem Punkte A selbst ident. Da alle identischen polaren tetragonalen Drehungsachsen zugleich identische polare digonale Drehungsachsen darstellen, folgt aus den Erörterungen von Seite 61, daß durch C und D digonale Drehungsachsen gehen. Weitere Achsen sind nicht vorhanden, die Anordnung setzt sich in paralleler Folge ins Unendliche fort. Die Raumgruppe heißt $\mathfrak{C}_4^1$. 9

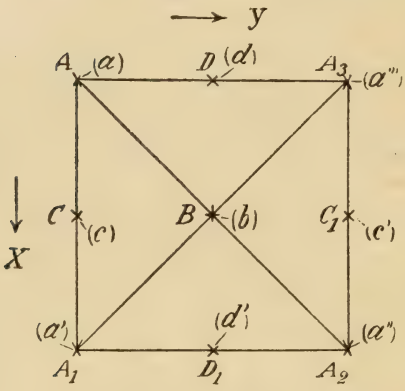


Fig. 36. Achsennetz tetragonaler Achsen.

(2.) Die tetragonalen Achsen sind immer auch digonale Achsen, so daß irgendeine, einer tetragonalen Achse isomorphe Parallelschar in digonaler Hinsicht eine der Gruppen $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^3$ repräsentieren muß. Es sind somit als digonale Achsen alle Achsen Drehungsachsen oder Schraubenachsen, oder zwei sind Drehungsachsen, zwei Schraubenachsen. Die nur digonalen Achsen (c) und (d) sind, gemäß ihrer Lage zu den tetragonalen, einander gleichwertig, sie müssen also die gleichen Deckoperationen besitzen. Daraus folgt, daß auch die tetragonalen Achsen als digonale Achsen entweder beide Drehungsachsen oder beide Schraubenachsen sein müssen. Der erstere Fall ist zunächst noch verwirklicht, wenn (a) und (b) als polare tetragonale Achsen Schraubenachsen, als polare digonale Achsen Drehungsachsen sind $\left(\text{Schraubungskomponente} = \frac{\tau}{2}\right)$. Dann treten auch (c) und (d) als digonale Drehungsachsen auf. Die Raumgruppe heißt $\mathfrak{C}_4^3$. Das Quadrat $AA_1A_2A_3$ ist wiederum ein primitives Translationsparallelogramm. 10

(3.) Sind (a) und (b) als nächstgelegene polare tetragonale Schraubenachsen von gleichem Windungsinn und sind sie gleichzeitig digonale Schraubenachsen, so gehen, wie sich konstruktiv sofort ableiten läßt, durch C und D digonale Schraubenachsen. Die Punkte $A\,A_1\,A_2\,A_3$ sind einander wiederum identisch. Je nach dem Windungssinn der polaren tetragonalen Achsen werden die Raumgruppen mit $\mathfrak{C}_4^2$ oder 11 12
$\mathfrak{C}_4^4$ bezeichnet.

Die auf $A\,A_1\,A_2\,A_3$ errichtete quadratische Säule, mit der Periode in der Achsenrichtung als Höhe, ist in allen vier bis jetzt besprochenen Fällen einfach-primitives Parallelepiped.

(4.) Die beiden nächstgelegenen einfachen polaren tetragonalen Schraubenachsen sollen von entgegengesetztem Windungssinn sein. Dann sind die Punkte A_1, A_3 mit A nichtidentisch, wohl aber ist das A_2. Identische Punkte mit A finden sich auf (a′) und (a‴) in $\frac{1}{2}$ Höhe des Identitätsabstandes in der Richtung der Achsen. Ferner sind auf x und y die Fußpunkte der übernächsten identischen tetragonalen Achsen mit A ident. Die digonale Untergruppe ist somit $\mathfrak{C}_2^3$, woraus folgt, daß durch C und D polare digonale Drehungsachsen gehen müssen. 13
(a und b sind auch als digonale Achsen Schraubenachsen.)

Die Raumgruppe heißt $\mathfrak{C}_4^6$. Eine quadratische Säule, deren Eckpunkte alle einander identisch sind, ist je nach Konstruktion mindestens zwei- oder vierfach primitiv.

(5.) Schließlich bleibt als einziger Fall zur Diskussion: (a) = polare tetragonale Drehungsachse, (b) = polare tetragonale Schraubenachse $\left(\text{mit einer Schraubungskomponente } \frac{\tau}{2}\right)$ und zugleich polare digonale Drehungsachse. Dann müssen (c) und (d), weil sich eine $\mathfrak{C}_4^6$ gleiche Translationsgruppe ergibt, digonale Schraubenachsen sein. Die 14
Raumgruppe heißt $\mathfrak{C}_4^5$.

In keinem der besprochenen möglichen Fälle wären weitere polare tetragonale oder digonale Identitätsscharen von Achsen denkbar, wenn (a) und (b) die nächstgelegenen tetragonalen Achsen sind. Die digonalen Achsen stellen sich immer von selbst ein. Somit sind die Sätze 3c des vorhergehenden Abschnittes (Seite 44) auf konstruktivem Wege bewiesen worden.

V. Raumsysteme mit Parallelachsenscharen, die einer polaren hexagonalen Achse isomorph sind

(1.) (a) und (b) seien zwei nächstgelegene polare hexagonale Achsen; A und B ihre Durchstoßpunkte auf einer senkrecht dazu stehenden Ebene (Fig. 37). Dann sind infolge der Sechszähligkeit von (a) die Achsen (b′), (b″) mit (b) ident. Sie sind aber auch identisch mit (a), da durch Drehung oder Schraubung um (b′) die Achse (a) in (b) übergeht. Alle

Achsenabstände sind einander gleich und bilden Winkel von 60^0 miteinander. Andere nichtidentische hexagonale Achsen kann es nicht geben, weil sie sonst Abstände, die kürzer als AB sind, haben müßten, was der Voraussetzung widerspricht. Es gibt daher immer nur einerlei identische polare hexagonale Achsen. Darauf wollen wir Rücksicht nehmen, indem wir die gegebenen nächstgelegenen hexagonalen Achsen von Anbeginn an mit (a) (a′) (a″) (a‴) bezeichnen. (Siehe Fig. 38.)

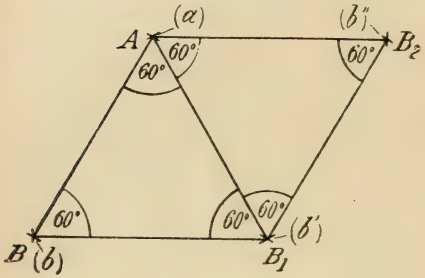


Fig. 37. Es gibt nur eine Identitätsschar von hexagonalen Achsen.

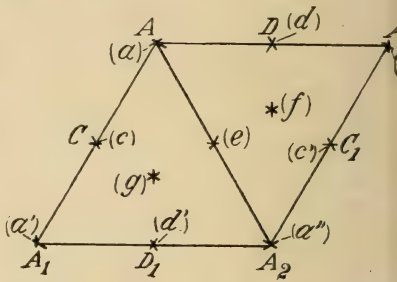


Fig. 38. Achsennetz hexagonaler Achsen.

Zunächst seien sie polare hexagonale Drehungsachsen. Nun sind alle hexagonalen Achsen zugleich digonale und trigonale Achsen. $AA_1A_2A_3$ ist ein primitives Parallelogramm. Nach den früher erörterten Sätzen müssen daher darin noch zwei nichtidentische trigonale und drei nichtidentische digonale Achsen durchstechen. Ihre Lage ist gegeben durch (f), (g) einerseits, (c) (d) (e) anderseits. Da die Punkte A_1 A_2 A_3 mit A ident sind, müssen alle diese Achsen von gleichem Charakter sein wie die polare hexagonale Achse in trigonaler bezw. digonaler Hinsicht. Hier wären also alle Achsen Drehungsachsen. Die Raumgruppe heißt $\mathfrak{C}_6^1$. 15

(2.) Die polaren hexagonalen Achsen seien alle entweder Schraubenachsen mit der Schraubungskomponente $\frac{\tau_z}{6}$, oder dann mit der Schraubungskomponente $\frac{5\tau_z}{6}$ (auf gleichen Windungssinn bezogen). Da (c) (d) (e) sich gleichwertig sind, sind sie, wie (a) als digonale Achse, digonale Schraubenachsen. (f) und (g) sind aus ähnlichem Grunde trigonale Schraubenachsen von gleichem Windungssinn wie (a). Nach dem Windungssinn unterscheidet man die Raumgruppen $\mathfrak{C}_6^2$ und $\mathfrak{C}_6^3$. 16 17

(3.) Als polare hexagonale Achsen sollen (a), (a′) . . . . . Schraubenachsen, als digonale Achsen aber Drehungsachsen sein (Schraubungs-

komponente je nach Windungssinn $\frac{2\tau_z}{6}$ oder $\frac{4\tau_z}{6}$). Alle digonalen Achsen sind infolgedessen Drehungsachsen, alle trigonalen Achsen Schraubenachsen gleicher Art wie (a). Nach dem Windungssinn werden die Raumgruppen $\mathfrak{C}_6^4$ und $\mathfrak{C}_6^5$ voneinander getrennt. 18 19

(4.) Die polaren hexagonalen Achsen seien in digonaler Hinsicht Schraubenachsen, in trigonaler aber Drehungsachsen (Schraubungskomponente $\frac{3\tau_z}{6}$). Dann sind alle rein digonalen Achsen (c) (d) (e) Schraubenachsen, die trigonalen Achsen (f) und (g) aber Drehungsachsen. Die Raumgruppe heißt $\mathfrak{C}_6^6$. Weitere Möglichkeiten sind nicht 20 vorhanden. In jedem Fall ist das einfachste primitive Parallelepiped durch die über dem Parallelogramm $A\,A_1\,A_2\,A_3$ errichtete vertikale Säule gegeben. Sie besteht aus zwei gleichseitigen Prismen. Die Höhe ist dem Identitätsabstand in der Achsenrichtung gleich.

VI. Raumsysteme, deren Achsenparallelschar einer tetragonalen Drehspiegelachse isomorph ist

Die tetragonalen Drehspiegelachsen müssen nach Satz 8, Seite 56 zugleich digonale Drehungsachsen sein; als solche können sie daher nur eine Schar $\mathfrak{C}_2^1$ oder $\mathfrak{C}_2^3$ bilden. Das ergibt die Gruppen 21 22 $\mathfrak{S}_4^1$ beziehungsweise $\mathfrak{S}_4^2$ mit analogem Unterschied der Translationsgruppen, wie er zwischen $\mathfrak{C}_2^1$ und $\mathfrak{C}_2^3$ vorhanden ist; doch sind die in Betracht zu ziehenden Parallelepipede tetragonale Säulen.

VII. Raumsysteme, deren Achsenparallelschar einer hexagonalen Drehspiegelachse isomorph ist

Die hexagonale Drehspiegelachse muß nach Satz 8, Seite 56 zugleich trigonale Drehungsachse sein. Es können nur $\mathfrak{C}_3^1$ und $\mathfrak{C}_3^4$ als gleichzeitig vorhandene trigonale Untergruppen in Frage kommen. Ihnen entsprechen die Gruppen

$$\mathfrak{S}_6^1 = \mathfrak{C}_{3i}^1 \quad \text{bezw.} \quad \mathfrak{S}_6^2 = \mathfrak{C}_{3i}^2$$ 23 24

Gleichzeitig sind Symmetriezentren aufgetreten. Über ihre Lage siehe den darstellenden Teil dieses Buches.

Damit wären alle möglichen Raumsysteme abgeleitet, die nur je eine isomorph zusammengehörige Parallelschar von polaren Achsen oder Drehspiegelachsen besitzen. Wenn wir nun die möglichen verschiedenartigen Raumsysteme mit Achsenscharen verschiedener Richtung aufsuchen wollen, so kann es sich hier nur darum handeln, den Weg der Ableitung zu skizzieren. Einige allgemein gültige Bemerkungen seien vorausgeschickt. Beachtet man sie, so wird es im Verein mit den im einzelnen sich vorfindenden Hinweisen stets möglich sein, die Gesamt-

verteilung der Symmetrieelemente eines Raumsystemes zu bestimmen und darzutun, daß außer den angegebenen Systemen keine weiteren möglich sind.

Eine neu hinzugefügte Achsenschar muß das System der Verteilung der Achsen einer schon vorhandenen isomorphen Schar unverändert lassen, sonst würden ja den gegebenen Achsen parallele neue Achsen gebildet werden, bis schließlich unendlich vielerlei nichtidentische parallele Achsen entstanden wären, was mit der Struktur eines homogenen Diskontinuums im Widerspruch steht.

Die Achsen der neuen Richtung müssen daher gleichartige Achsen der alten Richtung ineinander überführen, so daß parallel einer Richtung immer nur je eine der bereits besprochenen isomorphen Parallelscharen vorhanden ist. Die neuen Achsen müssen Achsenebenen parallel verlaufen, die eine derartige Überführung gestatten; sie können gegenüber den Netzen der anderen Achsen nicht beliebige Richtung besitzen. Die isomorphen Parallelscharen bezeichnen wir als Untergruppen der Raumsysteme, und das Problem reduziert sich darauf, derartige isomorphe Parallelscharen miteinander zu kombinieren.

Durch die Sätze 5 auf Seite 47 bis 54 ist bereits bestimmt, welche Winkel die Achsenparallelscharen miteinander bilden können, und in welchen Richtungen durch die Kombination zweier von ihnen neue Achsenscharen entstehen. Fassen wir, gestützt auf jene Sätze, die Raumsysteme zusammen, die in der Zähligkeit und Richtung der möglichen Achsenscharen übereinstimmen, so gilt es nur noch die verschiedenartigen Kombinationen aufzusuchen, wenn gemäß den bereits erläuterten Beziehungen sich die Art der Untergruppen ändert. Wir müssen für irgend eine Parallelschar, die einer n-zähligen Achse isomorph ist, alle verschiedenartigen bereits abgeleiteten Achsenscharen einsetzen, soweit dies mit der Form der Translationsgruppe verträglich ist. Weiterhin ist festzustellen, ob einige der so abgeleiteten Raumsysteme nicht übereinstimmen, indem neu entstehende, bedingte Achsenscharen die Rolle der Ausgangsachsenscharen übernehmen. Kreuzung der Achsen kann jeweilen nur in bestimmten Bruchteilen des Identitätsabstandes erfolgen, wie die Sätze 6, 7 auf Seite 54 zeigen. Die Identitätsabstände sind aber bereits durch eine Achsenschar festgelegt.

VIII. Raumsysteme, die drei aufeinander senkrecht stehende Scharen digonaler Achsen besitzen

Sobald wir zwei nichtparallele digonale Achsenscharen miteinander kombinieren entsteht mindestens eine dritte Achsenschar. Soll es nur eine sein, so müssen nach Satz 7 die gegebenen Achsenscharen senkrecht aufeinander stehen. Satz 7 Seite 55 bestimmt auch den Charakter der entstehenden Achsenschar, die gleichfalls digonal ist und auf den beiden

ersten senkrecht steht. Die Achsennetze, welche bei einer einzigen digonalen Achsenschar beliebige Parallelogramme sein können, werden jetzt in allen drei Richtungen zu Rechtecken, denn nur dann können die Achsen den Achsenebenen der anderen Scharen parallel gehen, beziehungsweise die Achsen der anderen Scharen ineinander überführen.

Die Achsenscharen $\mathfrak{C}_2^1$ und $\mathfrak{C}_2^2$ bestehen jeweilen aus lauter gleichartigen Achsen. Keine Achsenebene einer derartigen Schar ist vor einer anderen ausgezeichnet; es handelt sich daher lediglich darum, die verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten von $\mathfrak{C}_2^1$ und $\mathfrak{C}_2^2$ algebraisch aufzusuchen. Die beiden zur Ableitung benutzten Achsenscharen können sich schneiden oder bloß kreuzen.

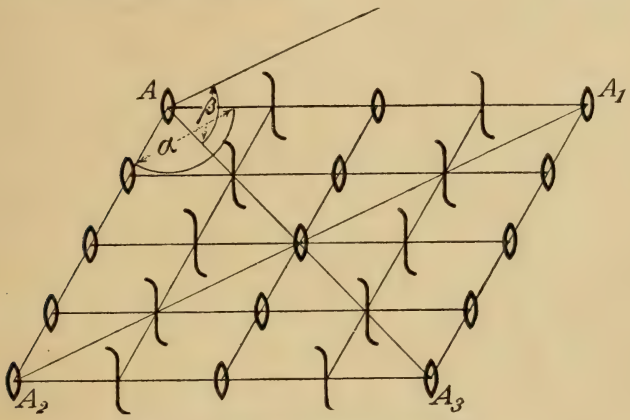


Fig. 39. Achsennetz digonaler Achsen ($\mathfrak{C}_2^3$).

Folgende Kombinationsmöglichkeiten lassen sich erkennen:

(1.) Zwei sich schneidende digonale Achsenscharen $\mathfrak{C}_2^1$ erzeugen eine dritte Achsenschar $\mathfrak{C}_2^1$. Die Kombination $(\mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^1)$ wird $\mathfrak{B}^1$ genannt. 25

(2.) Zwei sich kreuzende digonale Achsenscharen $\mathfrak{C}_2^1$ erzeugen eine dritte Achsenschar $\mathfrak{C}_2^2$. Die Kombination $(\mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^2)$ wird $\mathfrak{B}^2$ genannt. 26

(3.) Ist die Kombination $\mathfrak{C}_2^1\ \mathfrak{C}_2^2$ in der Form sich schneidender Achsenscharen gegeben, so entsteht wieder $\mathfrak{C}_2^1$, also die Raumgruppe $\mathfrak{B}^2$. Kreuzen sich aber $\mathfrak{C}_2^1$ und $\mathfrak{C}_2^2$, so ist die entstehende digonale Achsenschar vom Charakter $\mathfrak{C}_2^2$. $(\mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_2^2)$ bildet die Raumgruppe $\mathfrak{B}^3$. 27

(4.) Es seien schließlich zwei senkrecht aufeinander stehende digonale Achsenscharen $\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^2$ gegeben. Schneiden sie sich, so entsteht

$\mathfrak{C}_2^1$ also $\mathfrak{V}^3$, kreuzen sie sich bloß, so ensteht neu $\mathfrak{C}_2^2$. 28
Die Kombination ($\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^2$) wird $\mathfrak{V}^4$ genannt.

Das sind alle möglichen verschiedenartigen Kombinationen zweier digonaler Achsenscharen $\mathfrak{C}_2^1$ und $\mathfrak{C}_2^2$. In allen vier Fällen bilden die Identitätsabstände in Richtung der drei Achsen ein primitives Tripel.

Ist eine Gruppe $\mathfrak{C}_2^3$ gegeben, so lassen sich in bezug auf Aufeinanderfolge von Drehungsachsen und Schraubenachsen verschiedene Richtungen und Achsenebenen unterscheiden, denen neue digonale Achsenscharen parallel gehen können, derart daß durch die neuen Achsen gleichartige Achsen ineinander übergeführt werden. Um die Übersicht zu erleichtern sind in den Figuren 39 und 40 zwei Achsenparallelogramme

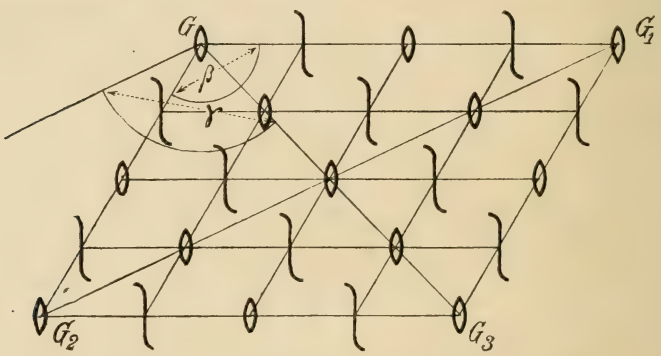


Fig. 40. Achsennetz digonaler Achsen ($\mathfrak{C}_2^3$).

gezeichnet, die sich für $\mathfrak{C}_2^3$ allein prinzipiell nicht voneinander unterscheiden. Jetzt aber können α oder β oder γ rechte Winkel sein und die Achsenrichtungen der neuen Scharen angeben. (Die β-Winkel der beiden Figuren sind Winkel zwischen übereinstimmenden Richtungen.)

Ist eine digonale Achsenschar eine Gruppe $\mathfrak{C}_2^3$, so ist infolge der auf Seite 64 dargelegten Abhängigkeit von der Translationsgruppe mindestens noch eine zweite Schar $\mathfrak{C}_2^3$. Die resultierenden Achsenkombinationen lassen sich natürlich auch direkt ableiten, in zwei Beispielen soll so vorgegangen werden.

(5.) Winkel $\alpha = 90^0$. Gegeben die so definierte Schar $\mathfrak{C}_2^3$. Es genügt, die Drehungsachsen 1, 3, 6, 4, die Schraubenachsen 2, 5 (Fig. 41) in Betracht zu ziehen. Eine weitere digonale Drehungsachse liege in AA_1 der Fig. 39 (Achse 7 von Fig. 41). Sie schneidet also sowohl Schraubenachsen (gestrichelt) wie Drehungsachsen (voll ausgezogen) der

ersten Schar. Die Schnittpunkte liefern nach Satz 7 von Seite 55 neue Achsen und sukzessive läßt sich so die ganze Achsenverteilung aufbauen. Der Schnittpunkt 7 und 3 (Fig. 41) bedingt die Drehungsachse 8, ebenso bedingen 7 und 1 die Drehungsachse 10. Durch 4 und 8, ferner 10 und 6 ist die Drehungsachse 9 gegeben. 9 und 5, beziehungsweise 7 und 2, bestimmen 11 als Drehungsachse. 11 und 4 ergeben die Schraubenachse 12; auch 13 läßt sich leicht als Schraubenachse auffinden. 5 und 11 bestimmen weiterhin die Drehungsachse 14. Dadurch sind 15, 16, 17 ebenfalls als Drehungsachsen gegeben. Die resultierende Kombination ist daher $(\mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^1) = \mathfrak{B}^6$. Hätten wir durch AA_1 eine Schraubenachse gelegt, so ist leicht ersichtlich, daß wir zur gleichen Anordnung gekommen wären. Statt mit 7 hätten wir lediglich mit 13 begonnen. 29

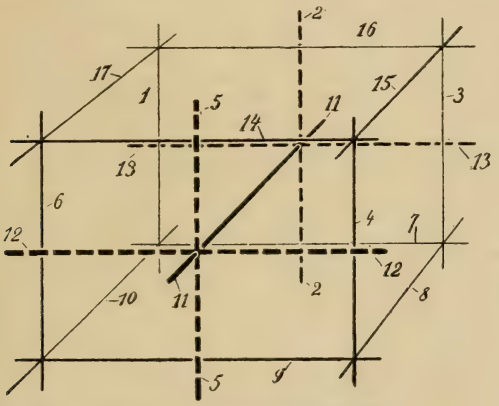


Fig. 41. Achsenableitung für $\mathfrak{B}^6$.

(6.) Gegeben $\mathfrak{C}_2^3$ mit $\alpha = 90^0$ wie vorhin (Fig. 39). Die neue Achse parallel AA_1 legen wir als Drehungsachse oder Schraubenachse mitten[1]) zwischen die Achsen von $\mathfrak{C}_2^3$ (windschiefe Lage). Es resultiert die Kombination $(\mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^2)$ als $\mathfrak{B}^5$. 30

(7.) Gegeben sei $\mathfrak{C}_2^3$ mit Winkel $\beta = 90^0$ (Fig. 40). Eine neue digonale Achse wird in Richtung $G - G_1$ gelegt, so daß sie Drehungsachsen und Schraubenachsen der ersten Schar schneidet. Es entsteht die Kombination $(\mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3)$ in der Anordnung $\mathfrak{B}^7$. Nicht nur Drehungsachsen, sondern auch Schraubenachsen schneiden die Achse der ersten

[1]) Wir müssen sie in die Mitte zweier Achsenebenen legen, weil nach Satz 7 durch den Abstand zweier windschief zueinander stehender, digonaler Achsen ein Viertel des Identitätsabstandes in dieser Richtung bestimmt ist.

Schar. Achsenebenen folgen sich im Abstande $\frac{1}{4}$ der Achsentranslation, so daß Kreuzung (nach Satz 7 Seite 55 bestimmen die Entfernungen sich kreuzender Achsen den vierten Teil des Identitätsabstandes) zum gleichen Resultat führt. 31

(8.) Gegeben sei $\mathfrak{C}_2{}^3$ mit Winkel $\gamma = 90^0$. Wir legen in $G - G_3$ eine Drehungsachse, so also, daß von ihr nur Drehungsachsen der ersten Schar geschnitten werden. Gegeben sind die Achsen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 der Figur 42. Achse 6 erzeugt mit 4 und 1 die Drehungsachsen 7 und 9; 7 und 9 geben mit 3 und 2 die Drehungsachse 8. Durch 6 und 5 ist die Schraubenachse 10 bestimmt. 5 und 10 bedingen 11, 13, somit auch 12 und 14 als Drehungsachsen. 5 und 7 oder 5 und 9 oder 5 und 14, beziehungsweise 5 und 12, sind die Ursache, daß 15 Schraubenachse ist.

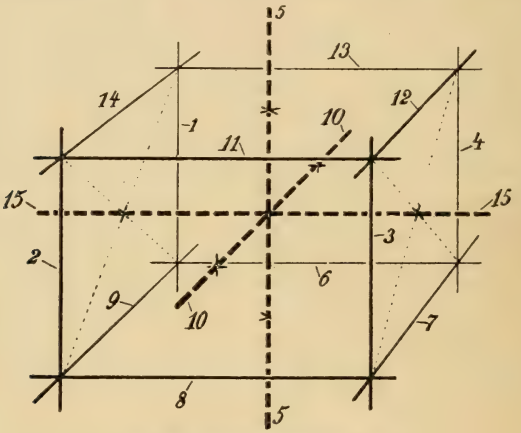


Fig. 42. Achsenableitung für $\mathfrak{B}^8$.

Die resultierende Raumgruppe wird als ($\mathfrak{C}_2{}^3$, $\mathfrak{C}_2{}^3$, $\mathfrak{C}_2{}^3$) in Anordnung $\mathfrak{B}^8$ oder kurz als $\mathfrak{B}^8$ bezeichnet. Wir hätten auch die zu den gegebenen Drehungsachsen windschief liegende Schraubenachse 15 als Ausgangsachse benutzen können. 32

(9.) Hingegen entsteht eine neue Anordnung, wenn die Drehungsachsen des gegebenen $\mathfrak{C}_2{}^3$ mit $\gamma = 90^0$ nur von Schraubenachsen geschnitten werden. Es ist das die später eingehend beschriebene Raumgruppe $\mathfrak{B}^9$, die ebenfalls $\mathfrak{C}_2{}^3$, $\mathfrak{C}_2{}^3$, $\mathfrak{C}_2{}^3$ als Untergruppen enthält. Sie entsteht auch bei windschiefer Lage der zu $G\,G_3$ parallelen Drehungsachsen hinsichtlich der Drehungsachsen des gegebenen $\mathfrak{C}_2{}^3$. 33

Damit sind die möglichen verschiedenartigen Kombinationen dreier verschiedenartiger digonaler Achsenscharen erschöpft.

IX. Raumsysteme mit einer trigonalen und drei polaren, senkrecht dazu stehenden digonalen Achsenscharen

Aus Satz 6 Seite 54 geht hervor, daß eine einzige polare digonale Achsenschar senkrecht zu einer trigonalen Achsenschar zwei neue gleichwertige, polare digonale Achsenscharen in Winkeln von 120° zur Folge hat. Zwei polare digonale Achsenscharen im Winkel von 120° genügen daher ebenfalls zur eindeutigen Ableitung der möglichen Raumsysteme.

Durch die der trigonalen Achse isomorphe Parallelschar ist das Netz der Identitätsabstände auf den dazu senkrechten Ebenen gegeben. Die hinzukommenden digonalen Achsen können nur Richtungen besitzen, die identische Punkte und gleichartige trigonale Achsen ineinander überführen. Sie müssen also entweder durch zwei nichtidentische trigonale Achsen hindurchgehen, oder zwei nichtidentische aber gleichartige Achsen ineinander überführen (Richtungen d oder s von Fig. 43 für Drehungsachsen). In beiden Fällen werden erst zwei übernächste identische Achsen einer Horizontalebene mittels senkrecht dazustehender primitiver Translationen verbunden. Die digonalen Achsenscharen sind daher nach Seite 64 immer Gruppen $\mathfrak{C}_2^3$.

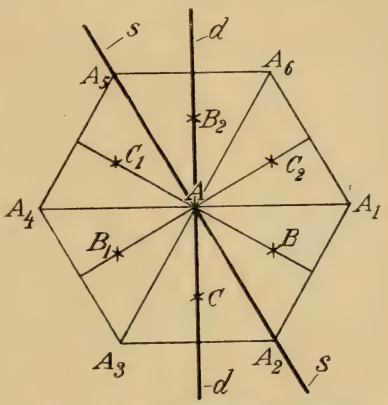


Fig. 43. Richtungen digonaler Achsen in $\mathfrak{D}_3$.

Die trigonale Achsenschar kann eine der vier Seite 65 abgeleiteten Gruppen sein. Ist sie die Gruppe $\mathfrak{C}_3^4$, so kann die Richtung s nicht digonale Drehungsachsenrichtung sein, da eine rechte und linke Schraube nicht durch Drehung ineinander übergeführt werden können. Es resultieren somit $3 \cdot 2 + 1 = 7$ verschiedene Raumsysteme.

Es sind die folgenden:

$\mathfrak{C}_3^1$ $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$ Richtung d $= \mathfrak{D}_3^1$
$\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$ Richtung s $= \mathfrak{D}_3^2$
$\mathfrak{C}_3^2$ $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$ Richtung d $= \mathfrak{D}_3^3$
$\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$ Richtung s $= \mathfrak{D}_3^4$
$\mathfrak{C}_3^3$ $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$ Richtung d $= \mathfrak{D}_3^5$
$\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$ Richtung s $= \mathfrak{D}_3^6$
$\mathfrak{C}_3^4$ $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$ Richtung d $= \mathfrak{D}_3^7$

34 – 40

X. Raumsysteme mit einer tetragonalen und mit senkrecht dazu stehenden digonalen Achsenscharen

Eine tetragonale und eine senkrecht darauf stehende digonale Achsenschar oder zwei einen Winkel von 45° bildende digonale Achsenscharen genügen zur Ableitung (Seite 54). Von den vier entstehenden digonal isomorphen Achsenscharen sind je zwei einander gleichwertig. Mindestens zwei gleichwertige bilden Gruppen $\mathfrak{C}_2{}^3$. (Nach der Seite 64 angegebenen Beziehung zwischen Translationsgruppe und Raumgruppe.) Mit $\mathfrak{C}_4{}^5$ und $\mathfrak{C}_4{}^6$ sind nur digonale Achsenscharen $\mathfrak{C}_2{}^3$ kombinierbar. Somit gibt es $4 \cdot 2 + 2 = 10$ mögliche Raumsysteme.

A. Es können Scharen $\mathfrak{C}_2{}^1$ oder dann $\mathfrak{C}_2{}^2$ vorkommen

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{C}_2{}^1\,\mathfrak{C}_2{}^1 = \mathfrak{D}_4{}^1 \\ \mathfrak{C}_2{}^2\,\mathfrak{C}_2{}^2 = \mathfrak{D}_4{}^2 \end{array}\right\} \quad \mathfrak{C}_4{}^1,\ \mathfrak{C}_2{}^3\,\mathfrak{C}_2{}^3 \qquad \boxed{41} - \boxed{50}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{C}_2{}^1\,\mathfrak{C}_2{}^1 = \mathfrak{D}_4{}^3 \\ \mathfrak{C}_2{}^2\,\mathfrak{C}_2{}^2 = \mathfrak{D}_4{}^4 \end{array}\right\} \quad \mathfrak{C}_4{}^2,\ \mathfrak{C}_2{}^3\,\mathfrak{C}_2{}^3$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{C}_2{}^1\,\mathfrak{C}_2{}^1 = \mathfrak{D}_4{}^7 \\ \mathfrak{C}_2{}^2\,\mathfrak{C}_2{}^2 = \mathfrak{D}_4{}^8 \end{array}\right\} \quad \mathfrak{C}_4{}^4,\ \mathfrak{C}_2{}^3\,\mathfrak{C}_2{}^3$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{C}_2{}^1\,\mathfrak{C}_2{}^1 = \mathfrak{D}_4{}^5 \\ \mathfrak{C}_2{}^2\,\mathfrak{C}_2{}^2 = \mathfrak{D}_4{}^6 \end{array}\right\} \quad \mathfrak{C}_4{}^3.\ \mathfrak{C}_2{}^3\,\mathfrak{C}_2{}^3$$

B. Alle digonalen Achsenscharen sind vom Charakter $\mathfrak{C}_2{}^3$

$$\mathfrak{C}_4{}^5,\ \mathfrak{C}_2{}^3\,\mathfrak{C}_2{}^3,\ \mathfrak{C}_2{}^3\,\mathfrak{C}_2{}^3 = \mathfrak{D}_4{}^9$$
$$\mathfrak{C}_4{}^6.\ \mathfrak{C}_2{}^3\,\mathfrak{C}_2{}^3,\ \mathfrak{C}_2{}^3\,\mathfrak{C}_2{}^3 = \mathfrak{D}_4{}^{10}$$

XI. Raumsysteme mit einer hexagonalen und mit senkrecht dazu stehenden digonalen Achsenscharen

Satz 6 Seite 54 regelt die Verhältnisse. Wie in den Gruppen $\mathfrak{D}_3$ müssen die digonalen Achsenscharen Gruppen $\mathfrak{C}_2{}^3$ bilden, ihre Lage gegenüber den trigonalen Achsen muß die gleiche sein wie dort. Doch sind jetzt immer sowohl Achsen von der Richtung s als auch von der Richtung d vorhanden. Jede verschiedenartige Achsenschar $\mathfrak{C}_6$ bedingt daher eine (und nur eine) neue Gruppe $\mathfrak{D}_6$. Bezeichnung:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{C}_6{}^1 = \mathfrak{D}_6{}^1 \\ \mathfrak{C}_6{}^2 = \mathfrak{D}_6{}^2 \\ \mathfrak{C}_6{}^3 = \mathfrak{D}_6{}^3 \\ \mathfrak{C}_6{}^4 = \mathfrak{D}_6{}^4 \\ \mathfrak{C}_6{}^5 = \mathfrak{D}_6{}^5 \\ \mathfrak{C}_6{}^6 = \mathfrak{D}_6{}^6 \end{array}\right\} \quad \mathfrak{C}_2{}^3\,\mathfrak{C}_2{}^3\,\mathfrak{C}_2{}^3,\ \mathfrak{C}_2{}^3\,\mathfrak{C}_2{}^3\,\mathfrak{C}_2{}^2 \qquad \boxed{51} - \boxed{56}$$

XII. Raumsysteme mit mehreren nichtparallelen trigonalen oder tetragonalen Achsenscharen

Nach Satz 5 Seite 51/52 kommen nur die verallgemeinerten Tetraeder- und Oktaeder-Gruppen in Frage.

A. Tetraedergruppen.

Drei gleichwertige, aufeinander senkrecht stehende digonale Achsenscharen bedingen vier polare trigonale Achsenscharen, die infolge der auf Seite 65 erwähnten Beziehungen immer Gruppen $\mathfrak{C}_3^4$ sein müssen. Es liefern offenbar alle abgeleiteten Gruppen $\mathfrak{B}$, die sich aus drei gleichartigen Gruppen $\mathfrak{C}_2$ aufbauen, mögliche neue Fälle.

Das ergibt sofort:

$\mathfrak{C}_2^1\,\mathfrak{C}_2^1\,\mathfrak{C}_2^1$ in Anordnung $\mathfrak{B}^1$ mit $\mathfrak{C}_3^4\,\mathfrak{C}_3^4\,\mathfrak{C}_3^4\,\mathfrak{C}_3^4 = \mathfrak{T}^1$ 57 – 61

$\mathfrak{C}_2^2\,\mathfrak{C}_2^2\,\mathfrak{C}_2^2$ in Anordnung $\mathfrak{B}^4$ mit $\mathfrak{C}_3^4\,\mathfrak{C}_3^4\,\mathfrak{C}_3^4\,\mathfrak{C}_3^4 = \mathfrak{T}^4$

$\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$ { in Anordnung $\mathfrak{B}^7$ mit $\mathfrak{C}_3^4\,\mathfrak{C}_3^4\,\mathfrak{C}_3^4\,\mathfrak{C}_3^4 = \mathfrak{T}^2$; in Anordnung $\mathfrak{B}^8$ mit $\mathfrak{C}_3^4\,\mathfrak{C}_3^4\,\mathfrak{C}_3^4\,\mathfrak{C}_3^4 = \mathfrak{T}^3$; in Anordnung $\mathfrak{B}^9$ mit $\mathfrak{C}_3^4\,\mathfrak{C}_3^4\,\mathfrak{C}_3^4\,\mathfrak{C}_3^4 = \mathfrak{T}^5$

Es gibt 5 derartige Raumgruppen $\mathfrak{B}$, also auch 5 Raumgruppen $\mathfrak{T}$.

B. Oktaedergruppen.

Drei aufeinander senkrecht stehende, gleichwertige tetragonale Achsenscharen erzeugen sechs gleichwertige digonale Achsenscharen, die vom Charakter $\mathfrak{C}_2^3$ sein müssen, und vier gleichwertige trigonale Achsenscharen, die Gruppen $\mathfrak{C}_3^4$ darstellen. Tetragonale Achsen können in sechserlei verschiedenen Scharen auftreten. Die Anordnung der drei gleichwertigen Scharen muß identisch mit der einer Gruppe $\mathfrak{B}$ sein, da die tetragonalen Achsen immer zugleich digonale Achsen sind.

$\mathfrak{C}_4^5$ und $\mathfrak{C}_4^6$ sind in digonaler Hinsicht Gruppen $\mathfrak{C}_2^3$, die Anordnungen $\mathfrak{B}^7$, $\mathfrak{B}^8$, $\mathfrak{B}^9$ stehen ihnen zur Verfügung, doch läßt sich leicht zeigen, daß $\mathfrak{C}_4^6, \mathfrak{C}_4^6, \mathfrak{C}_4^6$ nie $\mathfrak{B}^8$, $\mathfrak{C}_4^5, \mathfrak{C}_4^5, \mathfrak{C}_4^5$ nie $\mathfrak{B}^9$ bilden können[1]). Somit gibt es 8 mögliche verallgemeinerte Oktaedergruppen:

$(4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 8)$ 62 – 69

$\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$; $\mathfrak{C}_3^1\,\mathfrak{C}_3^1\,\mathfrak{C}_3^1\,\mathfrak{C}_3^1$

$\mathfrak{C}_4^1\,\mathfrak{C}_4^1\,\mathfrak{C}_4^1 = \mathfrak{O}^1$

$\mathfrak{C}_4^3\,\mathfrak{C}_4^3\,\mathfrak{C}_4^3 = \mathfrak{O}^2$

$\mathfrak{C}_4^2\,\mathfrak{C}_4^2\,\mathfrak{C}_4^2 = \mathfrak{O}^6$

$\mathfrak{C}_4^4\,\mathfrak{C}_4^4\,\mathfrak{C}_4^4 = \mathfrak{O}^7$

$\mathfrak{C}_4^5\,\mathfrak{C}_4^5\,\mathfrak{C}_4^5$ { in Anordnung $\mathfrak{B}^7 = \mathfrak{O}^3$; in Anordnung $\mathfrak{B}^8 = \mathfrak{O}^5$

$\mathfrak{C}_4^6\,\mathfrak{C}_4^6\,\mathfrak{C}_4^6$ { in Anordnung $\mathfrak{B}^7 = \mathfrak{O}^4$; in Anordnung $\mathfrak{B}^9 = \mathfrak{O}^8$

[1]) In $\mathfrak{B}^8$ werden alle parallelen Schraubenachsen einer tetragonalen Schar durch Umklappungen ineinander übergeführt, was für eine linke und rechte tetragonale Schraube unmöglich ist. In $\mathfrak{B}^9$ sind umgekehrt alle als digonale Achsen Drehungsachsen repräsentierende parallele Geraden gleichwertig: eine tetragonale Drehungsachse und eine tetragonale Schraubenachse $\left(\frac{\tau_2}{2}\right)$ können das aber nie sein.

Drehspiegelebenen erzeugen mit weiteren nichtparallelen Achsenscharen stets Symmetrieebenen. Somit sind bereits alle möglichen Achsenraumsysteme ohne selbständige Symmetrieebenen abgeleitet; doch wäre als 70. Raumsystem noch das zu erwähnen, welches nichts anderes als eine Schar von Symmetriezentren besitzt. Das Symmetriezentrum können wir ja als digonale Drehspiegelachse auffassen. Fig. 44 zeigt konstruktiv, daß mitten zwischen zwei identischen Symmetriezentren ein weiteres nichtidentisches Symmetriezentrum vorhanden ist. Jedes Raumsystem enthält daher achterlei nichtidentische Symmetriezentren. Bedingungen über Größe und Winkel primitiver Translationen sind keine vorhanden. Die Bezeichnung lautet $\mathfrak{C}_i$. 70

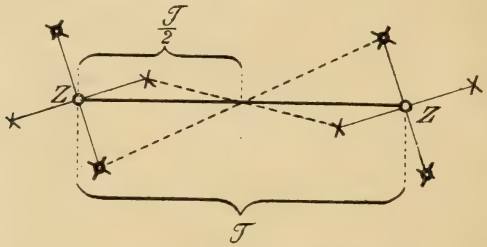


Fig. 44. Mitten zwischen zwei identischen Symmetriezentren liegt wiederum ein Symmetriezentrum.

XIII. Raumsysteme mit einer einzigen isomorphen Parallelschar von Symmetrieebenen

Auf rein konstruktivem Wege läßt sich sofort zeigen, daß mitten zwischen zwei identischen Symmetrieebenen von selbst eine nichtidentische parallele Symmetrieebene zu liegen kommt. Werden zwei nächste identische Symmetrieebenen durch senkrecht zur Ebene stehende primitive Translationen miteinander verbunden, so besitzt notwendigerweise die dazwischen gelegene nichtidentische Symmetrieebene den gleichen Charakter der Deckoperation. Steht aber die verbindende primitive Translation schief zur Ebenenrichtung, so kommen den einander nichtidentischen Symmetrieebenen Deckoperationen verschiedener Art zu. Übrigens werden dann immer zwei übernächste identische Ebenen durch auf ihnen senkrecht stehende primitive Translationen miteinander verknüpft.

Da in den Ebenen selbst keine Richtungen ausgezeichnet sind, ergeben sich viererlei verschiedene Kombinationsmöglichkeiten. Je zwei sind der gleichen Translationsgruppe zuzurechnen.

A. Symmetrieebenen gleicher Art: 71 — 74

Beide nichtidentischen Ebenen sind Spiegelebenen $= \mathfrak{C}_s^1$.

Beide nichtidentischen Ebenen sind Gleitspiegelebenen mit gleicher Gleitkomponente $= \mathfrak{C}_s^2$.

B. Symmetrieebenen ungleicher Art:
Kombination einer Spiegelebene mit einer Gleitspiegelebene = $\mathfrak{C}_s^3$.
Kombination zweier Gleitspiegelebenen verschiedener Art der Gleitkomponente = $\mathfrak{C}_s^4$.
Selbstverständlich treten alle Ebenen als Identitätsscharen auf.

Es sollen nun Symmetrieebenen, soweit dies, abgesehen von etwa entstehender Zweiseitigkeit oder zusätzlicher Drehspiegelsymmetrie, ohne Vermehrung und Veränderung der Achsenscharen möglich ist, als neue Symmetrieelemente den abgeleiteten Achsenraumgruppen beigefügt werden. Da die Entstehung von Achsen unter neuen Winkeln Widersprüche ergeben würde, müssen die Symmetrieebenen gleichartige Achsen wieder in gleichartige schon vorhandene überführen. Sie können daher nur parallel oder rechtwinklig zu den Achsenscharen stehen oder eventuell den Winkel gleichwertiger Achsenscharen halbieren.

Wo Achsenscharen durch ihre Richtung oder ihre Zähligkeit ausgezeichnet sind, bezeichnen wir sie als Hauptachsen. Zunächst legen wir parallel zu je einer 2-, 3-, 4- oder 6-zähligen Achsenschar eine Symmetrieebenenschar und untersuchen die entstehenden Raumsysteme. Die Zahl und Richtung der sich neu ergebenden Symmetrieebenenscharen bleibt sich gleich, ob wir Scharen $\mathfrak{C}_s^1$ oder $\mathfrak{C}_s^2$ oder $\mathfrak{C}_s^3$ bezw. $\mathfrak{C}_s^4$ benutzen. Nur dadurch sich unterscheidende Raumsysteme fassen wir, gemäß dem bei der Ableitung der Achsenraumsysteme benutzten Verfahren, zusammen.

XIV. Raumsysteme mit einer polaren digonalen Achsenschar und zwei ihr parallelen (senkrecht zueinander stehenden) Symmetrieebenenscharen

Satz 11 Seite 58 regelt die Verhältnisse. Er zeigt, daß eine einzige parallele Symmetrieebenenschar noch eine zweite senkrecht zu ihr stehende, der Achse ebenfalls parallele, Ebenenschar erzeugt. Die Achsenschar kann $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^2$ oder $\mathfrak{C}_2^3$ sein.

Die Gleitkomponenten der Symmetrieebenen können Null sein, senkrecht, schief oder parallel der Achse liegen. Für $\mathfrak{C}_2^1$ müssen die in die Achsenrichtung fallenden Projektionen der Gleitkomponenten nach Satz 11 gleich groß sein, für $\mathfrak{C}_2^2$ muß die eine dieser Projektionen Null, die andere $\frac{\tau_z}{2}$ ergeben.

Bezeichnen wir mit horizontalem Strich durch $\mathfrak{E}_s^2$ Gleitspiegelebenen einer senkrecht zur Achse stehenden Gleitrichtung, mit $\mathfrak{C}_s^2$ Gleitspiegelebenen mit einer der Achse parallelen Gleitrichtung, mit $\mathfrak{V}_s^2$ Gleitspiegelebenen einer schief zur Achse stehenden Gleitrichtung, so lassen sich mit $\mathfrak{C}_s^1$ und $\mathfrak{C}_s^2$ folgende möglichen verschiedenartigen Raumsysteme ableiten:

$$\mathfrak{C}_2^1 \begin{cases} \mathfrak{C}_s^1, \ \mathfrak{C}_s^1 = \mathfrak{C}_{2v}^1 \\ \mathfrak{C}_s^1, \ \mathfrak{E}_s^2 = \mathfrak{C}_{2v}^4 \\ \mathfrak{E}_s^2, \ \mathfrak{E}_s^2 = \mathfrak{C}_{2v}^8 \\ \mathfrak{P}_s^2, \ \mathfrak{P}_s^2 = \mathfrak{C}_{2v}^3 \\ \mathfrak{C}_s^2, \ \mathfrak{C}_s^2 = \mathfrak{C}_{2v}^{10} \\ \mathfrak{C}_s^2, \ \mathfrak{P}_s^2 = \mathfrak{C}_{2v}^6 \end{cases} \qquad \boxed{75} - \boxed{80}$$

$$\mathfrak{C}_2^2 \begin{cases} \mathfrak{C}_s^1, \ \mathfrak{P}_s^2 = \mathfrak{C}_{2v}^2 \\ \mathfrak{E}_s^2, \ \mathfrak{P}_s^2 = \mathfrak{C}_{2v}^5 \\ \mathfrak{C}_s^1, \ \mathfrak{C}_s^2 = \mathfrak{C}_{2v}^7 \\ \mathfrak{E}_s^2, \ \mathfrak{C}_s^2 = \mathfrak{C}_{2v}^9 \end{cases} \qquad \boxed{81} - \boxed{84}$$

Sind die Symmetrieebenen Scharen $\mathfrak{C}_s^3$ oder $\mathfrak{C}_s^4$, so kann parallel der Schnittlinie eine Achsenschar $\mathfrak{C}_2^1$ nur auftreten, wenn beide Scharen gleicher Art sind.

Das ergibt: $\boxed{85} - \boxed{87}$

$$\mathfrak{C}_2^1 \begin{cases} \mathfrak{C}_s^3, \ \mathfrak{C}_s^3 = \mathfrak{C}_{2v}^{11} \\ \mathfrak{C}_s^4, \ \mathfrak{C}_s^4 = \mathfrak{C}_{2v}^{13} \end{cases}$$

$$\mathfrak{C}_2^2, \quad \mathfrak{C}_s^3, \ \mathfrak{C}_s^4 = \mathfrak{C}_{2v}^{12}$$

Damit überhaupt Achsenscharen $\mathfrak{C}_2^1$ oder $\mathfrak{C}_2^2$ entstehen, müssen nach den Bemerkungen auf Seite 60 die Verbindungslinien der Fußpunkte nächster identischer Achsen auf einer zur Achsenrichtung senkrechten Ebene primitive Translationen sein. Ist dies nicht der Fall, so müssen die Achsenscharen den Charakter $\mathfrak{C}_2^3$ aufweisen. Eine einfache Überlegung zeigt, daß dies unter anderem immer eintreten wird, wenn die eine Ebenenschar $\mathfrak{C}_s^1$ oder $\mathfrak{C}_s^2$ die andere $\mathfrak{C}_s^3$ oder $\mathfrak{C}_s^4$ ist.

Die diesbezüglichen möglichen Kombinationen lauten:

$$\mathfrak{C}_2^3 \begin{cases} \mathfrak{C}_s^1 \begin{cases} \mathfrak{C}_s^3 = \mathfrak{C}_{2v}^{14} \\ \mathfrak{C}_s^4 = \mathfrak{C}_{2v}^{16} \end{cases} \\ \mathfrak{C}_s^2 \begin{cases} \mathfrak{C}_s^3 = \mathfrak{C}_{2v}^{15} \\ \mathfrak{C}_s^4 = \mathfrak{C}_{2v}^{17} \end{cases} \end{cases} \qquad \boxed{88} - \boxed{91}$$

Es muß nämlich in diesem Falle das Achsennetz bei α (Fig. 39 Seite 71) rechtwinklig sein, so daß die Symmetrieebenen der Scharen $\mathfrak{C}_s^1$ oder $\mathfrak{C}_s^2$ Achsenebenen parallel gehen, die gleichzeitig Drehungsachsen und Schraubenachsen enthalten, während die Scharen $\mathfrak{C}_s^3$ oder $\mathfrak{C}_s^4$ parallel denjenigen Achsenebenen sind, die abwechselnd nur Drehungsachsen und nur Schraubenachsen führen. Da für die Symmetrieebenen nur solche Deckoperationen in Frage kommen, die Schraubenachsen in Schraubenachsen und Drehungsachsen in Drehungsachsen überführen, so kann die Gleitkomponente für $\mathfrak{C}_s^2$ immer nur zur Achsenrichtung parallel oder senkrecht sein. Beide Gleitrichtungen sind stets gleichzeitig vorhanden.

Ist der Winkel β des Achsennetzes der Fig. 40 Seite 72 ein rechter, so gehen alle Symmetrieebenen Achsenebenen parallel, die sowohl

Drehungsachsen wie Schraubenachsen enthalten. Fallen die Achsen in die Symmetrieebenen, so können diese nur teils Spiegelebenen, teils Gleitspiegelebenen mit einer Gleitkomponente senkrecht oder parallel der Achsenrichtung sein. Beide Gleitoperationen sind immer gleichzeitig vorhanden. (Die zweite verbindet 2 identische Achsen.)

$$\mathfrak{C}_2{}^3,\ \mathfrak{C}_s{}^3,\ \mathfrak{C}_s{}^3 = \mathfrak{C}_{2v}{}^{18} \qquad \boxed{92}$$

Liegen die Symmetrieebenen mitten zwischen zwei Achsenebenen, so sind alle Symmetrieebenen Gleitspiegelebenen mit zwei verschiedenen schief zur Achsenrichtung stehenden Gleitrichtungen.

$$\mathfrak{C}_2{}^3,\ \mathfrak{C}_s{}^4,\ \mathfrak{C}_s{}^4 = \mathfrak{C}_{2v}{}^{19} \qquad \boxed{93}$$

Ist schließlich Winkel γ des Achsennetzes der Fig. 40 (Seite 72) ein rechter, so führen alle drei Kombinationen

$$\mathfrak{C}_2{}^3,\ \mathfrak{C}_s{}^3,\ \mathfrak{C}_s{}^3 = \mathfrak{C}_{2v}{}^{20}$$
$$\mathfrak{C}_2{}^3,\ \mathfrak{C}_s{}^3,\ \mathfrak{C}_s{}^4 = \mathfrak{C}_{2v}{}^{22} \qquad \boxed{94} - \boxed{96}$$
$$\mathfrak{C}_2{}^3,\ \mathfrak{C}_s{}^4,\ \mathfrak{C}_s{}^4 = \mathfrak{C}_{2v}{}^{21}$$

zu möglichen Resultaten. Die Symmetrieebenen gehen teils durch Schraubenachsenebenen, teils durch Drehungsachsenebenen. Mitten zwischen zwei derartigen verschiedenen Achsenebenen können sie nicht liegen, weil dann in irgend einer Weise Drehungsachsen durch Spiegelungsoperationen in Schraubenachsen übergeführt werden müßten, was unmöglich ist. (Die Unmöglichkeit ergibt sich auch aus Satz 11 Seite 58, der besagt, daß der Abstand der Symmetrieebene von einer parallelen Achse $\frac{1}{4}$ der Projektion einer möglichen primitiven Translation sein muß.)

XV. Raumsysteme mit einer polaren trigonalen Achsenschar und einer, bezw. drei, ihr parallelen Symmetrieebenenscharen

Die polare trigonale Achsenschar erzeugt aus einer parallelen Symmetrieebenenschar deren drei gleichwertige. Sie bilden miteinander Winkel von 120° bezw. 60°. Nach Satz 9 Seite 57 kommen für die Ableitung derartiger Raumsysteme nur trigonale Achsenscharen $\mathfrak{C}_3{}^1$ oder $\mathfrak{C}_3{}^4$ in Frage. Die Symmetrieebenen müssen s oder d von Fig. 43 parallel gehen, für $\mathfrak{C}_3{}^4$ können sie nur s parallel gehen, weil die Achsen (b) und (c) als Schraubenachsen verschiedenen Windungssinnes durch sie ineinander übergeführt werden müssen. Die Symmetrieebenen sind Scharen $\mathfrak{C}_s{}^3$ oder $\mathfrak{C}_s{}^4$. Das ergibt die möglichen Fälle:

$$\mathfrak{C}_3{}^1 \begin{cases} \mathfrak{C}_s{}^3\,\mathfrak{C}_s{}^3\,\mathfrak{C}_3{}^3 \begin{cases} \text{Richtung d} = \mathfrak{C}_{3v}{}^1 \\ \text{Richtung s} = \mathfrak{C}_{3v}{}^2 \end{cases} \\ \mathfrak{C}_s{}^4\,\mathfrak{C}_s{}^4\,\mathfrak{C}_s{}^4 \begin{cases} \text{Richtung d} = \mathfrak{C}_{3v}{}^3 \\ \text{Richtung s} = \mathfrak{C}_{3v}{}^4 \end{cases} \end{cases} \qquad \boxed{97} - \boxed{102}$$

$$\mathfrak{C}_3{}^4 \begin{cases} \mathfrak{C}_s{}^3\,\mathfrak{C}_s{}^3\,\mathfrak{C}_3{}^3 = \mathfrak{C}_{3v}{}^5 \\ \mathfrak{C}_s{}^4\,\mathfrak{C}_s{}^4\,\mathfrak{C}_s{}^4 = \mathfrak{C}_{3v}{}^6 \end{cases}$$

XVI. Raumsysteme mit einer polaren tetragonalen Achsenschar und einer, bezw. (2 + 2), ihr parallelen Symmetrieebenenscharen

Die polare tetragonale Achsenschar erzeugt aus einer parallelen Symmetrieebenenschar im ganzen 2 + 2 Symmetrieebenenscharen. (Je zwei sind sich gleichwertig.) Die ungleichwertigen bilden Winkel von 45° miteinander. Infolge der Art der Translationsgruppe müssen mindestens zwei (unter sich gleichwertige) Symmetrieebenenscharen vom Charakter $\mathfrak{C}_s^3$ oder $\mathfrak{C}_s^4$ sein.

Nach Satz 9 Seite 57 können nur Achsenscharen $\mathfrak{C}_4^1$ $\mathfrak{C}_4^3$, $\mathfrak{C}_4^5$, $\mathfrak{C}_4^6$ mit Symmetrieebenen kombiniert werden.

1. $\mathfrak{C}_4^1$ und $\mathfrak{C}_4^3$: Die Symmetrieebenenscharen $\mathfrak{C}_s^1$ oder $\mathfrak{C}_s^2$ gehen Achsenebenen parallel, die digonale und tetragonale Achsen gleichzeitig enthalten; die Scharen $\mathfrak{C}_s^3$ oder $\mathfrak{C}_s^4$ sind denjenigen Achsenebenen parallel, die in abwechselnder Folge nur polare tetragonale, oder nur polare digonale Achsen aufweisen. Die tetragonal isomorphe Achsenschar und eine Symmetrieebenenschar genügen zur Ableitung.

Wir wählen eine Symmetrieebenenschar parallel den kombinierten Achsenebenen. Entweder fallen Symmetrieebenen und Achsenebenen zusammen (Lage O), oder die Symmetrieebenen liegen zwischen zwei Achsenebenen (Lage M).

Senkrecht zu diesen Symmetrieebenen folgen sich ungleichartige Achsen. Für Spiegelebenen kommt infolgedessen nur die Lage O in Frage, für Scharen $\mathfrak{P}_s^2$ ebenfalls, für Scharen $\mathfrak{C}_s^2$ oder $\mathfrak{S}_s^2$ hingegen stets nur die Lage M. Beide Lagen schließen sich daher gegenseitig aus. Die möglichen Fälle sind somit:

$\mathfrak{C}_4^1$:
- $\mathfrak{C}_s^1\,\mathfrak{C}_s^1$ erzeugt $\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3 = \mathfrak{C}_{4v}^1$
- $\mathfrak{S}_s^2\,\mathfrak{S}_s^2$ erzeugt $\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3 = \mathfrak{C}_{4v}^2$
- $\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2$ erzeugt $\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4 = \mathfrak{C}_{4v}^6$
- $\mathfrak{P}_s^2\,\mathfrak{P}_s^2$ erzeugt $\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4 = \mathfrak{C}_{4v}^5$

$\mathfrak{C}_4^3$:
- $\mathfrak{C}_s^1\,\mathfrak{C}_s^1$ erzeugt $\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4 = \mathfrak{C}_{4v}^7$
- $\mathfrak{S}_s^2\,\mathfrak{S}_s^2$ erzeugt $\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4 = \mathfrak{C}_{4v}^8$
- $\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2$ erzeugt $\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3 = \mathfrak{C}_{4v}^4$
- $\mathfrak{P}_s^2\,\mathfrak{P}_s^2$ erzeugt $\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3 = \mathfrak{C}_{4v}^3$

103 — 110

Die Art und Lage der Ebenen $\mathfrak{C}_s^3$ oder $\mathfrak{C}_s^4$ ergibt sich leicht nach folgender Überlegung. Vier sich in einer Linie schneidende Spiegelebenen machen die Schnittlinie zur tetragonalen Drehungsachse, ebenso erzeugen zwei sich rechtwinklig in einer tetragonalen Drehungsachse schneidende Spiegelebenen zwei weitere Spiegelebenen. Tetragonale Drehungsachsen gibt es nur in $\mathfrak{C}_4^1$, also erzeugt dort $\mathfrak{C}_s^1$ (in Lage O) $\mathfrak{C}_s^3$, während es mit $\mathfrak{C}_4^3$ nur $\mathfrak{C}_s^4$ erzeugen darf. Die in $\mathfrak{C}_s^3$ in den Gleitspiegelebenen

auftretende Gleitrichtung steht senkrecht zur Achse. Mit $\mathfrak{C}_4^1$, dem keinerlei Schraubenachsen eigen sind, ist daher $\mathfrak{C}_s^3$ nur noch mit $\mathfrak{S}_s^2$ kombinierbar. Gerade umgekehrt ist es in Begleitung von $\mathfrak{C}_4^3$. Die tetragonalen Achsen sind Schraubenachsen mit der Schraubungskomponente $\frac{\tau_z}{2}$. Zwei in 45° zueinander stehende Symmetrieebenen müssen daher eine Höhendifferenz der Gleitkomponente von $\frac{\tau_z}{2}$ besitzen, so daß $\mathfrak{C}_s^3$, dem keinerlei Gleitkomponente in der z-Richtung (Achsenrichtung) zukommt, nur neben $\mathfrak{S}_s^2$ oder $\mathfrak{C}_s^2$ auftreten kann. Die spezielle Lage muß mit Satz 11 Seite 58 in Einklang sein.

2. $\mathfrak{C}_4^5$ und $\mathfrak{C}_4^6$ lassen sich nur mit $\mathfrak{C}_s^3$ oder $\mathfrak{C}_s^4$ kombinieren. In $\mathfrak{C}_4^5$ kommen keine zwei nichtidentischen gleichartigen tetragonalen Achsen vor. Die erzeugende Ebenenschar kann daher die tetragonalen Achsen nur in sich selbst überführen. Berücksichtigung dieses Umstandes, sowie des Satzes 11 Seite 58, ergibt zwei mögliche Raumsysteme.

$$\mathfrak{C}_4^5 \begin{cases} \mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3 \text{ erzeugt } \mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3 = \mathfrak{C}_{4v}^9 \\ \mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4 \text{ erzeugt } \mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3 = \mathfrak{C}_{4v}^{10} \end{cases} \quad \boxed{111} \quad \boxed{112}$$

Die Spiegelebenen gehen im ersten Fall durch die polaren tetragonalen Drehungsachsen, im zweiten Fall durch die polaren tetragonalen Schraubenachsen (digonalen Drehungsachsen). In der Gruppe $\mathfrak{C}_4^6$ müssen die entgegengesetzt gewundenen polaren tetragonalen Achsen durch die Symmetrieebenen ineinander übergeführt werden.

Wiederum gibt es zwei mögliche Fälle $\boxed{113}$ $\boxed{114}$

$$\mathfrak{C}_4^6 \begin{cases} \mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3 \text{ erzeugt } \mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4 = \mathfrak{C}_{4v}^{11} \\ \mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4 \text{ erzeugt } \mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4 = \mathfrak{C}_{4v}^{12} \end{cases}$$

XVII. Raumsysteme mit einer polaren hexagonalen Achsenschar und einer, bezw. (3 + 3), dazu parallelen Symmetrieebenenscharen

Die hexagonalen Achsen haben zur Folge, daß aus einer ihnen parallelen Symmetrieebene im ganzen 6, das heißt 3 + 3 gleichartige, Symmetrieebenenscharen hervorgehen. Nach Satz 9 Seite 57 sind nur die Achsenscharen $\mathfrak{C}_6^1$ und $\mathfrak{C}_6^6$ mit Symmetrieebenen kombinierbar. Die erstere enthält hexagonale Drehungsachsen, die letztere hexagonale Schraubenachsen, die gleichzeitig trigonale Drehungsachsen und digonale Schraubenachsen sind $\left(\text{Schraubenkomponente } \frac{\tau_z}{2}\right)$. Die Translationsgruppe der hexagonalen Säule ist die Ursache, daß als Symmetrieebenenscharen nur Gruppen $\mathfrak{C}_s^3$ oder $\mathfrak{C}_s^4$ von der Richtung s und d der Fig. 43 Seite 75 in Frage kommen. Soll eine hexagonale Drehungsachse entstehen, so müssen die ungleichwertigen Symmetrieebenenscharen die gleichen Deck-

operationen besitzen, soll eine hexagonale Schraubenachse mit $\frac{\tau_z}{2}$ als Schraubungskomponente gebildet werden, so müssen die Gleitkomponenten zweier einen Winkel von 180° bildenden Ebenen nach Satz 11 Seite 58 in Richtung der Achse um $\frac{\tau_z}{2}$ differieren.

Das ergibt als mögliche Raumsysteme: 115 — 118

$$\mathfrak{C}_6^1 \begin{cases} \mathfrak{C}_s^3\mathfrak{C}_s^3\mathfrak{C}_s^3,\ \mathfrak{C}_s^3\mathfrak{C}_s^3\mathfrak{C}_s^3 = \mathfrak{C}_{6v}^1 \\ \mathfrak{C}_s^4\mathfrak{C}_s^4\mathfrak{C}_s^4,\ \mathfrak{C}_s^4\mathfrak{C}_s^4\mathfrak{C}_s^4 = \mathfrak{C}_{6v}^2 \end{cases}$$

$$\mathfrak{C}_6^6 \begin{cases} \mathfrak{C}_s^3\mathfrak{C}_s^3\mathfrak{C}_s^3,\ \mathfrak{C}_s^4\mathfrak{C}_s^4\mathfrak{C}_s^4 = \mathfrak{C}_{6v}^3 \\ \mathfrak{C}_s^4\mathfrak{C}_s^4\mathfrak{C}_s^4,\ \mathfrak{C}_s^3\mathfrak{C}_s^3\mathfrak{C}_s^3 = \mathfrak{C}_{6v}^4 \end{cases}$$

Die beiden letzteren unterscheiden sich, ob Ebenen d oder s Gleitspiegelebenen sind. Die elegante Ableitung mittels Untergruppen $\mathfrak{C}_{3v}$ ist aus folgender Tabelle ersichtlich:

	$\mathfrak{C}_{3v}^1$	$\mathfrak{C}_{3v}^3$
$\mathfrak{C}_{3v}^2$	$\mathfrak{C}_{6v}^1$	$\mathfrak{C}_{6v}^3$
$\mathfrak{C}_{3v}^4$	$\mathfrak{C}_{6v}^4$	$\mathfrak{C}_{6v}^2$

XVIII. Raumsysteme mit einer Achsenschar, die einer tetragonalen Drehspiegelachse isomorph ist, mit zwei ihr parallelen gleichwertigen Symmetrieebenenscharen und mit zwei senkrecht zur Hauptachse stehenden, gleichwertigen digonalen Achsenscharen

Die tetragonal-isomorphe Drehspiegelachsenschar und eine parallel dazu stehende Symmetrieebenenschar genügen zur Ableitung und bedingen alle übrigen Symmetrieelemente. Es entstehen hier neue Achsen (Satz 8a Seite 56). Die Achsenscharen bilden aber eine Gruppe $\mathfrak{B}$, die, abgesehen vom tetragonalen Drehspiegelcharakter der einen Achse, für sich allein bestandfähig ist. Die Raumsysteme lassen sich somit auch aus $\mathfrak{B}$-Gruppen ableiten durch Hinzufügen einer, bezw. zwei, Symmetrieebenenscharen, welche die Winkel zweier Achsenscharen halbieren. Dadurch werden diese Achsenscharen gleichwertig und die senkrecht dazu stehende Schar wird einer tetragonalen Drehspiegelachse isomorph. Ihr gehen die Symmetrieebenenscharen parallel. (Siehe Satz 8a Seite 56.)

Hier wird der erstangegebene Weg der Ableitung beschritten.

Die Hauptachsenscharen können Gruppen $\mathfrak{S}_4^1$ oder $\mathfrak{S}_4^2$ bilden. Im ersteren Fall werden zwei nächste identische Achsen durch senkrecht zu ihnen stehende primitive Translationen miteinander verbunden; ist daher die Symmetrieebenenschar vom Charakter $\mathfrak{C}_s^3$ oder $\mathfrak{C}_s^4$, so sind die digonalen Achsen Gruppen $\mathfrak{C}_2^1$ oder $\mathfrak{C}_2^2$; sind die Symmetrieebenen

durch $\mathfrak{C}_s^1$ oder $\mathfrak{C}_s^2$ gegeben, so bilden die digonalen Achsen Gruppen $\mathfrak{C}_2^3$. Die erzeugende Symmetrieebene kann zum Achsennetz $\mathfrak{S}_4^1$ drei verschiedene Lagen haben. (Der Abstand von einer Achse muß nach Satz 11 Seite 58 Null oder $\frac{1}{4}$-Translation in der Abstandsrichtung sein.) Geht die Symmetrieebene den nur Drehspiegelachsen enthaltenden Achsenebenen parallel, so sind immer gleichzeitig beiderlei Ebenen vorhanden. Figur 45 zeigt die diesbezüglichen Verhältnisse. a- und b-Lagen der Symmetrieebenen besitzen die Untergruppen $\mathfrak{C}_s^1$ oder $\mathfrak{C}_s^2$. Ebenen der Richtung c bilden Gruppen $\mathfrak{C}_s^3$ oder $\mathfrak{C}_s^4$. Im letzteren Fall kann die

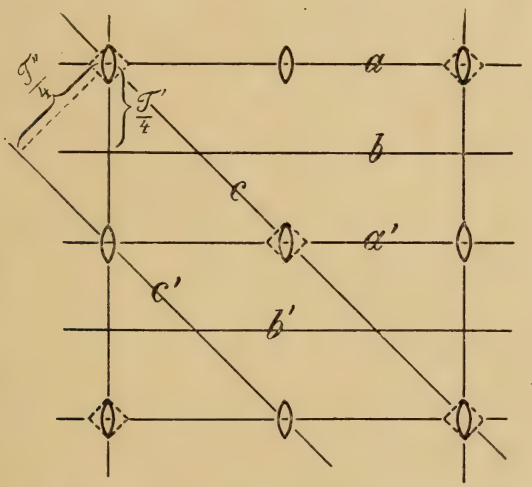


Fig. 45. Lage der Symmetrieebenen in den Raumsystemen $\mathfrak{V}_d$.

Spiegelebene (oder die Ebene mit einer Gleitkomponente in der Hauptachsenrichtung) durch c oder durch c′ gehen.

Man erhält so folgendes Schema:

$\mathfrak{S}_4^1$
- mit $\mathfrak{C}_s^1\,\mathfrak{C}_s^1$
  - Lage a erzeugt $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3 = \mathfrak{V}_d^5$ — 119 – 126
  - Lage b, wegen Achsenverteilung unmöglich
- mit $\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2$
  - Lage a Gleitkomponente parallel zur Achse erzeugt $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3 = \mathfrak{V}_d^6$
  - Lage b
    - Gleitrichtung senkrecht zur Achse erzeugt $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3 = \mathfrak{V}_d^7$
    - Gleitrichtung schief zur Hauptachse erzeugt $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3 = \mathfrak{V}_d^8$

$\mathfrak{S}_4{}^1$ mit $\mathfrak{C}_s{}^3\,\mathfrak{C}_s{}^3$:
- Spiegelebene durch c erzeugt $\mathfrak{C}_2{}^1\,\mathfrak{C}_2{}^1 = \mathfrak{V}_d{}^1$
- Spiegelebene durch c′ erzeugt $\mathfrak{C}_2{}^2\,\mathfrak{C}_2{}^2 = \mathfrak{V}_d{}^3$

$\mathfrak{S}_4{}^1$ mit $\mathfrak{C}_s{}^4\,\mathfrak{C}_s{}^4$:
- Gleitspiegelebene mit einer der Achse parallelen Gleitkomponente durch c erzeugt $\mathfrak{C}_2{}^1\,\mathfrak{C}_2{}^1 = \mathfrak{V}_d{}^2$
- Gleitspiegelebene mit einer der Achse parallelen Gleitkomponente durch c′ erzeugt $\mathfrak{C}_2{}^2\,\mathfrak{C}_2{}^2 = \mathfrak{V}_d{}^4$

Ist eine Gruppe $\mathfrak{S}_4{}^2$ vorhanden, so sind die digonalen Achsen vom Charakter $\mathfrak{C}_2{}^3$ und die Ebenen bilden immer Untergruppen $\mathfrak{C}_s{}^3$ oder $\mathfrak{C}_s{}^4$. Die Symmetrieebenen können (1.) Achsenebenen parallel gehen, die Drehspiegelachsen und Schraubenachsen ein und derselben Parallelschar enthalten, oder aber sie gehen (2.) jenem Achsenebenensystem parallel, bei dem abwechselnd Ebenen mit lauter Drehspiegelachsen und lauter Schraubenachsen aufeinander folgen. 127 – 130

$\mathfrak{S}_4{}^2$ Lage der Ebenen (1):
- $\mathfrak{C}_s{}^3\,\mathfrak{C}_s{}^3$ erzeugt $\mathfrak{C}_2{}^3\,\mathfrak{C}_2{}^3 = \mathfrak{V}_d{}^{11}$
- $\mathfrak{C}_s{}^4\,\mathfrak{C}_s{}^4$ erzeugt $\mathfrak{C}_2{}^3\,\mathfrak{C}_2{}^3 = \mathfrak{V}_d{}^{12}$

Lage der Ebenen (2):
- $\mathfrak{C}_s{}^3\,\mathfrak{C}_s{}^3$ erzeugt $\mathfrak{C}_2{}^3\,\mathfrak{C}_2{}^3 = \mathfrak{V}_d{}^{9}$
- $\mathfrak{C}_s{}^4\,\mathfrak{C}_s{}^4$ erzeugt $\mathfrak{C}_2{}^3\,\mathfrak{C}_2{}^3 = \mathfrak{V}_d{}^{10}$

XIX. Raumsysteme, die eine hexagonale Drehspiegelachsenschar, drei dieser Schar parallele gleichwertige Symmetrieebenenscharen, drei gleichwertige digonale Achsenscharen und eine Symmetriezentrumschar enthalten

Zur Ableitung genügt die hexagonale Drehspiegelachsenschar und eine ihr parallele Symmetrieebenenschar. Oder es entstehen die Drehspiegelachsen nach Satz 8 Seite 56, wenn Symmetrieebenenscharen eingeführt werden, welche die Winkel gleichwertiger Achsen halbieren. Das Symmetriezentrum erzeugt nach Satz 10 Seite 57 senkrecht zur Hauptachsenschar und zu den Symmetrieebenen stehende, digonale Achsenscharen.

Verwendbar sind $\mathfrak{C}_{3i}{}^1$ und $\mathfrak{C}_{3i}{}^2$, hervorgehend aus $\mathfrak{C}_3{}^1$ und $\mathfrak{C}_3{}^4$. Bei Anwesenheit von $\mathfrak{C}_{3i}{}^1$ können die Symmetrieebenen die Richtungen s oder d der Fig. 43 Seite 75 haben; mit $\mathfrak{C}_{3i}{}^2$ verbunden ist die Lage s der Symmetrieebenen. Die Symmetrieebenen sind Scharen $\mathfrak{C}_s{}^3$ oder $\mathfrak{C}_s{}^4$.

Daraus leiten sich ab:

$\mathfrak{C}_{3i}{}^1$ Lage s:
- $\mathfrak{C}_s{}^3\,\mathfrak{C}_s{}^3\,\mathfrak{C}_s{}^3$ erzeugt $\mathfrak{C}_2{}^3\,\mathfrak{C}_2{}^3\,\mathfrak{C}_2{}^3 = \mathfrak{D}_{3d}{}^1$ 131 – 136
- $\mathfrak{C}_s{}^4\,\mathfrak{C}_s{}^4\,\mathfrak{C}_s{}^4$ erzeugt $\mathfrak{C}_2{}^3\,\mathfrak{C}_2{}^3\,\mathfrak{C}_2{}^3 = \mathfrak{D}_{3d}{}^2$

$\mathfrak{C}_{3i}{}^1$ Lage d:
- $\mathfrak{C}_s{}^3\,\mathfrak{C}_s{}^3\,\mathfrak{C}_s{}^3$ erzeugt $\mathfrak{C}_2{}^3\,\mathfrak{C}_2{}^3\,\mathfrak{C}_2{}^3 = \mathfrak{D}_{3d}{}^3$
- $\mathfrak{C}_s{}^4\,\mathfrak{C}_s{}^4\,\mathfrak{C}_s{}^4$ erzeugt $\mathfrak{C}_2{}^3\,\mathfrak{C}_2{}^3\,\mathfrak{C}_2{}^3 = \mathfrak{D}_{3d}{}^4$

$\mathfrak{C}_{3i}{}^2$:
- $\mathfrak{C}_s{}^3\,\mathfrak{C}_s{}^3\,\mathfrak{C}_s{}^3$ erzeugt $\mathfrak{C}_2{}^3\,\mathfrak{C}_2{}^3\,\mathfrak{C}_2{}^3 = \mathfrak{D}_{3d}{}^5$
- $\mathfrak{C}_s{}^4\,\mathfrak{C}_s{}^4\,\mathfrak{C}_s{}^4$ erzeugt $\mathfrak{C}_2{}^3\,\mathfrak{C}_2{}^3\,\mathfrak{C}_2{}^3 = \mathfrak{D}_{3d}{}^6$

Damit sind die Möglichkeiten dieser Art erschöpft.

Bei Anwesenheit je einer tetragonalen oder hexagonalen Achsenschar, liegen parallel den Winkelhalbierenden der darauf senkrecht stehenden digonalen Achsenscharen selbst digonale Achsenscharen. Es werden dann auch senkrecht zu den Hauptachsen stehende Symmetrieebenenscharen erzeugt, sowie Symmetrieebenenscharen parallel den Ausgangsachsen digonaler Art. Die Ableitung dieser Raumsysteme erfolgt im Zusammenhang später.

XX. Raumsysteme mit drei gleichwertigen, aufeinander senkrechtstehenden tetragonalen Drehspiegelachsenscharen, sechs Symmetrieebenenscharen und vier polaren trigonalen Achsenscharen

In den verallgemeinerten Tetraeder- und Oktaederachsengruppen sind die drei senkrecht aufeinanderstehenden digonalen, beziehungsweise tetragonalen Achsenscharen als Hauptachsenscharen zu bezeichnen. Symmetrieebenen, die nicht zugleich senkrecht zu den Hauptachsen stehende Symmetrieebenen erzeugen, können wir, parallel je einer Hauptachsenschar, nur in die Tetraedergruppe legen. Sie müssen die Achsenwinkel halbieren, bedingen also nach Satz 8a Seite 56, daß die Hauptachsen tetragonale Drehspiegelachsen werden. Eine Symmetrieebenenschar erzeugt 5 weitere ihr gleichwertige Scharen. Alle Symmetrieebenen[1]) sind entweder vom Charakter $\mathfrak{C}_s^3$ oder $\mathfrak{C}_s^4$. Sind die Hauptachsen Gruppen $\mathfrak{S}_4^2$, so können die Symmetrieebenen kombinierten Achsenebenen (1) oder einfachen Achsenebenen (2) einer Parallelschar von Achsen parallel gehen. (Siehe Seite 86.)

Das Schema der Ableitung lautet somit:

$\mathfrak{S}_4^1, \mathfrak{S}_4^1, \mathfrak{S}_4^1$

$\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3 = \mathfrak{T}_d^1$ — 137 — 142

$\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4 = \mathfrak{T}_d^4$

$\mathfrak{S}_4^2, \mathfrak{S}_4^2, \mathfrak{S}_4^2$

(1)

$\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3 = \mathfrak{T}_d^3$

$\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4 = \mathfrak{T}_d^6$

(2)

$\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3 = \mathfrak{T}_d^2$

$\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4 = \mathfrak{T}_d^5$

Immer sind auch 4 Gruppen $\mathfrak{C}_3^4$ vorhanden.

Fügt man den Hauptachsen parallele Symmetrieebenen den übrigen Achsenraumsystemen bei, so entstehen stets auch Symmetrieebenen senkrecht zu den Hauptachsenscharen, bedingt nach Satz 11 Seite 58 durch das Vorhandensein digonaler Achsenscharen senkrecht zu den Hauptachsen. Diese Raumsysteme wollen wir daher erst ableiten, nachdem diejenigen aufgesucht sind, welche nur Symmetrieebenen senkrecht zu

[1]) Weil die tetragonalen Drehspiegelachsen einander gleichwertig sein müssen.

den Hauptachsen besitzen. Senkrecht zu den Hauptachsen dürfen also in diesem Falle keine digonalen Achsen ursprünglich vorhanden sein. Die Hauptachsen werden zweiseitig und erzeugen, wenn sie geradzählig sind, nach Satz 10 Seite 57 Symmetriezentren.

XXI. Raumsysteme mit einer digonalen Achsenschar und einer senkrecht dazu stehenden Symmetrieebenenschar. Die Kombination beider erzeugt eine Symmetriezentrumsschar

Mit $\mathfrak{C}_s^1$ oder $\mathfrak{C}_s^2$ sind $\mathfrak{C}_2^1$ oder $\mathfrak{C}_2^2$ in Verbindung, mit $\mathfrak{C}_2^3$ aber $\mathfrak{C}_s^3$ oder $\mathfrak{C}_s^4$. (Siehe die Bemerkungen auf Seite 64 und Seite 78.)

143 — 148

$\mathfrak{C}_2^1$ < $\mathfrak{C}_s^1$ erzeugt $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{C}_{2h}^1$
$\mathfrak{C}_s^2$ erzeugt $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{C}_{2h}^4$

$\mathfrak{C}_2^2$ < $\mathfrak{C}_s^1$ erzeugt $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{C}_{2h}^2$
$\mathfrak{C}_s^2$ erzeugt $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{C}_{2h}^5$

$\mathfrak{C}_2^3$ < $\mathfrak{C}_s^3$ erzeugt $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{C}_{2h}^3$
$\mathfrak{C}_s^4$ erzeugt $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{C}_{2h}^6$

XXII. Raumsysteme mit einer trigonalen Achsenschar und einer senkrecht dazu stehenden Symmetrieebenenschar

Nach Satz 9 Seite 57 ist nur $\mathfrak{C}_3^1$ mit Symmetrieebenen kombinierbar und zwar lediglich mit Spiegelebenen, da keine zwei trigonalen Achsen im Abstand einer halben primitiven Translation zueinander stehen.

$\mathfrak{C}_3^1, \mathfrak{C}_s^1 = \mathfrak{C}_{3h}^1$ 149

XXIII. Raumsysteme mit einer tetragonalen Achsenschar und einer senkrecht dazu stehenden Symmetrieebenenschar. Die Kombination ergibt nach Satz 10 Seite 57 eine Schar von Symmetriezentren

Als Achsenscharen sind gemäß Satz 9 Seite 57 $\mathfrak{C}_4^1$, $\mathfrak{C}_4^3$, $\mathfrak{C}_4^5$, $\mathfrak{C}_4^6$ verwendbar. Bei Anwesenheit von $\mathfrak{C}_4^6$ müssen durch die Spiegelungsoperation linke tetragonale Achsen in rechte überführt werden, das ist nur in der Form einer Gleitspiegelung möglich. Für $\mathfrak{C}_4^5$ kommt anderseits nur die Symmetrieebenenschar $\mathfrak{C}_s^3$ in Frage.

Schema der Ableitung:

150 — 155

$\mathfrak{C}_4^1$ < $\mathfrak{C}_s^1$ erzeugt $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{C}_{4h}^1$
$\mathfrak{C}_s^2$ erzeugt $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{C}_{4h}^3$

$\mathfrak{C}_4^3$ < $\mathfrak{C}_s^1$ erzeugt $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{C}_{4h}^2$
$\mathfrak{C}_s^2$ erzeugt $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{C}_{4h}^4$

Wie senkrecht zu $\mathfrak{C}_4^1$ und $\mathfrak{C}_4^3$ nur Symmetrieebenenscharen $\mathfrak{C}_s^1$ und $\mathfrak{C}_s^2$ auftreten können, stehen $\mathfrak{C}_4^5$ und $\mathfrak{C}_4^6$ nur mit $\mathfrak{C}_s^3$ und $\mathfrak{C}_s^4$ in Verbindung, und zwar, wie oben angegeben, lediglich in der Form:

$\mathfrak{C}_4^5, \mathfrak{C}_s^3, \mathfrak{C}_i = \mathfrak{C}_{4h}^5$
$\mathfrak{C}_4^6, \mathfrak{C}_s^4, \mathfrak{C}_i = \mathfrak{C}_{4h}^6$

XXIV. Raumsysteme mit einer hexagonalen Achsenschar, mit einer senkrecht dazu stehenden Symmetrieebenenschar und daraus sich ergebenden Symmetriezentren

Aus den Gründen, die vorhin erwähnt wurden, sind die einzig ableitbaren Raumsysteme gegeben durch:

$$\mathfrak{C}_6^1,\ \mathfrak{C}_s^1,\ \mathfrak{C}_i = \mathfrak{C}_{6h}^1$$
$$\mathfrak{C}_6^6,\ \mathfrak{C}_s^1,\ \mathfrak{C}_i = \mathfrak{C}_{6h}^2$$

156 — 157

Drehspiegelachsen und senkrecht zu ihnen stehende Symmetrieebenen wandeln die Drehspiegelachsen in gewöhnliche Achsen um, erzeugen somit keine neuen Fälle.

XXV. Raumsysteme mit drei gleichwertigen digonalen Achsenscharen, drei senkrecht daraufstehenden Symmetrieebenenscharen, vier hexagonalen Drehspiegelachsenscharen und mit einer Schar von Symmetriezentren

Die Symmetrieebenenscharen stehen senkrecht zu den digonalen Achsen der verallgemeinerten Tetraedergruppen. Es entstehen nach Satz 10 Seite 57 Symmetriezentren, die aus den vier trigonalen gewöhnlichen Achsenscharen hexagonale Drehspiegelachsenscharen machen.

Schema der Ableitung:

158 — 160

$\mathfrak{C}_2^1\,\mathfrak{C}_2^1\,\mathfrak{C}_2^1$
- $\mathfrak{C}_s^1\,\mathfrak{C}_s^1\,\mathfrak{C}_s^1 = \mathfrak{T}_h^1$
- $\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2 = \mathfrak{T}_h^2$

$\mathfrak{C}_2^2\,\mathfrak{C}_2^2\,\mathfrak{C}_2^2$
- $\mathfrak{C}_s^1\,\mathfrak{C}_s^1\,\mathfrak{C}_s^1$ unmöglich, da die Schnittlinie zweier senkrecht aufeinander stehender Spiegelebenen eine digonale Drehungsachse ist;
- $\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2 = \mathfrak{T}_h^6$

Sind die digonalen Achsen Gruppen $\mathfrak{C}_2^3$, so können sie nach Seite 77 in Anordnungen $\mathfrak{B}^7$, $\mathfrak{B}^8$ oder $\mathfrak{B}^9$ auftreten.

$\mathfrak{B}^7$ ist mit $\mathfrak{C}_s^3$ und $\mathfrak{C}_s^4$ kombinierbar; $\mathfrak{B}^8$ nur mit $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{B}^9$ nur mit $\mathfrak{C}_s^4$, wenn, wie das hier der Fall ist, lauter gleichwertige Symmetrieebenenscharen entstehen sollen.

161 — 164

$\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$
- in Anordnung $\mathfrak{B}^7$
  - $\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3 = \mathfrak{T}_h^3$
  - $\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4 = \mathfrak{T}_h^4$
- in Anordnung
  - $\mathfrak{B}_8$ — $\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3 = \mathfrak{T}_h^5$
  - $\mathfrak{B}_9$ — $\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4 = \mathfrak{T}_h^7$

Jedes Raumsystem enthält noch vier Scharen $\mathfrak{C}_{3i}^2$.

Alle diejenigen Raumsysteme, die neben Hauptachsenscharen noch senkrecht auf diesen stehende digonale Achsenscharen besitzen, erzeugen bei Verwendung von rechtwinklig zu den Hauptachsen liegenden Symmetrieebenen nach Satz 11 Seite 58 auch parallel dazu stehende Symmetrieebenenscharen. Bei geradzähliger Hauptachse treten weiterhin Symmetriezentren auf.

Die diesbezüglichen Raumsysteme lassen sich daher auf mannigfaltige Weise ableiten, beispielsweise auch durch Hinzufügen einer senkrecht zur Hauptachsenschar stehenden Symmetrieebene zu Raumsystemen mit parallelen Symmetrieebenen, oder durch Hinzufügen parallel den Hauptachsen liegender Symmetrieebenen zu den soeben besprochenen Raumsystemen (XXI—XXV). (Die übrigen Achsen ergeben sich dann nach Satz 11 Seite 58.) Die Resultate der Ableitung müssen selbstverständlich genau miteinander übereinstimmen.

Hier werden, im Anschluß an das unmittelbar Vorhergehende, die noch nicht verwendeten komplexen Achsenraumsysteme mit senkrecht zu den Hauptachsen stehenden Symmetrieebenenscharen kombiniert.

XXVI. Raumsysteme mit drei senkrecht aufeinander stehenden ungleichwertigen digonalen Achsenscharen, drei auf ihnen und aufeinander senkrecht stehenden ungleichwertigen Symmetrieebenenscharen und einer Schar von Symmetriezentren

Wir denken uns die Achsengruppen als $\mathfrak{V}$-(Vierer-)Gruppe gegeben und fügen senkrecht zu irgend einer Achse eine Symmetrieebene hinzu. Art und Lage der anderen Symmetrieebenen folgen aus Satz 11 Seite 58, die Lage der Symmetriezentren richtet sich nach Satz 10 Seite 57.

a) Gruppe $\mathfrak{V}^1 = \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^1$.

Die erzeugende Symmetrieebenenschar wird senkrecht zu irgend einer der drei Achsenscharen angenommen, sie kann in einer Achsenebene (Lage O) oder mitten zwischen zwei Achsenebenen (Lage M) liegen. Die Gleitspiegelebenen können Gleitrichtungen parallel einer Achse oder diagonal (schief) zu zwei der Ebene parallel liegenden Achsen haben.

$\mathfrak{V}_1$ mit $\mathfrak{C}_s^1$ in Lage O $= \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^1,\ \mathfrak{C}_s^1, \mathfrak{C}_s^1, \mathfrak{C}_s^1, \mathfrak{C}_i = \mathfrak{V}_h^1$ 165 — 172

$\mathfrak{V}_1$ mit $\mathfrak{C}_s^1$ in Lage M $= \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^1,\ \mathfrak{C}_s^1, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_i = \mathfrak{V}_h^3$

$\mathfrak{V}_1$ mit $\mathfrak{C}_s^2$ in Lage O:
- Gleitrichtung parallel einer Achse erzeugt wieder $\mathfrak{V}_h^3$
- Gleitrichtung diagonal zu den Achsen $= \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^1,\ \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_i = \mathfrak{V}_h^4$

$\mathfrak{V}_1$ mit $\mathfrak{C}_s^2$ in Lage M:
- Gleitrichtung parallel einer Achse erzeugt wieder $\mathfrak{V}_h^4$
- Gleitrichtung diagonal zu den Achsen $= \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^1,\ \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_i = \mathfrak{V}_h^2$

b) Gruppe $\mathfrak{V}_2 = \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^2$.

Wir legen die Ausgangsebene senkrecht zu der ausgezeichneten Achsenschar $\mathfrak{C}_2^2$. Lagen M und O geben keinen prinzipiellen Unterschied, da die je einem $\mathfrak{C}_2^1$ zugehörigen Achsenebenen selbst um $\frac{\tau}{4}$ verschoben sind.

$\mathfrak{B}_2$ mit $\mathfrak{C}_s^1 = \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_s^1, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_s^1, \mathfrak{C}_i = \mathfrak{B}_h^5$

$\mathfrak{B}_2$ mit $\mathfrak{C}_s^2$ — Gleitrichtung parallel einer in der Ebene liegenden Achse $= \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_i = \mathfrak{B}_h^8$

Gleitrichtung parallel einer in $\frac{\tau}{4}$-Abstand befindlichen Achse $= \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_s^1, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_i = \mathfrak{B}_h^7$

Gleitrichtung diagonal zu den der Ebene parallelen Achsen $= \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_i = \mathfrak{B}_h^6$

c) Gruppe $\mathfrak{B}^3 = \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_2^1$.

Die erzeugende Symmetrieebene wird senkrecht zu $\mathfrak{C}_2^1$ [173] — [180] angenommen. Lagen M und O kommen in Frage. Die der Symmetrieebene parallelen Achsen sind von gleichem Charakter und liegen entweder beide in einer Symmetrieebene (Lage O) oder in $\frac{\tau}{4}$ über einer Symmetrieebene (Lage M).

$\mathfrak{B}^3$ mit $\mathfrak{C}_s^1$: Lage O $= \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_s^1, \mathfrak{C}_i = \mathfrak{B}_h^9$; Lage M $= \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_s^1, \mathfrak{C}_i = \mathfrak{B}_h^{12}$

$\mathfrak{B}^3$ mit $\mathfrak{C}_s^2$, Lage O:

Gleitrichtung parallel einer Achse $= \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_s^1, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_i = \mathfrak{B}_h^{11}$

Gleitrichtung diagonal zu den Achsen $= \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_s^1, \mathfrak{C}_s^1, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_i = \mathfrak{B}_h^{13}$

$\mathfrak{B}^3$ mit $\mathfrak{C}_s^2$, Lage M:

Gleitrichtung parallel einer Achse $= \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_i = \mathfrak{B}_h^{14}$

Gleitrichtung diagonal zu den Achsen $= \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_i = \mathfrak{B}_h^{10}$

d) Gruppe $\mathfrak{B}^4 = \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_2^2$.

Die erzeugende Symmetrieebene liegt senkrecht zu irgend einer der gleichartigen Achsenscharen. Die Achsenebenen folgen sich selbst im Abstande $\frac{\tau}{4}$.

$\mathfrak{B}^4$ mit $\mathfrak{C}_s^1 = \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_s^1, \mathfrak{C}_i = \mathfrak{B}_h^{16}$

$\mathfrak{B}^4$ mit $\mathfrak{C}_s^2$: Gleitrichtung parallel einer in der Ebene liegenden Achse; Gleitrichtung diagonal zu den der Ebene parallelen Achsen — erzeugt wieder $\mathfrak{B}_h^{16}$

Gleitrichtung parallel einer um $\frac{\tau}{4}$ verschobenen Achse $= \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_i = \mathfrak{B}_h^{15}$

In den übrigen $\mathfrak{B}$-Gruppen treten Achsenscharen $\mathfrak{C}_2^3$ auf. Senkrecht zu diesen sind immer Ebenenscharen $\mathfrak{C}_s^3$ oder $\mathfrak{C}_s^4$.

e) Gruppe $\mathfrak{B}^6 = \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^1$. Wir legen die Ausgangssymmetrieebene senkrecht zu $\mathfrak{C}_2^1$, ist sie eine Gleitspiegelebene, so kann sie wegen

der Achsenverteilung nur Gleitkomponenten in Richtung der zur Symmetrieebene parallelen Achsen besitzen (nicht diagonal, weil sonst Drehungsachsen in Schraubenachsen überführt würden. In der Lage O fallen Achsen beider Gruppen $\mathfrak{C}_2^3$ in die Ebene, in der Lage M liegen sie in $\frac{\tau}{4}$-Abstand darüber. 181 — 184

$\mathfrak{V}^6$ mit $\mathfrak{C}_s^1$ ⟨ Lage O $= \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_s^3, \mathfrak{C}_s^3, \mathfrak{C}_s^1, \mathfrak{C}_i = \mathfrak{B}_h^{19}$
Lage M $= \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_s^4, \mathfrak{C}_s^4, \mathfrak{C}_s^1, \mathfrak{C}_i = \mathfrak{B}_h^{20}$

$\mathfrak{V}^6$ mit $\mathfrak{C}_s^2$ ⟨ Lage O $= \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_s^3, \mathfrak{C}_s^3, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_i = \mathfrak{B}_h^{21}$
Lage M $= \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^1, \mathfrak{C}_s^4, \mathfrak{C}_s^4, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_i = \mathfrak{B}_h^{22}$

f) Gruppe $\mathfrak{V}^5 = \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^2$.

Die erzeugende Symmetrieebene wird senkrecht zu $\mathfrak{C}_2^2$ angenommen. Die Achsenebenen folgen hier selbst im Abstande $\frac{\tau}{4}$ aufeinander, so daß Lage O und M nur stellungsverschiedenen, sonst gleichartigen Wert besitzen.

$\mathfrak{V}^5$ ⟨ mit $\mathfrak{C}_s^1 = \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_s^4, \mathfrak{C}_s^3, \mathfrak{C}_s^1, \mathfrak{C}_i = \mathfrak{B}_h^{17}$ 185 186
mit $\mathfrak{C}_s^2 = \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^2, \mathfrak{C}_s^4, \mathfrak{C}_s^3, \mathfrak{C}_s^2, \mathfrak{C}_i = \mathfrak{B}_h^{18}$

Die Gleitrichtung ist einer Achsenrichtung parallel.

g) Gruppe $\mathfrak{V}^7 = \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3$ in Anordnung $\mathfrak{V}^7$.
(Winkel β der Fig. 39 Seite 71 $= 90^0$.)

Kombinierte Achsenebenen (Drehungsachsen und Schraubenachsen enthaltend) folgen sich in Abständen aufeinander, die $\frac{1}{4}$ der primitiven Translation in Richtung des Abstandes, aber nur $\frac{1}{2}$ der Projektion einer schief dazu stehenden primitiven Strecke sind. Lage O und Lage M der erzeugenden Ebene sind daher zulässig, die Achsenverteilung bestimmt aber in beiden Fällen eindeutig die Art der Deckoperation.

In Lage O muß die Ebenenschar vom Charakter $\mathfrak{C}_s^3$ sein, in Lage M vom Charakter $\mathfrak{C}_s^4$.

$\mathfrak{V}^7$ ⟨ mit $\mathfrak{C}_s^3 = \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_s^3, \mathfrak{C}_s^3, \mathfrak{C}_s^3, \mathfrak{C}_i = \mathfrak{B}_h^{23}$ 187 188
mit $\mathfrak{C}_s^4 = \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_s^4, \mathfrak{C}_s^4, \mathfrak{C}_s^4, \mathfrak{C}_i = \mathfrak{B}_h^{24}$

h) Gruppe $\mathfrak{V}^8 = \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3$.

Es folgen parallel den Symmetrieebenen Achsenebenen mit lauter Drehungsachsen auf Achsenebenen mit lauter Schraubenachsen. Die erzeugende Symmetrieebene kann daher nur auf die Achsenebenen selbst fallen. Entweder ist die durch Drehungsachsen oder die durch Schraubenachsen gehende Ebene Spiegelebene. Im letzteren Fall treten dann auch Gleitspiegelebenen mit diagonaler und den Achsen paralleler Gleitrichtung auf, so daß diese als erzeugende Operationen nichts Neues liefern. 189 190

$\mathfrak{V}^8$ mit ⟨ $\mathfrak{C}_s^3$ durch Drehungsachsen $= \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_s^3, \mathfrak{C}_s^3, \mathfrak{C}_s^3, \mathfrak{C}_i = \mathfrak{B}_h^{25}$
$\mathfrak{C}_s^3$ durch Schraubenachsen $= \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_s^4, \mathfrak{C}_s^4, \mathfrak{C}_s^3, \mathfrak{C}_i = \mathfrak{B}_h^{26}$

i) Gruppe $\mathfrak{B}^9 = \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3$.

Auch hier folgen, auf eine Parallelschar bezogen, Ebenen mit Drehungsachsen auf Ebenen mit Schraubenachsen. Die betreffenden Achsenebenen enthalten aber immer noch Achsen anderer Art einer dazu senkrechten Richtung.

$\mathfrak{B}^9$ mit $\begin{cases} \mathfrak{C}_s^3 = \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_s^4, \mathfrak{C}_s^3, \mathfrak{C}_s^3, \mathfrak{C}_i = \mathfrak{B}_h^{28} \\ \mathfrak{C}_s^4 = \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_s^4, \mathfrak{C}_s^4, \mathfrak{C}_s^4, \mathfrak{C}_i = \mathfrak{B}_h^{27} \end{cases}$ [191] [192]

XXVII. Raumsysteme mit einer trigonalen Achsenschar, drei darauf senkrecht stehenden polaren digonalen, gleichwertigen Achsenscharen, drei der Hauptachse parallelen gleichwertigen und einer darauf senkrecht stehenden, ungleichwertigen Symmetrieebenenschar

Die Achsenraumsysteme $\mathfrak{D}_3$ kombiniert mit einer Symmetrieebenenschar genügen zur Ableitung. Die der Hauptachse parallelen Symmetrieebenenscharen ergeben sich nach Satz 11 Seite 58.

Gemäß den Erörterungen auf Seite 57 sind nur Gruppen $\mathfrak{D}_3^1$ und $\mathfrak{D}_3^2$ mit senkrecht zur Hauptachse stehenden Symmetrieebenen kombinierbar. Eine Gleitspiegelung kann nicht auftreten, die Symmetrieebenen müssen also Scharen $\mathfrak{C}_s^1$ bilden. Die digonalen Achsen können in den Spiegelebenen liegen (Lage O) oder um $\frac{\tau}{4}$ verschoben sein (Lage M).

$\mathfrak{D}_3^1$ mit $\mathfrak{C}_s^1$ $\begin{cases} \text{Lage O erzeugt } \mathfrak{C}_s^3 \mathfrak{C}_s^3 \mathfrak{C}_s^3 = \mathfrak{D}_{3h}^1 \\ \text{Lage M erzeugt } \mathfrak{C}_s^4 \mathfrak{C}_s^4 \mathfrak{C}_s^4 = \mathfrak{D}_{3h}^2 \end{cases}$ [193] — [196]

$\mathfrak{D}_3^2$ mit $\mathfrak{C}_s^1$ $\begin{cases} \text{Lage O erzeugt } \mathfrak{C}_s^3 \mathfrak{C}_s^3 \mathfrak{C}_s^3 = \mathfrak{D}_{3h}^3 \\ \text{Lage M erzeugt } \mathfrak{C}_s^4 \mathfrak{C}_s^4 \mathfrak{C}_s^4 = \mathfrak{D}_{3h}^4 \end{cases}$

XXVIII. Raumsysteme mit einer tetragonalen Achsenschar, zwei + zwei senkrecht darauf stehenden digonalen Achsenscharen, zwei + zwei der Hauptachse parallelen Symmetrieebenenscharen, einer senkrecht zur Hauptachse liegenden Symmetrieebenenschar und einer Schar von Symmetriezentren

Die eine derartige Symmetrie aufweisenden Raumsysteme lassen sich aus Achsensystemen $\mathfrak{D}_4$ in Kombination mit einer Schar senkrecht zur Hauptachse stehender Symmetrieebenen ableiten. Die 2 + 2 parallel den tetragonalen Achsen stehenden Symmetrieebenenscharen ergeben sich nach Satz 11 Seite 58. In Frage kommen $\mathfrak{D}_4^1, \mathfrak{D}_4^2, \mathfrak{D}_4^5, \mathfrak{D}_4^6, \mathfrak{D}_4^9, \mathfrak{D}_4^{10}$. Die Scharen senkrecht zu $\mathfrak{D}_4^1 — \mathfrak{D}_4^6$ sind vom Charakter $\mathfrak{C}_s^1$ oder $\mathfrak{C}_s^2$, die Scharen senkrecht zu $\mathfrak{D}_4^9$ und $\mathfrak{D}_4^{10}$ hingegen vom Charakter $\mathfrak{C}_s^3$ oder $\mathfrak{C}_s^4$. Die Gleitrichtung ist durch die Achsenverteilung stets eindeutig bestimmt. Die Symmetrieebenen sind digonale Achsenebenen

(Lage O) oder sie liegen mitten zwischen zwei Achsenebenen (Lage M). Die Symmetriezentren sind in ihrer speziellen Lage durch Satz 10 Seite 57 gegeben.

$$\mathfrak{D}_4^1 \begin{cases} \text{mit } \mathfrak{C}_s^1 \begin{cases} \text{Lage O erzeugt } \mathfrak{C}_s^1\,\mathfrak{C}_s^1,\ \mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3,\ \mathfrak{C}_i = \mathfrak{D}_{4h}^1 \\ \text{Lage M erzeugt } \mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2,\ \mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4,\ \mathfrak{C}_i = \mathfrak{D}_{4h}^2 \end{cases} \\ \text{mit } \mathfrak{C}_s^2 \begin{cases} \text{Lage O erzeugt } \mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2,\ \mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3,\ \mathfrak{C}_i = \mathfrak{D}_{4h}^3 \\ \text{Lage M erzeugt } \mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2,\ \mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4,\ \mathfrak{C}_i = \mathfrak{D}_{4h}^4 \end{cases} \end{cases} \boxed{197} - \boxed{204}$$

$$\mathfrak{D}_4^2 \begin{cases} \text{mit } \mathfrak{C}_s^1 \begin{cases} \text{Lage O erzeugt } \mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2,\ \mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3,\ \mathfrak{C}_i = \mathfrak{D}_{4h}^5 \\ \text{Lage M erzeugt } \mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2,\ \mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4,\ \mathfrak{C}_i = \mathfrak{D}_{4h}^6 \end{cases} \\ \text{mit } \mathfrak{C}_s^2 \begin{cases} \text{Lage O erzeugt } \mathfrak{C}_s^1\,\mathfrak{C}_s^1,\ \mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3,\ \mathfrak{C}_i = \mathfrak{D}_{4h}^7 \\ \text{Lage M erzeugt } \mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2,\ \mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4,\ \mathfrak{C}_i = \mathfrak{D}_{4h}^8 \end{cases} \end{cases}$$

In $\mathfrak{D}_4^5$ folgen sich die Achsenebenen selbst im Abstande $\frac{\tau}{4}$, die eine Ebene enthält aber Achsenscharen $\mathfrak{C}_2^1$, die andere $\mathfrak{C}_2^3$. Als Lage O bezeichnen wir die Koinzidenz einer Symmetrieebene mit einer Achsenebene $\mathfrak{C}_2^1\,\mathfrak{C}_2^1$.

$$\mathfrak{D}_4^5 \begin{cases} \text{mit } \mathfrak{C}_s^1 \begin{cases} \text{Lage O erzeugt } \mathfrak{C}_s^1\,\mathfrak{C}_s^1,\ \mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4,\ \mathfrak{C}_i = \mathfrak{D}_{4h}^9 \\ \text{Lage M erzeugt } \mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2,\ \mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3,\ \mathfrak{C}_i = \mathfrak{D}_{4h}^{10} \end{cases} \\ \text{mit } \mathfrak{C}_s^2 \begin{cases} \text{Lage O erzeugt } \mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2,\ \mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4,\ \mathfrak{C}_i = \mathfrak{D}_{4h}^{11} \\ \text{Lage M erzeugt } \mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2,\ \mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3,\ \mathfrak{C}_i = \mathfrak{D}_{4h}^{12} \end{cases} \end{cases} \boxed{205} - \boxed{216}$$

Ähnlich verhält sich $\mathfrak{D}_4^6$. Die O-Achsenebene ist die Ebene $\mathfrak{C}_2^2\,\mathfrak{C}_2^2$.

$$\mathfrak{D}_4^6 \begin{cases} \text{mit } \mathfrak{C}_s^1 \begin{cases} \text{Lage O erzeugt } \mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2,\ \mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4,\ \mathfrak{C}_i = \mathfrak{D}_{4h}^{13} \\ \text{Lage M erzeugt } \mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2,\ \mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3,\ \mathfrak{C}_i = \mathfrak{D}_{4h}^{14} \end{cases} \\ \text{mit } \mathfrak{C}_s^2 \begin{cases} \text{Lage O erzeugt } \mathfrak{C}_s^1\,\mathfrak{C}_s^1,\ \mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4,\ \mathfrak{C}_i = \mathfrak{D}_{4h}^{15} \\ \text{Lage M erzeugt } \mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2,\ \mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3,\ \mathfrak{C}_i = \mathfrak{D}_{4h}^{16} \end{cases} \end{cases}$$

In $\mathfrak{D}_4^9$ muß durch eine Symmetrieebene jede tetragonale Achse in sich selbst übergeführt werden, es kommen nur Scharen $\mathfrak{C}_s^3$ in Frage. In $\mathfrak{D}_4^{10}$ muß die linke tetragonale Achse in die rechte überführt werden, das schließt reine Spiegelung als Deckoperation aus. Die Lagen O und M entsprechen Achsenebenen.

Lage M von $\mathfrak{D}_4^9$ enthält aber nur Drehungsachsen zweier Richtungen. In $\mathfrak{D}_4^{10}$ liegen sogar nur Drehungsachsen von einerlei Richtung in den Symmetrieebenen, die Gleitspiegelung kann dann parallel oder senkrecht zu dieser Achsenrichtung erfolgen und darnach lassen sich Lagen O und M voneinander unterscheiden.

$$\mathfrak{D}_4^9 \begin{cases} \mathfrak{C}_s^3 \text{ Lage O erzeugt } \mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3,\ \mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3,\ \mathfrak{C}_i = \mathfrak{D}_{4h}^{17} \\ \mathfrak{C}_s^3 \text{ Lage M erzeugt } \mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3,\ \mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4,\ \mathfrak{C}_i = \mathfrak{D}_{4h}^{18} \end{cases}$$

$$\mathfrak{D}_4^{10} \begin{cases} \mathfrak{C}_s^4 \text{ Lage O erzeugt } \mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4,\ \mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4,\ \mathfrak{C}_i = \mathfrak{D}_{4h}^{20} \\ \mathfrak{C}_s^4 \text{ Lage M erzeugt } \mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4,\ \mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3,\ \mathfrak{C}_i = \mathfrak{D}_{4h}^{19} \end{cases}$$

Hier mag es am Platze sein, an einem Beispiel zu zeigen, wie zur Ableitung sehr oft auch mit Vorteil zwei komplexe Untergruppen ver-

wendet werden können. Jede Raumgruppe $\mathfrak{D}_{4h}$ enthält zwei Untergruppen $\mathfrak{V}_d$ in sich. Bezieht sich die eine, sofern die horizontalen digonalen Achsen zu Koordinatenachsen gewählt werden, auf ein einfach primitives Elementarparallelepiped, so bezieht sich die andere auf ein basisflächenzentriertes. Zu einer Gruppe $\mathfrak{V}_d^1 - \mathfrak{V}_d^4$ gehört also eine Gruppe $\mathfrak{V}_d^5 - \mathfrak{V}_d^8$. Ebenso sind zu kombinieren $\mathfrak{V}_d^9 - \mathfrak{V}_d^{10}$ mit einer Gruppe $\mathfrak{V}_d^{11}$ oder $\mathfrak{V}_d^{12}$. Man ersieht sofort, daß $4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 20$ Kombinationen möglich sind. Wie sie sich auf die tetragonal holoedrischen Raumgruppen verteilen, zeigen die beiden nachstehenden Tabellen:

	$\mathfrak{V}_d^1$	$\mathfrak{V}_d^2$	$\mathfrak{V}_d^3$	$\mathfrak{V}_d^4$
$\mathfrak{V}_d^5$	$\mathfrak{D}_{4h}^1$	$\mathfrak{D}_{4h}^9$	$\mathfrak{D}_{4h}^7$	$\mathfrak{D}_{4h}^{15}$
$\mathfrak{V}_d^6$	$\mathfrak{D}_{4h}^{10}$	$\mathfrak{D}_{4h}^2$	$\mathfrak{D}_{4h}^{16}$	$\mathfrak{D}_{4h}^8$
$\mathfrak{V}_d^7$	$\mathfrak{D}_{4h}^3$	$\mathfrak{D}_{4h}^{11}$	$\mathfrak{D}_{4h}^5$	$\mathfrak{D}_{4h}^{13}$
$\mathfrak{V}_d^8$	$\mathfrak{D}_{4h}^{12}$	$\mathfrak{D}_{4h}^4$	$\mathfrak{D}_{4h}^{14}$	$\mathfrak{D}_{4h}^6$

Ferner:

	$\mathfrak{V}_d^9$	$\mathfrak{V}_d^{10}$
$\mathfrak{V}_d^{11}$	$\mathfrak{D}_{4h}^{17}$	$\mathfrak{D}_{4h}^{18}$
$\mathfrak{V}_d^{12}$	$\mathfrak{D}_{4h}^{19}$	$\mathfrak{D}_{4h}^{20}$

XXIX. Raumsysteme mit einer hexagonalen Achsenschar, drei + drei darauf senkrecht stehenden digonalen Achsenscharen, drei + drei der Hauptachse parallelen Symmetrieebenenscharen, einer senkrecht dazu stehenden Symmetrieebenenschar und einer Schar von Symmetriezentren

Zur Ableitung genügt die Kombination eines Achsenraumsystems $\mathfrak{D}_6$ mit einer Schar von Hauptsymmetrieebenen. Nur $\mathfrak{D}_6^1$ und $\mathfrak{D}_6^6$ sind nach Satz 9 Seite 56 zulässig. Ebenda ist angegeben, warum nur Spiegelebenen in Frage kommen. Bei Anwesenheit von $\mathfrak{D}_6^1$ können die Spiegelebenen mit digonalen Achsenebenen zusammenfallen oder mitten zwischen ihnen liegen. In $\mathfrak{D}_6^6$ besitzen die digonalen Drehungsachsen der Richtung s und der Richtung d Abstände von $\frac{\tau_z}{4}$ in der Hauptachsenrichtung voneinander, die Symmetrieebene kann mit der einen oder anderen Achsenebene koinzidieren.

Das ergibt für $\mathfrak{D}_6^1$ und für $\mathfrak{D}_6^6$ je zwei mögliche Fälle:

$\mathfrak{D}_6^1$ / $\mathfrak{C}_s^1$ erzeugt $\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{D}_{6h}^1$ — 217 — 220

$\mathfrak{D}_6^1$ \ $\mathfrak{C}_s^1$ erzeugt $\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{D}_{6h}^2$

$\mathfrak{D}_6^6$ / $\mathfrak{C}_s^1$ erzeugt $\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{D}_{6h}^3$

$\mathfrak{D}_6^6$ \ $\mathfrak{C}_s^1$ erzeugt $\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{D}_{6h}^4$

Die der Hauptachse parallelen Symmetrieebenen, sowie die Symmetriezentren, bestimmen sich nach den Sätzen 10 und 11 auf Seite 58. Auch mittels der je vorhandenen zwei Untergruppen der rhomboedrischen Abteilung (von hexagonaler Translationsgruppe) ist die Ableitung einfach durchzuführen.

Beispielsweise lassen sich die folgenden zwei kleinen Tabellen aufstellen:

1.

	$\mathfrak{C}_{3v}^{1}$	$\mathfrak{C}_{3v}^{3}$
$\mathfrak{C}_{3v}^{2}$	$\mathfrak{D}_{6h}^{1}$	$\mathfrak{D}_{6h}^{3}$
$\mathfrak{C}_{3v}^{4}$	$\mathfrak{D}_{6h}^{4}$	$\mathfrak{D}_{6h}^{2}$

oder

2.

	$\mathfrak{D}_{3d}^{1}$	$\mathfrak{D}_{3d}^{2}$
$\mathfrak{D}_{3d}^{3}$	$\mathfrak{D}_{6h}^{1}$	$\mathfrak{D}_{6h}^{4}$
$\mathfrak{D}_{3d}^{4}$	$\mathfrak{D}_{6h}^{3}$	$\mathfrak{D}_{6h}^{2}$

XXX. Raumsysteme mit drei gleichwertigen tetragonalen Achsenscharen, sechs gleichwertigen digonalen und vier gleichwertigen trigonalen Achsenscharen, ferner mit drei Scharen gleichwertiger Hauptsymmetrieebenen, sechs Scharen von gleichwertigen Nebensymmetrieebenen und einer Schar von Symmetriezentren, welche die trigonalen Achsenscharen zu hexagonalen Drehspiegelachsenscharen erweitern

Zur Ableitung genügen die Achsenraumsysteme $\mathfrak{O}$ in 221 — 230 Kombination mit, auf den tetragonalen Achsen senkrecht stehenden, Symmetrieebenenscharen. Symmetriezentren und Nebensymmetrieebenen ergeben sich nach den auf Seite 57 erörterten Sätzen.

Die Gruppen $\mathfrak{O}^{6}$, $\mathfrak{O}^{7}$ sind für die Ableitung nicht brauchbar (Satz 9 Seite 56). Die Lagen O und M der erzeugenden Symmetrieebenen entsprechen denjenigen der Raumgruppen $\mathfrak{D}_{4h}$, doch bedingt hier die Art der Deckoperation bereits die Lage.

a) $\mathfrak{O}^{1}$ entsprechend $\mathfrak{D}_{4}^{1}$:

$\mathfrak{O}^{1}$ mit $\mathfrak{C}_s^{1}\mathfrak{C}_s^{1}\mathfrak{C}_s^{1}$ (Lage O) erzeugt $\mathfrak{C}_s^{3}\mathfrak{C}_s^{3}\mathfrak{C}_s^{3}\mathfrak{C}_s^{3}\mathfrak{C}_s^{3}\mathfrak{C}_s^{3}$, $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{O}_h^{1}$

$\mathfrak{O}^{1}$ mit $\mathfrak{C}_s^{2}\mathfrak{C}_s^{2}\mathfrak{C}_s^{2}$ (Lage M) erzeugt $\mathfrak{C}_s^{4}\mathfrak{C}_s^{4}\mathfrak{C}_s^{4}\mathfrak{C}_s^{4}\mathfrak{C}_s^{4}\mathfrak{C}_s^{4}$, $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{O}_h^{2}$

b) $\mathfrak{O}^{2}$ entsprechend $\mathfrak{D}_{4}^{5}$:

$\mathfrak{O}^{2}$ mit $\mathfrak{C}_s^{1}\mathfrak{C}_s^{1}\mathfrak{C}_s^{1}$ (Lage O) erzeugt $\mathfrak{C}_s^{4}\mathfrak{C}_s^{4}\mathfrak{C}_s^{4}\mathfrak{C}_s^{4}\mathfrak{C}_s^{4}\mathfrak{C}_s^{4}$, $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{O}_h^{3}$

$\mathfrak{O}^{2}$ mit $\mathfrak{C}_s^{2}\mathfrak{C}_s^{2}\mathfrak{C}_s^{2}$ (Lage M) erzeugt $\mathfrak{C}_s^{3}\mathfrak{C}_s^{3}\mathfrak{C}_s^{3}\mathfrak{C}_s^{3}\mathfrak{C}_s^{3}\mathfrak{C}_s^{3}$, $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{O}_h^{4}$

c) $\mathfrak{O}^{3}$ entsprechend $\mathfrak{D}_{4}^{9}$ nur mit $\mathfrak{C}_s^{3}$ kombinierbar:

$\mathfrak{O}^{3}$ mit $\mathfrak{C}_s^{3}\mathfrak{C}_s^{3}\mathfrak{C}_s^{3}$ (Lage O) erzeugt $\mathfrak{C}_s^{3}\mathfrak{C}_s^{3}\mathfrak{C}_s^{3}\mathfrak{C}_s^{3}\mathfrak{C}_s^{3}\mathfrak{C}_s^{3}$, $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{O}_h^{5}$

$\mathfrak{O}^{3}$ mit $\mathfrak{C}_s^{3}\mathfrak{C}_s^{3}\mathfrak{C}_s^{3}$ (Lage M) erzeugt $\mathfrak{C}_s^{4}\mathfrak{C}_s^{4}\mathfrak{C}_s^{4}\mathfrak{C}_s^{4}\mathfrak{C}_s^{4}\mathfrak{C}_s^{4}$, $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{O}_h^{6}$

d) $\mathfrak{O}^{4}$ entsprechend $\mathfrak{D}_{4}^{10}$ nur mit $\mathfrak{C}_s^{4}$ kombinierbar:

$\mathfrak{O}^{4}$ mit $\mathfrak{C}_s^{4}\mathfrak{C}_s^{4}\mathfrak{C}_s^{4}$ (Lage O) erzeugt $\mathfrak{C}_s^{4}\mathfrak{C}_s^{4}\mathfrak{C}_s^{4}\mathfrak{C}_s^{4}\mathfrak{C}_s^{4}\mathfrak{C}_s^{4}$, $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{O}_h^{8}$

$\mathfrak{O}^{4}$ mit $\mathfrak{C}_s^{4}\mathfrak{C}_s^{4}\mathfrak{C}_s^{4}$ (Lage M) erzeugt $\mathfrak{C}_s^{3}\mathfrak{C}_s^{3}\mathfrak{C}_s^{3}\mathfrak{C}_s^{3}\mathfrak{C}_s^{3}\mathfrak{C}_s^{3}$, $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{O}_h^{7}$

e) $\mathfrak{O}^{5}$ entsprechend $\mathfrak{D}_{4}^{9}$ bei anderer Auffassung von Haupt- und Nebensymmetrieebenen als in $\mathfrak{O}^{3}$, sowie $\mathfrak{O}^{8}$ (entsprechend $\mathfrak{D}_{4}^{10}$), geben nur je ein mögliches neues Raumsystem:

$\mathfrak{O}^{5}$ mit $\mathfrak{C}_s^{3}\mathfrak{C}_s^{3}\mathfrak{C}_s^{3}$ erzeugt (Lage O) $\mathfrak{C}_s^{3}\mathfrak{C}_s^{3}\mathfrak{C}_s^{3}\mathfrak{C}_s^{3}\mathfrak{C}_s^{3}\mathfrak{C}_s^{3}$, $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{O}_h^{9}$

$\mathfrak{O}^{8}$ mit $\mathfrak{C}_s^{4}\mathfrak{C}_s^{4}\mathfrak{C}_s^{4}$ erzeugt (Lage M) $\mathfrak{C}_s^{4}\mathfrak{C}_s^{4}\mathfrak{C}_s^{4}\mathfrak{C}_s^{4}\mathfrak{C}_s^{4}\mathfrak{C}_s^{4}$, $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{O}_h^{10}$

Damit ist ein Weg der Ableitung aller möglichen verschiedenartigen Kombinationen von Symmetrieelementen eines homogenen Diskontinuums

skizziert. Weitere Kombinationsmöglichkeiten, die zu neuen Resultaten führen, gibt es nicht. Entweder führen von dem eingeschlagenen Weg abweichende Versuche, worauf mehrfach hingewiesen wurde, infolge der in den Sätzen 1—11 Seite 44—58 niedergelegten gegenseitigen Bedingtheiten zum gleichen Endresultat oder aber es entstehen bei Kombinationen von Symmetrieelementen in anderer gegenseitiger Lage unendlich viele nichtidentische Symmetrieelementscharen, was mit den Eigenschaften eines homogenen Diskontinuums unverträglich ist. Es gibt somit 230 in bezug auf die Symmetrieeigenschaften (Art, Zahl und relative gegenseitige Lage der Symmetrieelemente) verschiedengeartete Raumsysteme homogener Diskontinua.

Nicht Rücksicht genommen wurde bei der Ableitung auf die absoluten Größen der Identitätsabstände. Jedem Raumsystem kommen in dieser Beziehung unendlich viele Möglichkeiten zu. Die jeweilen vorhandene Translationsgruppe muß nur den durch die Symmetrieelemente gegebenen Bedingungen, die wir bald im einzelnen erläutern werden, gehorchen. Durch die Angabe irgend eines primitiven Translationstripels in absoluter Länge und Winkelgröße ist in dieser Hinsicht irgend ein Sonderfall eines Raumsystemes bestimmt.

4. Einteilung und Gruppierung der Raumsysteme

Zur Erlangung eines Überblickes müssen wir versuchen die Raumsysteme zu größeren Einheiten zusammenzufassen, zu gruppieren. Das kann nach verschiedenen Prinzipien geschehen und wird von dem Zweck abhängig sein, den wir dabei verfolgen. So ließen sich beispielsweise die Raumsysteme, die nur Drehungsachsen enthalten, von denen sondern, die Drehungsachsen und Schraubenachsen oder nur Schraubenachsen enthalten. Ebenso die Raumsysteme mit Spiegelebenen von denen mit Spiegelebenen und Gleitspiegelebenen oder mit Gleitspiegelebenen allein usw. Bei der Ableitung und in der Bezeichnungsweise ist bereits ein anderes Klassifikationsprinzip zum Ausdruck gekommen, das wir zunächst erläutern müssen. Die Symmetrieelemente hatten wir zu: Symmetrieachsen, Symmetrieebenen, Drehspiegelachsen mit Drehspiegelebenen, Symmetriezentren zusammengefaßt. Die Achsen ihrerseits wurden zunächst nach der Zähligkeit, das heißt nach der Größe des mit der Deckoperation in Verbindung stehenden Drehwinkels, gesondert. Wir nannten dann (immer in Anlehnung an die Schoenfliessche Darstellung) eine Parallelschar von Symmetrieelementen einer n-zählige Achse, einer Symmetrieebene oder einem Symmetriezentrum, isomorph, wenn sich die Schar infolge der Translationseigenschaften des homogenen Diskontinuums aus der Annahme einer einzigen n-zähligen Symmetrieachse

(Drehungsachse oder Schraubenachse), einer einzigen Symmetrieebene (Spiegelebene oder Gleitspiegelebene), einer einzigen n-zähligen Drehspiegelachse oder eines einzigen Symmetriezentrums mittels der Decktransformationsbedingungen ergab. Gleiche isomorphe Parallelscharen von Achsen müssen also nur in der Zähligkeit der Achsen, beziehungsweise der Größe der Drehwinkel, miteinander übereinstimmen. Nun sollen alle diejenigen Raumsysteme zusammengefaßt werden, welche die gleiche Zahl gleicher isomorpher Parallelscharen von Symmetrieelementen besitzen. Die Sätze 4—7 (Seite 46—55) zeigen, daß dann auch die Winkel, welche die Scharen miteinander bilden, sich entsprechen. Es ist dabei gleichgültig, ob sich die Scharen selbst aus Drehungsachsen oder Schraubenachsen, aus Spiegelebenen oder Gleitspiegelebenen, zusammensetzen. Bereits die Ableitung ist nach diesen Gesichtspunkten vorgenommen worden, und die so zusammenfaßbaren Raumsysteme erhielten das gleiche Hauptsymbol, dem zur eigentlichen Unterscheidung nur noch Indexziffern rechts oben angehängt wurden. Derartig zusammengefaßte Raumsysteme bilden eine Klasse. Es gibt 32 verschiedene Klassen von Raumsystemen, sie werden durch die Hauptsymbole ohne Spezialnumerierung gekennzeichnet.

Die in den Decktransformationsbedingungen auftretenden Winkel sind für alle einer Klasse zugehörigen Raumsysteme gleich, verschieden sind die damit in Verbindung stehenden Verschiebungsgrößen. Die große Bedeutung einer Zusammenfassung der 230 Raumsysteme in 32 Klassen liegt in folgendem begründet. Denken wir uns die Identitätsabstände so klein, daß sie bei einer bestimmten Untersuchungsmethode als solche in keiner Weise mehr erkennbar sind, vollführen wir somit den Übergang vom Diskontinuum ins Kontinuum bezw. ins Scheinkontinuum, so lassen sich auch n-zählige Schraubenachsen nicht mehr von n-zähligen Drehungsachsen, Gleitspiegelebenen nicht mehr von Spiegelebenen unterscheiden. Alle einer n-zähligen Achsenschar parallelen Geraden scheinen dann n-zählige Drehungsachsen zu sein, alle einer Symmetrieebenenschar parallele Ebenen Spiegelebenen, jeder Punkt erscheint jedem anderen Punkt identisch. Der Raum der Nichtidentität ist als solcher nicht mehr erkennbar, er ist auf Null zusammengeschrumpft. Voneinander unterscheiden lassen sich dann nur noch die 32 Klassen der Raumsysteme, nicht mehr die ein und derselben Klasse angehörigen Raumsysteme.

Die 32fache Mannigfaltigkeit entspricht der verschiedenartigen Kombinationsmöglichkeit von Symmetrieelementen eines homogenen Kontinuums, unter der Voraussetzung, daß nur 2-, 3-, 4-, 6-zählige Achsen in Frage kommen. Sie läßt sich direkt ableiten oder als Grenzbedingung aus den 230 Raumsystemen auffinden. Bei der direkten Ableitung ist zu beachten, daß in einem homogenen wirklichen Kontinuum jeder Punkt

dem anderen identisch ist. Symmetrieachsen sind daher stets Drehungsachsen, Symmetrieebenen stets Spiegelebenen. Es genügt die durch irgend einen Punkt gehenden Symmetrieelemente aufzusuchen; an Stelle der „Raumsymmetrie" tritt die „Punktsymmetrie".

Alle Sätze, die das Zusammenvorkommen der Symmetrieelemente regeln, gelten in der Spezialform Gleitkomponente = Null, Schraubungskomponente = Null, alle parallelen Geraden einander ident, auch hier. Die ganze Ableitung ist nur ein Sonderfall der Ableitung der Raumsysteme.

Da diese hier auf eine durchaus neue, und wie mir scheint konsequentere Art versucht worden ist (unter Umgehung der Polygonteilung), mag es erwünscht sein, auf die zur Ableitung der 32 Klassen nötigen Sätze kurz hinzuweisen.

Man braucht von unserem Standpunkte aus:

I. Die Grundvoraussetzung des homogenen Diskontinuums, wodurch die Zähligkeit der möglichen Achsen eingeschränkt wird. (Beweis nach Seite 34.)

II. Die Sätze über die Winkel, welche die Achsen miteinander bilden können. (Siehe die Ableitungen der Seiten 46—55.)

Das ermöglicht alle Klassen mit Symmetrieachsen aufzustellen: Man erhält außer der Klasse der einfachen Identität (monogonale Achse)

5 Klassen mit polaren höchstzähligen Achsen, vier davon mit je nur einer Achsenschar, bezw. Achse,

5 Klassen mit zweiseitigen höchstzähligen Achsen.

Total also 11 Klassen mit gewöhnlichen Achsen.

III. Die auf Seite 56 sich vorfindenden Sätze über Drehspiegelachsen, die zeigen, daß nur 3 Klassen ohne Symmetrieebenen möglich sind.

IV. Den allgemeinen Satz über die Lage der Symmetrieebenen, sowie den Satz 11 auf Seite 58 in allgemeiner Form.

Zunächst entsteht 1 Klasse, die nichts als parallele Symmetrieebenen (bezw. aufs Kontinuum bezogen eine Symmetrieebene) enthält.

Dann lassen sich zu den 5 ersten Achsenklassen den Hauptachsen parallele Symmetrieebenen beifügen. Das gibt 5 neue Klassen.

Senkrecht zu den Hauptachsen sind ebenfalls Symmetrieebenen möglich. Es entstehen wieder 5 neue Klassen.

Fügt man in paralleler oder senkrechter Lage zu den Hauptachsen der 5 zweiten Achsenklassen Symmetrieebenen hinzu, so erhält man infolge Satz 11 auf Seite 58 die anderen immer von selbst, ausgenommen in zwei Fällen, wo die parallelen Symmetrieebenen den Winkel der digonalen Achsen halbieren können, ohne selbst digonalen Nebenachsen parallel zu laufen. Das ergibt $5 + 2 = 7$ neue Klassen. Im ganzen

sind somit $1 + 5 + 5 + 5 + 2 = 18$ Klassen mit Symmetrieebenen ableitbar, das gibt mit den $11 + 3 = 14$ Klassen ohne Symmetrieebenen 32.

Der nach ausgeführter vollständiger Ableitung der 230 Raumsysteme eines Diskontinuums vorzunehmende Übergang ins Kontinuum geschieht am elegantesten mittels der Decktransformationsbedingungen. Die Transformationen irgend eines Koordinatensystems, denen Deckoperationen entsprechen, bestehen im allgemeinen aus Richtungsänderungen der Koordinatenachsen und Verschiebungen des Koordinatenanfangspunktes. Im Kontinuum, wo jeder Punkt dem anderen identisch ist, sind die letzteren bedeutungslos. Alle Raumsysteme, die sich lediglich in den Verschiebungsgrößen voneinander unterscheiden, fallen daher überein und bestimmen eine Klasse, die durch alle in den Decktransformationsbedingungen auftretenden Winkel charakterisiert ist.

Fassen wir die Kristalle als homogene Diskontinua auf, so führt die Untersuchung zu Größenordnungen der Identitätsabstände, die es begreiflich machen, daß die Körper uns in mancher Hinsicht als Kontinua erscheinen. Es gilt das sowohl für die makroskopische als für die mikroskopische Betrachtung. Für diese Betrachtungen ist die Einteilung in die 32 Klassen die einzig mögliche und unterscheidbare. Die einzeln zugehörigen Raumsysteme sind dann direkt nicht erkennbar, die Klassen sind durch Drehungsachsen, Spiegelebenen, Drehspiegelachsen und Symmetriezentrum definiert. In diesem Sinne, auf Kontinua bezogen, nennen wir die 32 Klassen Kristallsymmetrieklassen oder kurz Kristallklassen; wir geben ihnen die gleichen Symbole wie den 32 Klassen der Raumsysteme, schreiben aber die Buchstaben in lateinischer Schrift. $\mathfrak{C}_{2h}$ bedeutet somit alle möglichen Raumsysteme mit einer Parallelschar von Symmetrieebenen, einer Parallelschar darauf senkrecht stehender digonaler Achsen und einer dadurch bestimmten Schar von Symmetriezentren, C_{2h} ist die gleiche, auf Kontinua oder Scheinkontinua bezogene Kristallklasse, die durch eine Spiegelebene, eine darauf senkrecht stehende Drehungsachse und ein im Schnittpunkt befindliches Symmetriezentrum charakterisiert ist. (Bezeichnung von Schoenflies.)

Während eine kennzeichnende Einzelbenennung der 230 Raumsysteme zu komplexen Wortbildungen führen würde, die eine Übersicht nicht erleichtern sondern nur erschweren, ist sie für die 32 Kristallklassen wohl angängig[1]).

Schon die Ableitung der Raumsysteme und ihrer 32 Klassen zeigt die engen Beziehungen, die zwischen manchen Klassen vorhanden sind. Durch Hinzufügen digonaler Achsen oder paralleler, beziehungsweise

[1]) Die nachfolgend skizzierte ist seit langem in Gebrauch und von allen die einfachste und übersichtlichste. Auch Schoenflies hat sie benutzt.

senkrecht stehender Symmetrieebenenscharen konnten wir aus Raumsystemen mit einer einzigen Parallelschar digonaler, trigonaler, tetragonaler, hexagonaler Achsen, oder mit drei gleichwertigen Parallelscharen digonaler Achsen, neue Raumsysteme erzeugen. Schließlich ergab in jedem dieser Fälle gleichzeitige Kombination irgend zweier Zusatzsymmetrieelemente Raumsysteme, die alle Symmetrieelemente zusammen enthalten. Diese letzteren Klassen von Raumsystemen nennen wir holoedrische Klassen, die Klassen der einfachen Achsenscharen tetartoedrische Klassen, die Klassen, die daraus durch Kombination mit einer einzigen neuen Symmetrieelementenschar ableitbar sind, hemiedrische Klassen.

Die hemiedrischen Klassen enthalten nur einen Teil der isomorphen Parallelscharen der holoedrischen Klassen, die tetardoedrischen nur einen Teil der Parallelscharen aller Symmetrieelemente der hemiedrischen Klassen.

Hemiedrische Klassen, die nur Achsenscharen enthalten, nennen wir enantiomorph hemiedrische Klassen. Es können in ihnen entweder Raumsysteme vorkommen, die sich nur durch den Windungssinn der Achsen voneinander unterscheiden, also verhalten wie linke und rechte Hand (symmetrisch in bezug auf eine außenstehende Spiegelebene = enantiomorph), oder es lassen sich zwei Systeme zusammengehöriger Punktlagen auffinden, deren Verhalten zueinander ein derartiges ist.

Hemiedrische Klassen mit Symmetrieebenen parallel einer Achsenschar der Tetartoedrie nennen wir hemimorph hemiedrische Klassen. Die vorhandene höchstzählige Achsenschar ist hemimorph (polar), das heißt Richtung und Gegenrichtung sind ungleichwertig. Schließlich werden hemiedrische Klassen mit senkrecht zu den Hauptachsenscharen stehenden Symmetrieebenenscharen als paramorph hemiedrisch bezeichnet. Zur weiteren Charakteristik wird angegeben, ob die Ausgangsachsenscharen von digonalem, trigonalem, tetragonalem oder hexagonalem Charakter sind. Handelt es sich um drei aufeinander senkrecht stehende, gleichwertige digonale oder tetragonale Achsen (verallgemeinerte Tetraeder- oder Oktaedergruppen), so fügen wir die Bezeichnung kubisch bei, weil drei gleichwertigen Ausgangsachsenscharen die Richtungen der Kanten eines Würfels besitzen.

Darnach erhalten wir zunächst:

Digonal tetartoedrisch	$\mathfrak{C}_2$	bezw. C_2
Digonal enantiomorph hem.	$\mathfrak{B}$	bezw. V
Digonal hemimorph hem.	$\mathfrak{C}_{2v}$	bezw. C_{2v}
Digonal paramorph hem.	$\mathfrak{C}_{2h}$	bezw. C_{2h}
Digonal holoedrisch	$\mathfrak{B}_h$	bezw. V_h
Trigonal tetartoedrisch	$\mathfrak{C}_3$	bezw. C_3
Trigonal enantiomorph hem.	$\mathfrak{D}_3$	bezw. D_3

Trigonal hemimorph hem.	$\mathfrak{C}_{3v}$	bezw. C_{3v}
Trigonal paramorph hem.	$\mathfrak{C}_{3h}$	bezw. C_{3h}
Trigonal holoedrisch	$\mathfrak{D}_{3h}$	bezw. D_{3h}
Tetragonal tetartoedrisch	$\mathfrak{C}_4$	bezw. C_4
Tetragonal enantiomorph hem. . . .	$\mathfrak{D}_4$	bezw. D_4
Tetragonal hemimorph hem.	$\mathfrak{C}_{4v}$	bezw. C_{4v}
Tetragonal paramorph hem.	$\mathfrak{C}_{4h}$	bezw. C_{4h}
Tetragonal holoedrisch	$\mathfrak{D}_{4h}$	bezw. D_{4h}
Hexagonal tetartoedrisch	$\mathfrak{C}_6$	bezw. C_6
Hexagonal enantiomorph hem. . . .	$\mathfrak{D}_6$	bezw. D_6
Hexagonal hemimorph hem.	$\mathfrak{C}_{6v}$	bezw. C_{6v}
Hexagonal paramorph hem.	$\mathfrak{C}_{6h}$	bezw. C_{6h}
Hexagonal holoedrisch	$\mathfrak{D}_{6h}$	bezw. D_{6h}
Kubisch tetardoedrisch	$\mathfrak{T}$	bezw. T
Kubisch enantiomorph hem.	$\mathfrak{O}$	bezw. O
Kubisch hemimorph hem.	$\mathfrak{T}_d$	bezw. T_d
Kubisch paramorph hem.	$\mathfrak{T}_h$	bezw. T_h
Kubisch holoedrisch	$\mathfrak{O}_h$	bezw. O_h

Bei den durch Drehspiegelachsen charakterisierten Raumsystemen ist folgendes zu bedenken. Hinzufügen digonaler, senkrecht zur Hauptachse stehender Achsen erzeugt stets auch Symmetrieebenen parallel der Drehspiegelachse. Wird die Drehspiegelebene zur Symmetrieebene erhöht, so wird die n-zählige Drehspiegelachse n-zählige gewöhnliche Achse, das heißt es bildet sich eine der soeben erwähnten paramorphen Klassen. Es gibt daher jeweils höchstens eine tetartoedrische und eine hemiedrische neue Klasse, die durch n-zählige Drehspiegelachsen oder n-zählige Achsen II. Art ausgezeichnet sind.

Die durch digonale Drehspiegelachsen (Symmetriezentren) allein ausgezeichneten Raumsysteme kommen nur in einer Klasse vor, da wir keine niedriger-zähligen Nebenachsen hinzufügen können.

Das ergibt:

Digonal tetartoedrisch II. Art =	$\mathfrak{C}_i$	bezw. C_i
Tetragonal tetartoedrisch II. Art =	$\mathfrak{S}_4$	bezw. S_4
Tetragonal hemiedrisch II. Art =	$\mathfrak{V}_d$	bezw. V_d
Hexagonal tetartoedrisch II. Art =	$\mathfrak{C}_{3i}$	bezw. C_{3i}
Hexagonal hemiedrisch II. Art =	$\mathfrak{D}_{3d}$	bezw. D_{3d}

Schließlich ergeben auch die Raumsysteme, die nur monogonale Achsen (entsprechend Deckung bei einer Drehung um 360^0 = Identität) enthalten, lediglich zwei Fälle. Niedriger-zählige Achsen, die kombiniert werden könnten, gibt es nicht; die monogonalen Achsen können jede beliebige Richtung besitzen, so daß also eine beliebig gelegene Symmetrieebenenschar einzige Zusatzsymmetrie ist.

Monogonal hemiedrisch = $\mathfrak{C}_1$ bezw. C_1
Monogonal holoedrisch = $\mathfrak{C}_s$ bezw. C_s

Damit sind mit wenigen Begriffen die einzelnen Kristallklassen charakterisiert, und die Bezeichnungen geben bereits über die Zusammenhänge zwischen den Klassen Auskunft.

Ist die Hauptachse eine geradzählige (2, 4, 6), so lassen sich die paramorphen Raumsysteme auch mit dem Symmetriezentrum als Zusatzsymmetrie zu tetartoedrischen Raumsystemen ableiten, die holoedrischen Klassen mittels Hinzufügen eines Symmetriezentrums zu enantiomorphen Raumsystemen. Versucht man das gleiche in den Raumsystemen mit trigonaler Achse, so wird die hexagonal tetartoedrische Klasse II. Art paramorph hemiedrische Klasse, die hexagonal hemiedrische Klasse II. Art holoedrische Klasse. Es fallen dann weg: die trigonal paramorph hemiedrische Klasse und die trigonal holoedrische Klasse, beide können als Klassen mit trigonaler Drehspiegelachse (die ja nach Seite 36 eine trigonale Achse + senkrecht dazu stehende Symmetrieebene ergibt) aufgefaßt werden.

Bei einer derartigen Gruppierung sind die fünf einfachen Klassen mit trigonaler Achse, wie wir später sehen werden, dadurch ausgezeichnet, daß sie eine rhomboedrische Translationsgruppe besitzen können. Wir wollen sie daher zur Unterscheidung statt trigonal jetzt rhomboedrisch nennen und erhalten so die Beziehungen:

rhomboedrisch tetartoedrisch = $\mathfrak{C}_3$ bezw. C_3 = trigonal tetartoedrisch
rhomboedrisch enantiomorph hem. = $\mathfrak{D}_3$ bezw. D_3 = trigonal enantiomorph hem.
rhomboedrisch hemimorph hem. = $\mathfrak{C}_{3v}$ bezw. C_{3v} = trigonal hemimorph hem.
rhomboedrisch paramorph hem. = $\mathfrak{C}_{3i}$ bezw. C_{3i} = hexagonal tetartoedr. II. Art
rhomboedrisch holoedrisch = $\mathfrak{D}_{3d}$ bezw. D_{3d} = hexagonal hemiedrisch II. Art

Die bereits in den Bezeichnungen zum Ausdruck kommenden Zusammenhänge gestatten eine weitere Zusammenfassung der Kristallklassen.

Je nach Wahl der Ableitung erhalten wir:

		oder		
Monogonale Klassen	= 2		Monogonale Klassen	= 2
Digonale Klassen	= 5 + 1		Digonale Klassen	= 5 + 1
Trigonale Klassen	= 5		Rhomboedrische Klassen	= 5
			Trigonale Klassen II. Art	= 2
Tetragonale Klassen	= 5 + 2		Tetragonale Klassen	= 5 + 2
Hexagonale Klassen	= 5 + 2		Hexagonale Klassen	= 5
Kubische Klassen	= 5		Kubische Klassen	= 5
Total	= 32		Total	= 32

Bei der üblichen Zusammenfassung der Klassen ist noch ein weiterer Gesichtspunkt maßgebend gewesen, der eine leichte Modifikation des Schemas zur Folge hat. Zur Darstellung der geometrischen Verhältnisse eines Raumsystemes oder einer Kristallklasse benötigen wir drei nicht komplanare Koordinatenachsen als Bezugssystem. Die Beziehungen werden sich bedeutend vereinfachen, wenn diese Koordinatenachsen nicht willkürlich gewählt werden, sondern in möglichst einfache Beziehung zu den Symmetrieelementen und den durch sie ausgezeichneten Richtungen gebracht werden. Soweit das Diskontinuum in Frage kommt, wissen wir, daß die Betrachtung eines Parallelepipeds, dessen drei in einem Punkt zusammenstoßende Kanten ein primitives Tripel bilden und selbst primitive Strecken sind, zur vollständigen Darstellung eines unbegrenzt ausgedehnten Raumsystemes genügt. An der Voraussetzung, daß die Länge der Kanten, als Einheitsmaßstäbe der Koordinatenachsen, primitive Strecken sind, werden wir unter allen Umständen festhalten, es wird sich lediglich als zweckmäßig erweisen können, von der Bedingung des einfach primitiven Tripels zugunsten einfachster Lage gegenüber den Symmetrieelementen abzusehen. Der Raum eines derartigen Parallelepipeds ist dann mehrfach primitiv, er darf aber naturgemäß nicht zu vielfach primitiv sein, weil sonst der Vorteil der einfachen Beziehungen hinsichtlich der Deckoperationen durch den Nachteil einer an sich überflüssigen Betrachtung mehrerer identischer Elemente aufgewogen wird.

In zweckmäßigster Weise wird man diejenigen Richtungen primitiver Translationen zu Koordinatenachsenrichtungen wählen, welche

1. Achsenscharen parallel gehen oder senkrecht auf ihnen stehen, eventuell den Winkel gleichwertiger Scharen halbieren,
2. Symmetrieebenenscharen parallel sind oder auf ihnen senkrecht stehen, beziehungsweise die Winkel gleichwertiger Symmetrieebenenscharen halbieren.

Um nun überblicken zu können, ob bei einer derartigen Wahl die Koordinatenparallelepipede vielfach primitiv werden, müssen wir im Zusammenhang den Einfluß der Symmetrieelemente auf die Translationsgruppe d. h. auf das System der Identitätsabstände betrachten.

1. Zunächst ist ohne weiteres ersichtlich, daß die Gruppe der Translationen oder der Identitätsabstände stets von zentrosymmetrischem Charakter ist, das heißt von irgend einem Punkt einer Geraden nach beiden Richtungen hin gleiches Verhalten aufweist.

2. Die durch Drehung um $\frac{360^0}{n}$ um irgend eine der Achsen einer n-zählig isomorphen Achsenschar auseinander hervorgehenden Identitätsabstände sind einander gleich, unbekümmert darum, ob die Achsenschar aus Drehungsachsen oder Schraubenachsen oder aus beiderlei Achsen besteht. (Identitätsabstände auf parallelen Geraden sind ja einander

gleich und die Schraubung unterscheidet sich von der Drehung nur um gleichzeitige Parallelverschiebung.)

3. Die durch Spiegelung an Symmetrieebenen (Spiegelebenen oder Gleitspiegelebenen) ineinander überführbaren Geraden besitzen gleiche Identitätsabstände.

Die beiden letzteren Sätze lassen sich auch in einen Satz zusammenfassen: In gleichwertigen Richtungen sind die Identitätsabstände einander gleich.

4. In irgend einer Ebene parallel zu einer digonalen Achse gibt es immer höchstens doppeltprimitive Translationsrechtecke, deren eine Seite der primitiven Translation in der Achsenrichtung gleich ist. Beweis: Wir betrachten Fig. 46. B-A-J sei die Richtung einer digonalen Achse, die Drehungsachse oder Schraubenachse sein kann. $BA = AJ$ sei der Identitätsabstand auf dieser Achse. Mit BA bilden CA und DA ein primitives Tripel. In der Ebene BAHL ist somit BA und CA ein primitives Paar von Translationen. Nach Satz 2 muß es einen Identitätsabstand $EA = CA$ geben, wenn $\measuredangle CAB = \measuredangle BAE$. Es ist Punkt E dem Punkt C ident, so daß CE senkrecht auf BA eine primitive Translation darstellt. Ihr parallel und gleich sind AH und BL. Das Translationsrechteck BAHL ist doppeltprimitiv, es enthält im Zentrum einen mit den Eckpunkten identischen Punkt. Ebenso ist das Reckteck BAGM doppelt-

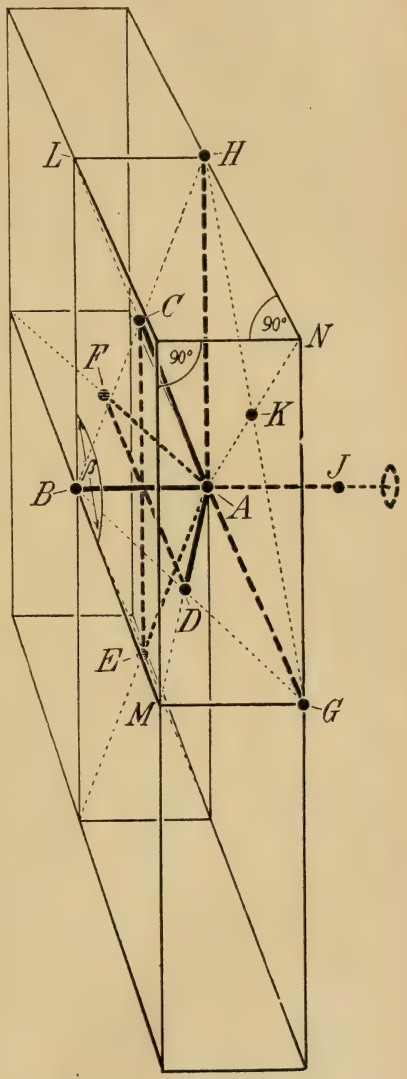


Fig. 46. Digonale Achsen und Identitätsabstände (perspektivische Figur).

primitiv. Man findet AG = BM = FD als primitive Translation in gleicher Weise. Sowohl CA als DA hatten beliebige Lage. Es wäre als Spezialfall noch möglich, daß sie senkrecht auf BA stehen würden, also BA, HA, GA selbst ein primitives Tripel bildeten. Dann wären die Translationsrechtecke in diesen Ebenen nur einfachprimitiv.

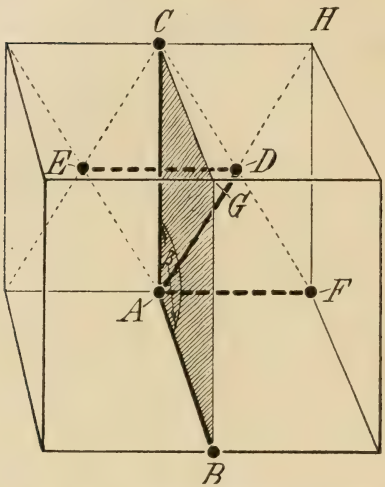


Fig. 47. Symmetrieebenen und Identitätsabstände (perspektivische Figur).

5. In Ebenen senkrecht auf einer Symmetrieebene gibt es stets Translationsrechtecke, die höchstens doppeltprimitiv sind, wenn deren eine Seite eine primitive Translation parallel der Symmetrieebene darstellt. Beweis (siehe Fig. 47): Es sei ABCG eine Symmetrieebene (Spiegelebene oder Gleitspiegelebene), BA und CA sollen darin ein primitives Paar von Identitätsabständen sein, das mit DA ein primitives Tripel bildet (bezw. DA und CA sind ein primitives Paar). Dann ist nach Satz 3 ED $\perp$ Ebene (ABCG) ebenfalls eine primitive Translation, da E mit D identisch ist. AF = CH = ED. Rechteck AFCH = doppeltprimitiv. Stände AD selbst senkrecht auf der Symmetrieebene, so wäre schon ein einfachprimitives Translationenparallelogramm ein Rechteck.

Auch über die relative Größe der aufeinander senkrecht stehenden Translationen derartiger Ebenen im Vergleich zu einem anderen komplanaren primitiven Translationspaar sind Aussagen möglich. Es seien a und b die senkrecht aufeinander stehenden Identitätsabstände. Bilden sie ein einfach primitives Rechteck, so ist $a\,b = J$, wenn J der konstante Inhalt eines primitiven Parallelogrammes der betreffenden Ebene ist. Es möge nun im Winkel ω zu a eine Translation b′ ebenfalls ein primitives Paar mit a bilden. Dann ist $a\,b' \sin\omega = J$ beziehungsweise $b' = \frac{J}{a \sin\omega}$. Da $\sin\omega$ immer ein echter Bruch ist, wird die absolute Größe von b′ stets die von b übersteigen. b ist daher in diesem Falle immer die kürzeste Translation, welche mit a in der betreffenden Ebene ein primitives Paar bildet. Ist $a\,b = 2\,J$, so werden von vornherein alle mit a ein primitives Paar bildenden Translationen b′ der Ebene,

deren Neigungswinkel gegen a kleiner als 30^0 ist, größer als b sein müssen.

$$a\,b' \sin\omega = J;\ b' = \frac{J}{a \sin\omega} \rangle \text{ als } \frac{2J}{a}, \text{ wenn } \sin\omega \langle \frac{1}{2}.$$

Der Identitätsabstand b′ vom Eckpunkt des Rechteckes zum Rechteckzentrum ist nur dann kleiner als b, wenn $\frac{b}{a} \rangle$ tg 30^0, das heißt $\rangle 0{,}57735$ ist.

Nach diesen Erörterungen ist es möglich die zweckmäßige Wahl der Koordinatenachsenparallelepipede zu diskutieren und zu untersuchen, welche Kristallklassen auf gleich zueinander stehende Koordinatenachsen bezogen werden können. Daß alle Raumsysteme einer Klasse in dieser Hinsicht auf ein und dasselbe Bezugssystem zurückgeführt werden können, geht bereits aus den Sätzen 2 und 3 hervor. Im Kontinuum bilden die Richtungen der Kanten der Parallelepipede die Richtungen der Koordinatenachsen oder, wie man sagt, der kristallographischen Achsen. Die Parallelepipede selbst mit den Identitätsabständen in diesen Richtungen als Kantenlängen nennen wir Elementarparallelepipede[1]).

Die Klassen $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_i$ stellen keine Bedingungen an die Translationsgruppe. Irgend ein primitives Tripel a, b, c mit den Winkeln α, β, γ zwischen den Translationsrichtungen kann die Kanten eines einfach primitiven Elementarparallelepipeds liefern. In den Figuren 2—4 sind derartige Elementarparallelepipede abgebildet, wir nennen sie triklin und vereinigen die beiden Klassen zu einer triklinen Abteilung.

Die Klassen $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_s$ und $\mathfrak{C}_{2h}$ sind dadurch ausgezeichnet, daß sie entweder eine einzige Schar von digonalen Achsen oder von Symmetrieebenen besitzen oder daß beide Elemente in gegenseitig rechtwinkliger Lage vorhanden sind. Eine Richtung ist in bezug auf die Symmetrieeigenschaften in allen Klassen ausgezeichnet. Es ist die Richtung parallel der digonalen Achsenschar beziehungsweise senkrecht zur Symmetrieebenenschar. Wir machen diese Richtung zur b-Koordinatenachse und setzen fest, daß die Länge von b dem Identitätsabstand in dieser Richtung gleich sein soll. Aus den Sätzen 4 und 5 ist ersichtlich, daß es senkrecht zu dieser Richtung stets primitive Translationen gibt, die mit b höchstens doppeltprimitive (zentrierte) Rechtecke bilden. Ist eine Symmetrieebenenschar vorhanden, so sind die Translationen dieser parallel. Die Figuren 46 und 47 geben direkt die konstruktiven Beweise.

[1]) Wenn a, b, c die Kanten dieser Parallelepipede sind, so nennen wir dementsprechend alle als geometrische Summen daraus ableitbaren Translationen „elementare Translationen“ und die Punktschar der Schnittpunkte „Elementarschar der Punkte“. Nicht durch Elementartranslationen auseinander ableitbare Punkte werden als nichtelementar oder elementar unabhängig bezeichnet.

Wir wählen nun zwei (nämlich a und c) von diesen Translationen senkrecht zu b aus, die selbst ein primitives Parallelogramm in der Ebene senkrecht zu b bilden. Auch die Diagonale d dieses Parallelogrammes bildet mit a oder c ein primitives Paar. Es lassen sich dann zwei mögliche Fälle unterscheiden:

I. a und c bilden mit b ein einfach primitives Tripel. Die Rechtecke a-b, c-b und d-b sind selbst einfachprimitiv und das aus a, b, c als Kanten gebildete Elementarparallelepiped ist gleichfalls einfachprimitiv.

II. Das Tripel a, b, c ist nicht einfachprimitiv.

Das Elementarparallelepiped a, b, c beherbergt daher noch weitere mit den Eckpunkten identische Punkte. Einige der primitiven Translationen der Ebene a c bilden dann sicherlich mit b nurmehr doppeltprimitive, zentrierte Rechtecke und es geht aus den Beziehungen der primitiven Translationen hervor, daß auch von den drei Translationen a, c, d e i n e sich so verhalten muß. Wären es zwei, so könnten a c oder a d oder c d kein primitives Paar mehr sein, was wir vorausgesetzt haben. Betrachten wir beispielsweise Fig. 46. Sowohl das Rechteck A B H L als das Rechteck A B G M sind doppeltprimitiv zentriert. Dann ist auch C D || der Ebene A G N H ein Identitätsabstand, woraus folgt, daß K mit A identisch ist. A H und A G bilden daher kein primitives Paar mehr, wir müßten A H und A K oder A K und A G neben B A als Kanten des einfachsten Elementarparallelepipeds wählen. Da in den Ebenen senkrecht zu b keine Richtung vor einer anderen ausgezeichnet ist, steht dem nichts im Wege. Ist nun eines der Rechtecke a b oder c b oder d b doppeltprimitiv zentriert, so ist das Elementarparallelepiped a, b, c ebenfalls doppeltprimitiv. Wir nennen es einfachflächenzentriert, wenn eine Seitenfläche a b oder c b zentriert ist, innenzentriert, wenn die Diagonalebene d b in der Mitte (d. h. in der Mitte des Parallelepipeds) einen mit den Eckpunkten identischen Punkt besitzt. Beide Möglichkeiten sind hier übrigens prinzipiell voneinander nicht verschieden, wir brauchen im letzteren Falle nur an Stelle von a oder b die primitive Translation d zur Kantenrichtung zu wählen, um ein einfachflächenzentriertes Elementarparallelepiped zu erhalten. Die Elementarparallelepipede der Klassen $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_s$ und $\mathfrak{C}_{2h}$ sind somit dadurch ausgezeichnet, daß eine der Kantenrichtungen senkrecht auf den beiden anderen steht. Diese ausgezeichnete Kante ist parallel einer digonalen Achsenschar, beziehungsweise senkrecht auf einer Symmetrieebenenschar. Die beiden anderen Kanten sind beliebig wählbar, in zweckmäßig einfachster Weise eben so, daß sie in ihrer Ebene ein primitives Paar bilden.

Von den sechs Bestimmungsgrößen eines Elementarparallelepipeds a, b, c, α, β, γ sind hier zwei eindeutig festgelegt, α und γ bilden rechte

Winkel. Elementarparallelepipede dieser Art nennen wir monoklin und wir erhalten den Satz:

Die Klassen $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_s$, $\mathfrak{C}_{2h}$ sind dadurch ausgezeichnet, daß sich immer primitive Translationen finden lassen, welche die

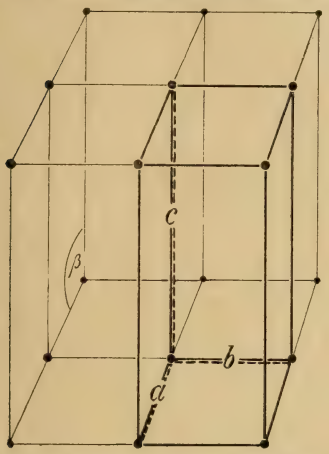


Fig. 48. Einfachprimitives, monoklines Elementarparallelepiped. (4 Elementarparallelepipede.)

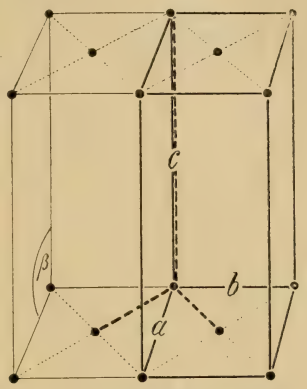


Fig. 49. Doppeltprimitives, einfach flächenzentriertes, monoklines Elementarparallelepiped.

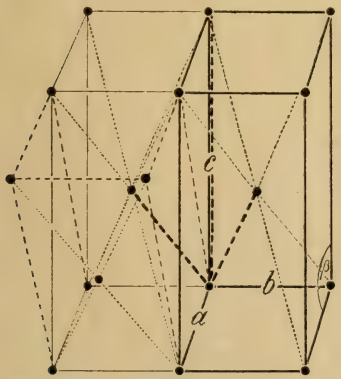


Fig. 50. Doppeltprimitives, innenzentriertes, monoklines Elementarparallelepiped. (Am Parallelepiped links ist gezeigt, wie die Umwandlung in ein einfach flächenzentriertes Elementarparallelepiped erfolgen kann.)

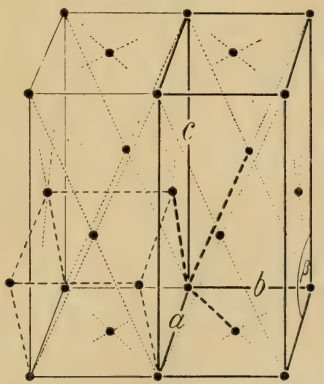


Fig. 51. Vierfachprimitives, allseitig flächenzentriertes, monoklines Elementarparallelepiped. (Das linke Elementarparallelepiped zeigt die Zurückführung auf ein einfach flächenzentriertes monoklines Elementarparallelepiped.)

Kanten eines einfach- oder höchstens doppeltprimitiven monoklinen Elementarparallelepipeds bilden. Sie werden daher zu einer monoklinen Abteilung vereinigt.

Aus den Erörterungen auf Seite 64 und Seite 78 geht hervor, daß die Raumsysteme $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^2$ infolgedessen auch $\mathfrak{C}_{2h}^1$, $\mathfrak{C}_{2h}^2$, $\mathfrak{C}_{2h}^4$, $\mathfrak{C}_{2h}^5$ stets mit einfachprimitiven monoklinen Elementarparallelepipeden in Verbindung stehen, während für $\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_{2h}^3$, $\mathfrak{C}_{2h}^6$ die Elementarparallelepipede doppeltprimitiv sind.

Die Klassen $\mathfrak{C}_{2v}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{V}_h$ besitzen, wie leicht ersichtlich, den Klassen $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_s$ oder $\mathfrak{C}_{2h}$ entsprechende Symmetrieverhältnisse in drei aufeinander senkrecht stehenden Richtungen. Drei wechselweise aufeinander senkrecht stehende, verschiedenwertige Richtungen sind dadurch ausgezeichnet, daß sie digonalen Achsen parallel gehen, auf Symmetrieebenen senkrecht stehen, oder beide Eigenschaften gleichzeitig erfüllen. Die Koordinatenachsen legen wir daher zweckmäßig in diese Richtungen und geben den Kanten des so bestimmten rhombischen Elementarparallelepipeds die Länge der betreffenden Identitätsabstände. Nach den Sätzen 4 und 5 auf Seite 105 sind die von den Seitenflächen oder Diagonalflächen gebildeten Rechtecke einfachprimitiv oder doppeltprimitiv, im letzteren Falle zentriert.

1. a, b, c die Kanten des rhombischen Elementarparallelepipeds bilden ein primitives Tripel. Alle Seiten- und Diagonalrechtecke sind einfachprimitiv wie das Elementarparallelepiped selbst. Zwei nächste identische Achsen oder Symmetrieebenen werden durch senkrecht darauf stehende Translationen miteinander verbunden, die Raumsysteme[1]) $\mathfrak{V}^1$—$\mathfrak{V}^1$, $\mathfrak{C}_{2v}^1$—$\mathfrak{C}_{2v}^{10}$, $\mathfrak{V}_h^1$—$\mathfrak{V}_h^{16}$ gehören derartigen Elementarparallelepipeden an (siehe Fig. 52)[2]).

2. Ein Seitenflächenpaar wird von doppeltprimitiven Rechtecken gebildet. Das rhombische Elementarparallelepiped ist dann doppeltprimitiv und zwar einfach flächenzentriert. Ist beispielsweise (Fig. 53) das Rechteck ab zentriert, so lautet ein primitives Tripel $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$, $\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$, c. Aus den früheren Erörterungen geht hervor, daß die Raumsysteme $\mathfrak{V}^5$, $\mathfrak{V}^6$, $\mathfrak{C}_{2v}^{11}$—$\mathfrak{C}_{2v}^{17}$, $\mathfrak{V}_h^{17}$—$\mathfrak{V}_h^{22}$ mit derartigen rhombischen Elementarparallelepipeden in Verbindung stehen.

3. Die Seitenflächenrechtecke sind einfachprimitiv, die Rechtecke der Diagonalflächen aber doppeltprimitiv. Das Elementarparallelepiped besitzt dann im Zentrum einen mit den Eckpunkten identischen Punkt. Es ist doppeltprimitiv innenzentriert und ein primitives Tripel ist

[1]) Die Raumsysteme sind in der Reihenfolge der Numerierung geordnet gedacht.

[2]) Kräftige durchbrochene Linien kennzeichnen jeweilen ein primitives Tripel. Identische Punkte sind durch kleine ausgefüllte Kreise markiert.

in $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}, \frac{a}{2}-\frac{b}{2}+\frac{c}{2}$, c gegeben (siehe Fig. 54). Die Raumsysteme $\mathfrak{V}^8$, $\mathfrak{V}^9$, $\mathfrak{C}_{2v}{}^{20}$—$\mathfrak{C}_{2v}{}^{22}$, $\mathfrak{V}_h{}^{25}$—$\mathfrak{V}_h{}^{28}$ müssen auf rhombische innenzentrierte Elementarparallelepipede bezogen werden.

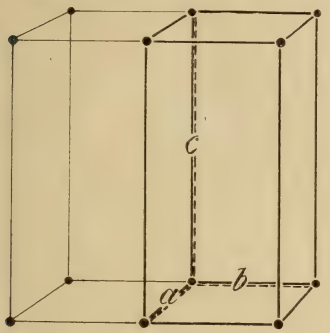


Fig. 52. Einfachprimitives, rhombisches Elementarparallelepiped. (Je 2 Elementarparallelepipede.)

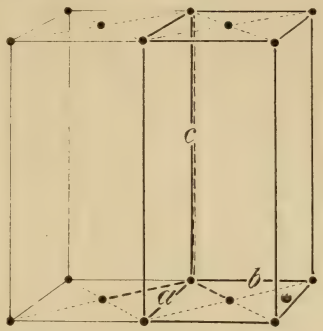


Fig. 53. Doppeltprimitives, einfach flächenzentriertes, rhombisches Elementarparallelepiped.

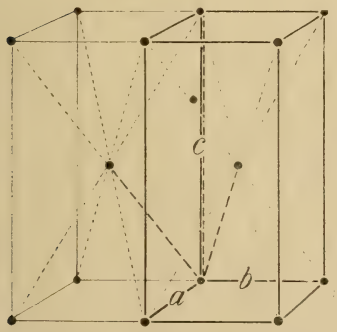


Fig. 54. Doppeltprimitives, innenzentriertes, rhombisches Elementarparallelepiped.

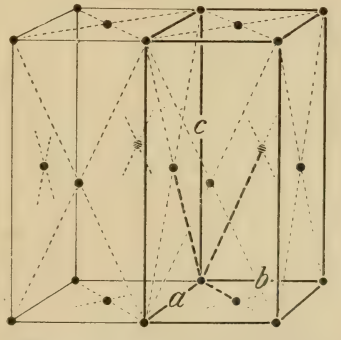


Fig. 55. Vierfachprimitives, allseitig flächenzentriertes, rhombisches Elementarparallelepiped.

4. Zwei Seitenflächenpaare sind zentriert, dann gilt das (man vergleiche die Fig. 55) stets auch für das dritte Paar. Das rhombische Elementarparallelepiped ist infolgedessen als allseitig flächenzentriert vierfach primitiv. $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}, \frac{a}{2}+\frac{c}{2}, \frac{c}{2}+\frac{b}{2}$ bilden ein primitives Tripel (siehe Fig. 55). Die Raumsysteme $\mathfrak{V}^7$, $\mathfrak{C}_{2v}{}^{18}$, $\mathfrak{C}_{2v}{}^{19}$, $\mathfrak{V}_h{}^{23}$, $\mathfrak{V}_h{}^{24}$ besitzen flächenzentrierte Elementarparallelepipede. Wären

Seitenflächen und zugleich Diagonalebenen zentriert, so entstünden identische Punkte auf den Kantenmitten, man müßte dann der Voraussetzung gemäß die betreffenden Kantenlängen halbieren und würde einen der obigen vier Fälle enthalten. In diesen vier Fällen sind alle Möglichkeiten realisiert, einem Parallelepiped, dessen Kanten primitive verschiedenwertige Translationen sind und dessen Seitenflächen einfache oder doppeltprimitive Parallelogramme bilden, weitere den Eckpunkten identische Punkte beizufügen. Die rhombischen Elementarparallelepipede besitzen nur noch drei Bestimmungsgrößen a, b, c, alle drei Winkel α, β, γ sind 90^0. Wird ein rhombisches Elementarparallelepiped derart deformiert, daß ein Winkel z. B. $\beta \gtrless 90^0$ wird, so geht es in ein monoklines über und es mag erwünscht sein nachzuweisen, daß sich die vier Fälle dann auf nur zwei prinzipiell verschiedene reduzieren. Zu dem Zwecke betrachte man die Figuren 48—51. Fig. 48 stellt den Fall eines einfachprimitiven monoklinen Elementarparallelepipeds dar. Fig. 50 zeigt ein innenzentriertes monoklines Elementarparallelepiped. Da die Richtungen c und a keinerlei Auszeichnung mehr besitzen, läßt sich, wie die linke Hälfte der Fig. 50 zeigt, das Parallelepiped auch so wählen, daß zwei gegenüberliegende Seitenflächen zentriert sind: es ist dann von denen der Fig. 49 prinzipiell nicht mehr verschieden. Fig. 51 zeigt schließlich, wie ein allseitig flächenzentriertes monoklines Elementarparallelepiped durch ein einfach flächenzentriertes, ebenfalls monoklines, Elementarparallelepiped ersetzt werden kann.

Immerhin mag es zum Vergleich mit rhombischen Raumsystemen manchmal erwünscht sein, auch das monokline Koordinatenparallelepiped in einer der vier allgemeinen Formen zu wählen. In diesem Sinne kann man dann auch allseitig flächenzentrierte, monokline Elementarparallelepipede zur Darstellung benutzen. Besonders zweckmäßig wird ein derartiges Verfahren sein, wenn der Winkel β der Fig. 51 nahezu 90^0 ist, ein vierfachprimitives monoklines Elementarparallelepiped als schwach deformiertes rhombisches erscheint. Aus gleichem Grunde lassen sich zu Sonderzwecken auch etwa trikline Elementarparallelepipede als einfach flächenzentriert, als innenzentriert oder gar allseitig flächenzentriert wählen.

Ist den Raumsystemen eine trigonale Achsenschar eigen, so müssen die Identitätsabstände, die durch Drehung von 120^0 oder 240^0 um die Hauptachse auseinander hervorgehen, gleich groß sein. In den Ebenen senkrecht zu den trigonalen Achsen folgen sich gleiche Identitätsabstände des zentrosymmetrischen Charakters der Translationen wegen schon in Winkeln von 60^0, sie bilden die Radien und Seiten eines regelmäßigen Sechseckes. Gleiches ist der Fall, wenn die Hauptachsenschar hexagonal ist. Bilden irgend zwei der gleichwertigen, in der Ebene senkrecht zu den Hauptachsen liegenden, primitiven Translationen mit dem Identitäts-

abstand in der Hauptachsenrichtung ein primitives Tripel, so bestimmen identische Punkte Ecken und Basiszentren parallelgestellter hexagonaler Säulen, beziehungsweise Eckpunkte lückenlos aneinander gereihter gleichseitiger trigonaler Säulen. Je zwei mit einer Seitenfläche aneinander stoßende trigonale Säulen formen ein Parallelepiped, das als elementar bezeichnet werden kann (siehe linke Hälfte der Fig. 56). $a = b$; $\measuredangle \beta = \measuredangle \alpha = 90^0$; $\measuredangle \gamma = 120^0$. Ein derartiges gewöhnlich hexagonales Elementarparallelepiped besitzt als Kantenrichtungen Koordinatenachsen, wie sie bei der Bravaisschen Symbolisierung in den hexagonalen und trigonalen Kristallklassen verwendet werden. Der dritte Index des vierstelligen Symboles, der sich auf die negative Zwischendiagonale bezieht, fällt dann fort. Um den Vergleich mit den übrigen Raumsystemen möglichst einfach zu gestalten, drängt sich eine andere Wahl des Koordinatenparallelepipeds auf, nämlich in der Weise, wie die rechte Hälfte der Figur 56 veranschaulicht. Dieses orthohexagonale Elementarparallelepiped ist dann doppeltprimitiv, basisflächenzentriert. $\alpha = \beta = \gamma = 90^0$; $a' = b\sqrt{3}$.

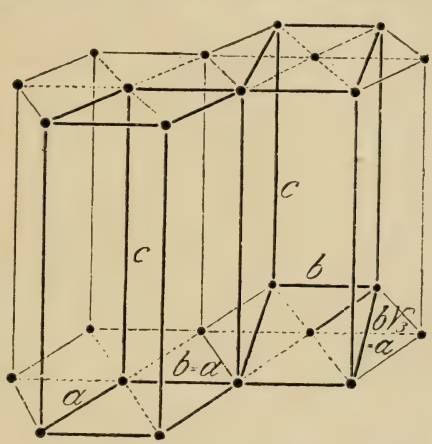


Fig. 56. Elementarparallelepipede bei hexagonaler Translationsgruppe.
(Links = gewöhnlich hexagonales, rechts = orthohexagonales Elementarparallelepiped.

Von Schrauf und anderen sind auch die Flächenkomplexe der Kristalle der hexagonalen und trigonalen Klassen auf derartige Koordinatenachsen bezogen worden, mit dem Unterschied, daß $b' = a\sqrt{3}$ gewählt wurde. Es ist hier absichtlich die um 90^0 gedrehte Stellung benutzt worden, um sofort das orthohexagonale Elementarparallelepiped von einem gewöhnlichen rhombischen zu unterscheiden, wo in konventioneller Weise die längere der horizontalen Kantenrichtungen zur b-Achse gemacht wird. Dem Vergleich ist dies nicht hinderlich, da eine Vertauschung des ersten und zweiten Index eines Flächensymbols sofort die richtigen Beziehungen ergibt.

Es ist nun zu untersuchen, ob sich unter allen Umständen einfachprimitive, gewöhnlich hexagonale, oder doppeltprimitive orthohexagonale Elementarparallelepipede konstruieren lassen. Ist a, b, c kein primitives

Tripel, so gibt es schief zur trigonalen (oder hexagonalen) Achse sicherlich einen passenden kürzesten Identitätsabstand. Ist die Achse nur trigonal oder hexagonal zweiter Art, so werden zunächst zu diesem Identitätsabstand zwei gegen die Achse gleichgeneigte gleichwertige Identitätsabstände gehören, die als Kanten eines Parallelepipeds, das in diesem Falle als Rhomboeder bezeichnet wird, aufgefaßt werden können (siehe Fig. 57, wo die trigonale Achsenrichtung durch AA' gegeben ist). Bleibt die Rhomboederkante tatsächlich kürzester Identitätsabstand, so ist das Rhomboeder einfachprimitiv. Es läßt sich nun leicht beweisen, daß das

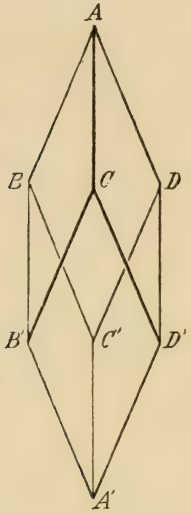


Fig. 57. Einfachprimitives Elementarrhomboeder.

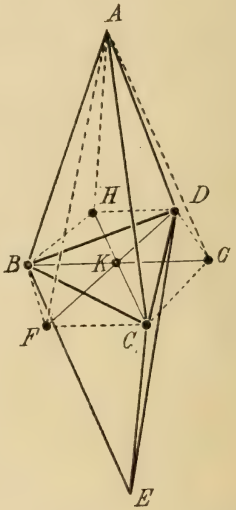


Fig. 58. Beziehung des Elementarrhomboeders zu den Symmetrieelementen.

letztere nur bei trigonaler Achse erster Art (fehlender horizontaler Symmetrieebene) oder bei hexagonaler Drehspiegelachse (zweiter Art) möglich ist. Bereits die Betrachtung der Symmetrieverhältnisse derartiger Rhomboeder zeigt, daß horizontale Symmetrieebenen irgendwelcher Art, sowie hexagonale gewöhnliche Achsen fehlen. Es seien nun in Fig. 58 die Geraden AB, AC, AD drei gleichwertige primitive Translationen. Die senkrecht zu den trigonalen Achsen stehende Ebene BCD oder eine dazu parallele Ebene soll Symmetrieebene sein. Dann müssen $CE = BE = DE = AB = AC = AD$ ebenfalls primitive Translationen darstellen. Ihnen gehen durch A parallel AH, AG, AF. Auch F, G, H wären mit A, B, C, D, E identische Punkte, woraus folgt,

daß dies auch für K gilt. Konstruieren wir mit A B, A C, A D als Kanten ein Rhomboeder, wie es in Fig. 57 abgebildet ist, so würde dieses in den Mittelpunkten der Dreiecke B C D und B′ C′ D′ mit den Eckpunkten identische Punkte besitzen. Es wäre dreifachprimitiv. Dann können aber A C, A B, A D gar nicht kürzeste Identitätsabstände sein, A K als Kathete der rechtwinkligen Dreiecke mit A C oder A B oder A D als Hypotenuse ist ja noch kleiner. Und es lassen sich in diesem Falle stets orthohexagonale doppeltprimitive oder gewöhnlich hexagonale einfachprimitive Elementarparallelepipede (beispielsweise mit der Basisfläche F C K G und der Höhe K A der Fig. 58) konstruieren. Zum gleichen Ergebnis gelangen wir, wenn die Hauptachsenschar hexagonal I. Art ist. A F, A G, A H stellen sich jetzt infolge der Sechszähligkeit der Achse ein.

Konstruiert man anderseits in Raumsystemen mit einfachprimitiven Rhomboedern als Translationsgruppe, das einfachste von zwei trigonalen Säulen gebildete, in seinen Ecken mit identischen Punkten besetzte, Elementarparallelepiped, so findet man, daß es dreifachprimitiv ist (das orthohexagonale Elementarparallelepiped ist also sechsfachprimitiv). Die mit den Eckpunkten identischen Punkte befinden sich, wie Fig. 59 zeigt, in $^1/_3$ und $^2/_3$ Höhe auf den Mittelachsen der trigonalen Säulen. Vergleicht man mit diesen Angaben die bei der Ableitung der Raumsysteme mit trigonalen Achsen sich vorfindenden Erörterungen, so ist leicht ersichtlich, daß mit einfachprimitiven Rhomboedern als Elementarparallelepipeden Achsenscharen $\mathfrak{C}_3^4$ unlöslich verbunden sind, währenddem zu Achsenscharen $\mathfrak{C}_3^1$—$\mathfrak{C}_3^3$ oder $\mathfrak{C}_6^1$—$\mathfrak{C}_6^6$ stets einfachprimitive gewöhnlich hexagonale, beziehungsweise doppeltprimitive orthohexagonale, Elementarparallelepipede gehören.

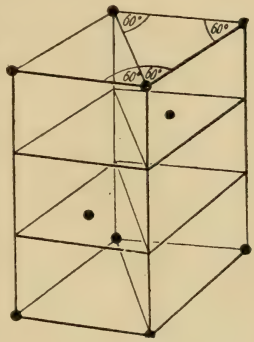


Fig. 59.
Gewöhnlich hexagonales (dreifachprimitives) Elementarparallelepiped bei rhomboedrischer Translationsgruppe.

Digonale Achsenscharen senkrecht zu den Hauptachsen, ferner Symmetrieebenenscharen parallel den Hauptachsen, ändern daran nichts, solange die Hauptachsenschar als solche erhalten bleibt. Die digonalen Achsen und Symmetrieebenen müssen infolge der Sätze 4 und 5 einer Kante des Basisrechteckes orthohexagonaler Säulen parallel verlaufen. Bei einfacher rhomboedrischer Translationsgruppe (mit $\mathfrak{C}_3^4$) müssen die Symmetrieebenen den Rhomboederkanten, die digonalen Achsen den horizontalen Flächendiagonalen (die Rhomboeder werden stets mit der trigonalen Achse als Vertikalrichtung aufgestellt) parallel gehen.

Vom strukturellen Standpunkte würde sich folgende Einteilung der Raumsysteme mit nur einer trigonalen oder hexagonalen Achsenschar rechtfertigen.

A. Rhomboedrische Unterabteilung. Einfachprimitive rhomboedrische Elementarparallelepipede sind vorhanden. Das einfachste gewöhnlich hexagonale Elementarparallelepiped ist dreifach, das orthohexagonale sechsfach primitiv.

Hierher gehören die Raumsysteme $\mathfrak{C}_3{}^4$, $\mathfrak{C}_{3i}{}^2$, $\mathfrak{C}_{3v}{}^5$, $\mathfrak{C}_{3v}{}^6$, $\mathfrak{D}_3{}^7$, $\mathfrak{D}_{3d}{}^5$, $\mathfrak{D}_{3d}{}^6$.

B. Trigonale Unterabteilung. Die Hauptachsenschar ist trigonal oder hexagonal zweiter Art. Einfachprimitive gewöhnlich hexagonale, bezw. orthohexagonale doppeltprimitive Elementarparallelepipede lassen sich konstruieren, währenddem die einfachsten Rhomboeder dreifach primitiv sind. Dieser Unterabteilung müssen alle Raumsysteme $\mathfrak{C}_3{}^1$-$\mathfrak{C}_3{}^3$, $\mathfrak{C}_{3i}{}^1$, $\mathfrak{C}_{3v}{}^1$-$\mathfrak{C}_{3v}{}^4$, $\mathfrak{D}_3{}^1$-$\mathfrak{D}_3{}^6$, $\mathfrak{D}_{3d}{}^1$-$\mathfrak{D}_{3d}{}^4$, sowie die Klassen $\mathfrak{C}_{3h}$ und $\mathfrak{D}_{3h}$ zugerechnet werden.

C. Hexagonale Unterabteilung. Die Hauptachsen sind hexagonal. Das gewöhnlich hexagonale Elementarparallelepiped ist einfach, das orthohexagonale doppelt primitiv. Rhomboeder sind mindestens dreifach primitiv. Die Klassen $\mathfrak{C}_6$, $\mathfrak{C}_{6h}$, $\mathfrak{C}_{6v}$, $\mathfrak{D}_6$, $\mathfrak{D}_{6h}$ gehören hierher.

Um die Klassen nicht aufzulösen, faßt man A und B zu einer rhomboedrischen, C zu einer hexagonalen Abteilung zusammen. Schwankend ist die Stellung der in der Natur in Kristallformen kaum vertretenen Klassen $\mathfrak{C}_{3h}$ und $\mathfrak{D}_{3h}$.

Das Rhomboeder ist charakterisiert durch $a = b = c$; $\alpha = \beta = \gamma$. Auch die kubischen Klassen enthalten Achsenscharen $\mathfrak{C}_3{}^4$, und zwar in vier gleichwertigen Richtungen. In der Tat ist das Elementarparallelepiped der kubischen Klassen, der Würfel, nichts anderes als ein spezielles Rhomboeder mit $\alpha = \beta = \gamma = 90^0$. Bei den Elementarwürfeln werden wir späterhin einfach primitive, allseitig flächenzentrierte und innenzentrierte unterscheiden. Da ein Rhomboeder stets in einfacher Weise als deformierter Würfel mit $\alpha = \beta = \gamma \lesseqgtr 90^0$ aufgefaßt werden kann, wollen wir auch die den verschiedenen Würfeln entsprechenden Rhomboeder betrachten. Fig. 60 zeigt ein allseitig flächenzentriertes Rhomboeder. Ohne weiteres ist klar, daß wegen der Dreizähligkeit der Hauptachse alle Flächenpaare zentriert sein müssen, wenn das für eines gilt. Nun können aber, wie aus der Fig. 60 hervorgeht, auch die von der Polecke nach den Flächenmitten gehenden Identitätsabstände als Polkanten eines Rhomboeders aufgefaßt werden. Dieses gestrichelt eingezeichnete Rhomboeder ist einfach primitiv. Der Kristallograph wird erkennen, daß, wenn das flächenzentrierte Rhomboder ein Bravaissches

Symbol $\{10\bar{1}1\}$ oder ein Millersches Symbol $\{100\}$ besitzt, sein einfach primitives Rhomboeder durch $\{02\bar{2}1\}$ bezw. $\{11\bar{1}\}$ gekennzeichnet ist. Wird umgekehrt das einfachprimitive Rhomboeder als Grundrhomboeder $\{10\bar{1}1\}$ bezeichnet, so ist das Rhomboeder $\{01\bar{1}2\}$ bezw. $\{110\}$ stets flächenzentriert. Da die Rhomboederkanten nicht wie im Würfel bestimmten Achsenrichtungen parallel gehen, steht es unserem Belieben anheim, stets das einfachstprimitive Parallelepiped zur Koordinaten-

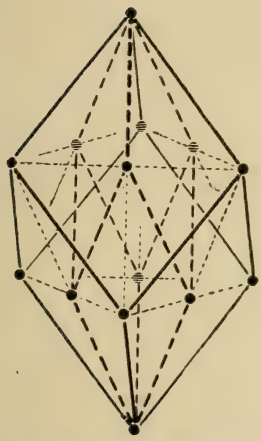


Fig. 60. Ein allseitig flächenzentriertes Rhomboeder enthält immer ein einfachprimitives Rhomboeder.

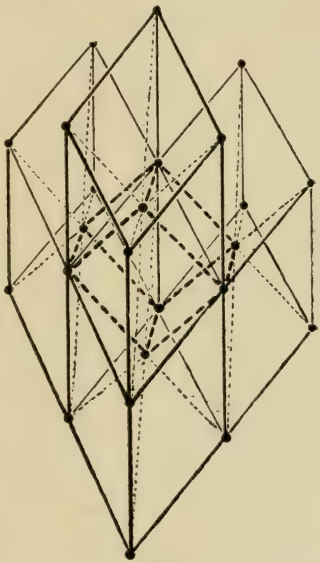


Fig. 61. Aus innenzentrierten, doppeltprimitiven Rhomboedern lassen sich einfachprimitive konstruieren.

darstellung zu verwenden. Nur zu Vergleichzwecken mit kubischen Raumsystemen rechtfertigt sich etwa die Wahl flächenzentrieter Elementarrhomboeder. Ist wie in Fig. 61 ein Rhomboeder innenzentriert, so gibt es wiederum ein einfach primitives Rhomboeder, dem die Symbole $\{01\bar{1}2\}$ bezw. $\{110\}$ zukommen, sofern das erstere als Grundrhomboeder bezeichnet wird. Zu einem einfachprimitiven Rhomboeder $\{100\}$ gehört stets ein innenzentriertes $\{\bar{1}11\}$. Auch in diesem Falle werden wir nur zu ganz besonderen Vergleichszwecken die komplexere, doppeltprimitive Form zur Koordinatendarstellung benutzen.

In Raumsystemen, die durch eine einzige tetragonale Achsenschar irgendwelcher Art ausgezeichnet sind, müssen alle in bezug auf diese Hauptachse gleichwertigen Richtungen gleiche Identitätsabstände besitzen. Den Identitätsabstand in Richtung der tetragonalen Achsenschar wählen wir zur c-Kante des Elementarparallelepipeds. In der Ebene senkrecht dazu benutzen wir als a-Kante den kürzesten Identitätsabstand; in der gleichen Ebene gehört ihm im Winkelabstand von 90° ein gleichwertiger Identitätsabstand zu, er wird zur b-Kante. So entsteht ein rechtwinkliges Elementarparallelepiped mit quadratischem Grundriß, wir nennen es tetragonales Elementarparallelepiped.

$$a = b,\ c;\ \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ.$$

Es sind nun zwei Fälle möglich.

1. Die beiden kürzesten gleichwertigen (und gleichgroßen) Identitätsabstände der Ebene senkrecht zur tetragonalen Achsenschar bilden mit dem Identitätsabstand in der Hauptachsenrichtung ein primitives Tripel (a, b, c). Dann ist das tetragonale Elementarparallelepiped einfach primitiv, es besitzt keine weiteren mit den Eckpunkten identischen Punkte.
2. a, b, c ist kein primitives Tripel. Dann muß es, da a und b als kürzeste Identitätsabstände einer Ebene ein primitives Paar bilden, sicherlich einen schief zur Hauptachsenrichtung verlaufenden Identitätsabstand geben, der a und b zu einem primitiven Tripel ergänzt. Dieser Abstand kann nur Kante einer tetragonalen Pyramide mit dem primitiven Quadrat als Basis sein, denn wäre er das nicht, so würden die zur Hauptachsenrichtung gleichgeneigten nach Drehungen um 90°, 180°, 270° entstehenden primitiven Translationen auf der Grundebene neue identische Punkte erzeugen, die unsere willkürlich wählbare Voraussetzung umstürzen.

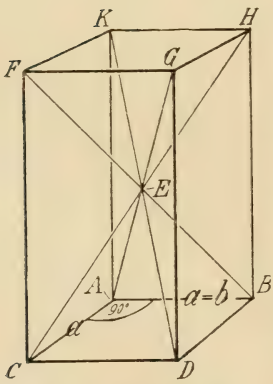


Fig. 62. Das tetragonale Elementarparallelepiped.

In Fig. 62 sind AC und AB das senkrecht aufeinander stehende primitive Translationenpaar einer auf der Hauptachse senkrecht stehenden Ebene. AE bilden damit ein primitives Tripel. Dann müssen EC, ED, EB gleich groß wie AE sein und aus AE durch Drehung um 90°, 180°, 270° hervorgehen, sollen (außer den Eckpunkten des Quadratsystemes) der Basisfläche keine weiteren identischen Punkte angehören. Es sind dann aber auch F, G, H, K mit A, B, C, D, E identisch. AK, BH, CF, DG stehen rechtwinklig auf der

Basisfläche und bilden ein tetragonales Elementarparallelepiped, das durch E lediglich innenzentriert, also doppeltprimitiv, geworden ist.

Kommen nun horizontal verlaufende digonale Achsen oder vertikal gestellte Symmetrieebenenscharen hinzu, so können sie nach den Sätzen 4 und 5 (oder auch wegen der Vertauschbarkeit der Achsen) nur die Richtungen der Seiten oder Diagonalen des Basisquadrates besitzen. Ausgenommen in einer Klasse ($\mathfrak{V}_d$) besitzen gleichgeartete Symmetrieelemente immer beiderlei Richtungen, so daß a und b dann digonalen Achsen oder Symmetrieebenen oder beiden parallel gehen. In $\mathfrak{V}_d$ gehen der einen Richtung Achsen, der anderen Richtung Symmetrieebenen parallel. Setzen wir nun willkürlich fest, wie das der Kristallograph in der makro-

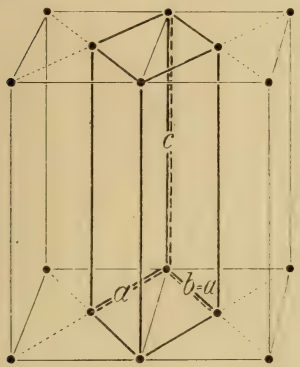


Fig. 63. Beziehung zwischen dem einfach flächenzentrierten doppeltprimitiven und dem einfachprimitiven tetragonalen Elementarparallelepiped.

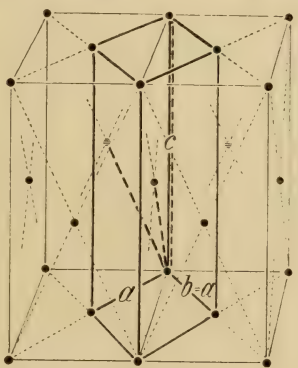


Fig. 64. Beziehung zwischen dem innenzentrierten (doppeltprimitiven) und dem allseitig flächenzentrierten (vierfachprimitiven) tetragonalen Elementarparallelepiped.

skopischen Kristallographie tut, daß a und b den Achsen parallel verlaufen sollen, so brauchen sie nach den Sätzen 4 und 5 nicht mehr ein einfachprimitives, sondern eventuell ein doppeltprimitives zentriertes Quadrat zu bedingen. Dann müssen neben dem innenzentrierten tetragonalen Elementarparallelepiped auch die basisflächenzentrierten und allseitig flächenzentrierten Elementarparallelepipede in Betracht gezogen werden. Ist es uns gleichgültig, ob die Symmetrieebenen oder die Achsen a und b parallel gehen, so lassen sie sich auf einfache oder innenzentrierte Elementarparallelepipede von tetragonalem Charakter reduzieren, da auch die Diagonalen eines Quadrates senkrecht aufeinander stehen und gleich lang sind. Die Figuren 63 und 64 zeigen die Beziehungen dieser Art. Auch Vergleichszwecke können uns veranlassen,

basiszentrierte, oder allseitig flächenzentrierte tetragonale Elementarparallelepipede zur Darstellung zu benutzen. Wiederum steht die Art der isomorphen Parallelscharen mit der Art des Elementarparallelepipeds in kausalem Zusammenhang, so daß einzelne Raumsysteme auf ein einfach primitives, andere auf mehrfach primitive Elementarparallelepipede bezogen werden müssen. Aufschluß darüber gibt die am Ende dieses Abschnittes befindliche Tabelle.

In allen kubischen Raumsystemen finden sich drei aufeinander senkrecht stehende Scharen gleichwertiger, digonaler oder tetragonaler Achsen. Die Identitätsabstände in diesen drei Richtungen müssen somit einander gleich sein; sie bilden die Kanten eines Würfels (Kubus, Hexaeder). Dieser Würfel sei Elementarparallelepiped. Ein Vergleich mit den Raumsystemen von beliebig rechtwinkligem Parallelepiped (Klassen $\mathfrak{C}_{2v}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{V}_h$) zeigt, daß auch der Elementarwürfel einfach-, doppelt- oder vierfach-primitiv sein kann. Ist er einfachprimitiv, so ist ein primitives Tripel direkt durch $a = b = c$ gegeben (siehe Fig. 65). Ist er doppeltprimitiv, so kann er als Würfel nur innenzentriert sein, denn wenn ein Flächenpaar zentriert ist, müssen wegen der Vertauschbarkeit der drei Kantenrichtungen auch die beiden anderen Seitenflächenpaare in den Mittelpunkten mit den Eckpunkten identischen Punkten besetzt sein. Als innenzentriert (Fig. 66) ist der Elementarwürfel doppeltprimitiv. $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}$, $\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + \frac{c}{2}$, c bilden ein primitives Tripel. Der allseitig flächenzentrierte Würfel ist vierfachprimitiv, ein primitives Tripel besitzt die Gestalt von $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$, $\frac{b}{2} + \frac{c}{2}$, $\frac{a}{2} + \frac{c}{2}$ (Fig. 67). Der Würfel besitzt nurmehr eine Bestimmungsgröße, nämlich $a = b = c$, das ist die Periodenlänge der Kante. α, β und γ sind 90°.

Die Diskussion hat somit gezeigt, daß hinsichtlich der zweckmäßigsten Wahl der Koordinatenachsen und Elementarparallelepipede die 32 Klassen der Raumsysteme zu 7 Abteilungen vereinigt werden können.

I. Trikline Abteilung. Das Elementarparallelepiped ist ein beliebiges primitives Parallelepiped mit drei verschieden langen, beliebige Winkel miteinander bildenden Kanten. Die Translationsgruppe ist also keinerlei Bedingungen unterworfen. $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_i$ sind die hierhergehörigen Klassen. a, b, c, α, β, γ sind die Bestimmungsgrößen.

II. Monokline Abteilung. Das einfach- oder doppeltprimitive Elementarparallelepiped ist monoklin (rhomboidische Säule). Die eine Kantenrichtung, die parallel einer digonalen Achsenschar beziehungsweise senkrecht einer Symmetrieebenenschar steht, bildet rechte Winkel mit den beiden anderen Kanten, die bei beliebiger Länge einen beliebigen

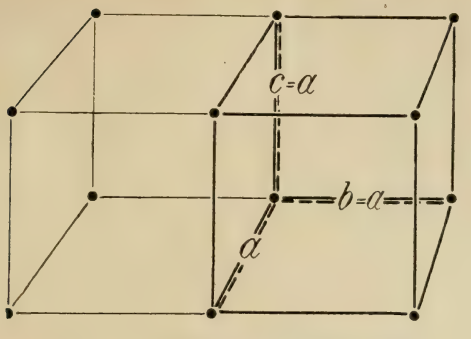


Fig. 65. Einfachprimitiver Elementarwürfel.

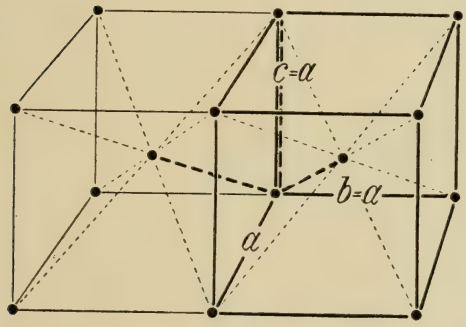


Fig. 66. Innenzentrierter, doppeltprimitiver Elementarwürfel.

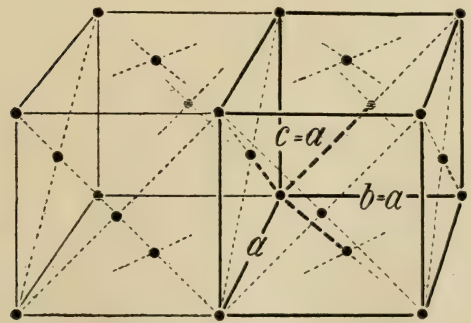


Fig. 67. Allseitig flächenzentrierter, vierfachprimitiver Elementarwürfel.

Winkel miteinander einschließen. $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_s$, $\mathfrak{C}_{2h}$ sind hierhergehörige Klassen. a, b, c, β sind die Bestimmungsgrößen.

III. Rhombische Abteilung. Das rhombische, einfach-, doppelt- oder vierfach-primitive Elementarparallelepiped ist ein rechtwinkliges Parallelepiped mit drei ungleichen Kanten. Die Kanten sind digonalen Achsenscharen parallel oder sie stehen auf Symmetrieebenenscharen senkrecht, beziehungsweise sie genügen beiden Bedingungen. In diese Abteilung fallen die Klassen $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{C}_{2v}$, $\mathfrak{V}_h$. α, β, γ sind 90°, so daß nur die Periodenlängen a, b, c und der primitive Charakter des Elementarparallelepipeds bestimmt werden müssen.

IV. Rhomboedrische Abteilung. Das Elementarparallelepiped kann ein einfachprimitives Rhomboeder oder ein aus zwei gleichseitigen trigonalen Säulen zusammengesetztes einfachprimitives, bezw. ein orthohexagonales doppeltprimitives Parallelepiped sein. Die Hauptachse des Rhomboeders geht der trigonalen Achsenschar parallel, beziehungsweise tut das die ungleiche Kante des Parallelepipeds mit gleichseitigem Grundriß. Symmetrieebenen gehen, wenn vorhanden, den Polkanten des Rhomboeders beziehungsweise den Seiten oder Höhenlinien der gleichseitigen Dreiecke der trigonalen Säulen parallel. Die Klassen $\mathfrak{C}_3$, $\mathfrak{D}_3$, $\mathfrak{C}_{3v}$, $\mathfrak{C}_{3i}$, $\mathfrak{D}_{3d}$ lassen sich auf diese Weise darstellen. Das gewöhnliche hexagonale, sowie das orthohexagonale Elementarparallelepiped sind durch a und c, das rhomboedrische Elementarparallelepiped ist durch $a = b = c$ und $\alpha = \beta = \gamma$ bestimmt.

V. Tetragonale Abteilung. Das tetragonale Elementarparallelepiped ist eine quadratische rechtwinklige Säule, die doppelt- oder einfachprimitiv gewählt werden kann. Die ungleichlange, ausgezeichnete Kante ist parallel der tetragonalen Achsenschar. Vorhandene Symmetrieebenen gehen den Quadratseiten oder -Diagonalen parallel, die zugleich die Richtungen digonaler Achsen angeben.

Alle früher bereits als tetragonal bezeichneten Klassen gehören hieher. a und c sind die Bestimmungsgrößen.

VI. Hexagonale Abteilung. Das Elementarparallelepiped kann als einfachprimitives, gewöhnlich hexagonales, oder als doppeltprimitives orthohexagonales Parallelepiped gewählt werden. Das einfachste Rhomboeder primitiver Translationen wäre dreifachprimitiv. Hierher gehören die Klassen $\mathfrak{C}_{3h}$, $\mathfrak{D}_{3h}$, $\mathfrak{C}_6$, $\mathfrak{D}_6$, $\mathfrak{C}_{6v}$, $\mathfrak{C}_{6h}$, $\mathfrak{D}_{6h}$. a und c müssen bestimmt werden.

VII. Kubische Abteilung. Einfacher, innenzentrierter oder allseitig flächenzentrierter Würfel sind Elementarparallelepipede. Die Würfelkanten sind parallel den drei gleichwertigen Hauptachsenscharen, ihre Länge ist einzige Unbekannte. Vorhandene Nebenachsen sind den Flächendiagonalen, trigonale Achsen den Körperdiagonalen parallel.

Alle bereits früher als kubisch bezeichneten Klassen gehören dieser Abteilung an.

Gegenüber der auf Seite 103 gegebenen Gruppierung sind nur die Abteilungen I—III neu. Alle Klassen der Abteilungen IV—VII behalten die Bezeichnungen, die ihnen bereits früher (Seite 102—103) zugeschrieben wurden, bei.

$\mathfrak{C}_1$ wird jetzt triklin hemiedrische, $\mathfrak{C}_i$ triklin holoedrische Klasse genannt.

$\mathfrak{C}_2$ ist monoklin hemimorphe, $\mathfrak{C}_s$ monoklin hemiedrische, $\mathfrak{C}_{2h}$ monoklin holoedrische Klasse.

$\mathfrak{V}$ heißt rhombisch hemiedrische, $\mathfrak{C}_{2v}$ rhombisch hemimorphe, $\mathfrak{V}_h$ rhombisch holoedrische Klasse.

Die zwischen den Formen der Translationsgruppen erkennbaren engeren Beziehungen sind die folgenden:

Irgend einer kubischen Translationsgruppe kann eine, aus ihr durch Deformation hervorgegangene, rhomboedrische Translationsgruppe entsprechen. Auch die tetragonalen, die einfachen, allseitig flächenzentrierten oder innenzentrierten rhombischen, die einfachen, allseitig flächenzentrierten oder innenzentrierten monoklinen, sowie die triklinen Translationsgruppen können mit kubischen in enger Beziehung stehen. Lassen sich in Winkelwerten und Kantenverhältnissen bei gleicher Translationsgruppenart derartige Verwandtschaften erkennen, so werden die Translationsgruppen pseudokubisch genannt.

Einfach flächenzentrierte Translationsgruppen können, wenn das zentrierte Parallelogramm ein deformiertes Quadrat ist, höchstens pseudotetragonal sein. Natürlich können das auch die übrigen rhombischen, monoklinen oder triklinen Translationsgruppen sein, sofern die eine Kante wesentlich verschieden von den beiden übrigen ist.

Pseudohexagonal, das heißt nahezu hexagonal, können sich schließlich nur einfach flächenzentrierte rhombische, einfache monokline (mit der Richtung der digonalen Achse parallel der Richtung der hexagonalen oder trigonalen Achse), einfach flächenzentrierte monokline oder trikline Translationsgruppen verhalten.

Zu bedenken ist hierbei, daß die monoklinen und triklinen Elementarparallelepipede gleichzeitig in verschiedener Weise darstellbar sind.

Beim Übergang in die Kontinuumsbetrachtung bleiben die Kantenrichtungen der Elementarparallelepipede Koordinatenachsen. Ihre absolute Größe spielt jetzt keine Rolle mehr, nur noch das Verhältnis der Einheitsmaßstäbe ist von Bedeutung. Die Abteilungen nennt man hier seit alters Kristallsysteme oder Syngonien. Kristalle der triklinen Klassen werden auf ein triklines Achsenkreuz bezogen. α, β, γ müssen bekannt sein, ebenso die Verhältnisse a : b und b : c; Kristalle der monoklinen

Klassen sind mit einem monoklinen Achsenkreuz darstellbar, wo $\alpha = \gamma = 90^0$ sind, β und die Verhältnisse a : b und b : c Bestimmungsgrößen ergeben usw. Es ist nun allerdings zu beachten, daß die bei den Kristallographen bis jetzt übliche Aufstellung und Wahl der Grundform nicht mit der strukturell einfachsten Darstellungsweise übereinzustimmen braucht, wenn einzelne Achsenrichtungen beliebig wählbar sind oder die Achsenverhältnisse der Grundform verschieden angenommen werden können. Ob man in solchen Fällen die kristallographische Grundform anders wählt oder komplexere Parallelepipede der Struktur als elementar bezeichnet, mag der Praxis anheimgestellt werden. Wir haben uns in dieser allgemeinen Darstellung um derartige Spezialfragen nicht zu kümmern.

Zum Schlusse dieses Kapitels sei noch eine Tabelle aller Raumsysteme mit ihren isomorphen Parallelscharen von Symmetrieelementen angeführt[1]). Die Raumsysteme sind nach Klassen geordnet und innerhalb der Klassen, so daß die gegenseitigen Beziehungen leicht erkenntlich sind. Die Art der zugehörigen einfachsten Elementarparallelepipede ist gleichfalls vermerkt.

Dieser Tabelle folgt eine Zusammenstellung der 32 Klassen mit ihren Bezeichnungen (auch die Grothsche, erst später erläuterte, ist erwähnt) und den sie charakterisierenden, für das Kontinuum oder Schein-Kontinuum einzig bestimmbaren Symmetrieelementen. Im Diskontinuum finden sich, parallel zu diesen Symmetrieelementen, isomorphe Scharen, die aus der ersten Tabelle ersichtlich sind.

() bedeutet eine digonale Drehungsachse, $\widehat{()}$ zeigt an, daß sie polar ist. △ ist das Zeichen für eine trigonale Drehungsachse, ⬡ für eine hexagonale, □ für eine tetragonale.

◇ gibt das Symbol einer tetragonalen Drehspiegelachse an. In analoger Weise bezeichnet ⬡ eine hexagonale Drehspiegelachse. Z bedeutet ein Symmetriezentrum, SE eine Spiegelebene. Aufeinander senkrecht stehende Achsen und Symmetrieebenen sind in Klammern gefaßt. Gleichwertige Elemente sind summiert worden.

[1]) Sie kann auch als Tabelle der Raumgruppen (Operationen) mit ihren einfachsten Untergruppen (Teiloperationen) aufgefaßt werden und ist als solche bezeichnet worden. Der Name Raumsystem, die zugehörigen Systeme der Symmetrieelemente bezeichnend, ist von A. Johnsen eingeführt worden.

5. Tabellen

I. Haupttabelle: Die 230 Raumgruppen mit ihren Untergruppen

Klasse	Raumgruppe	Symmetrieebenen	Digonale Achse	Symmetriezentrum	Elementarparallelepiped
$\mathfrak{C}_1$	$\mathfrak{C}_1$	—	—	—	triklin, einfachprimitiv
$\mathfrak{C}_i$	$\mathfrak{C}_i$	—	—	$\mathfrak{C}_i$	
$\mathfrak{C}_s$	$\mathfrak{C}_s^1$	$\mathfrak{C}_s^1$	—	—	monoklin, einfachprimitiv
	$\mathfrak{C}_s^2$	$\mathfrak{C}_s^2$	—	—	
	$\mathfrak{C}_s^3$	$\mathfrak{C}_s^3$	—	—	monoklin, doppeltprimitiv (flächenzentriert oder innenzentriert)
	$\mathfrak{C}_s^4$	$\mathfrak{C}_s^4$	—	—	
$\mathfrak{C}_2$	$\mathfrak{C}_2^1$	—	$\mathfrak{C}_2^1$	—	monoklin, einfachprimitiv
	$\mathfrak{C}_2^2$	—	$\mathfrak{C}_2^2$	—	
	$\mathfrak{C}_2^3$	—	$\mathfrak{C}_2^3$	—	monoklin, doppeltprimitiv
$\mathfrak{C}_{2h}$	$\mathfrak{C}_{2h}^1$	$\mathfrak{C}_s^1$	$\mathfrak{C}_2^1$	$\mathfrak{C}_i$	monoklin, einfachprimitiv
	$\mathfrak{C}_{2h}^4$	$\mathfrak{C}_s^2$	$\mathfrak{C}_2^1$	$\mathfrak{C}_i$	
	$\mathfrak{C}_{2h}^2$	$\mathfrak{C}_s^1$	$\mathfrak{C}_2^2$	$\mathfrak{C}_i$	
	$\mathfrak{C}_{2h}^5$	$\mathfrak{C}_s^2$	$\mathfrak{C}_2^2$	$\mathfrak{C}_i$	
	$\mathfrak{C}_{2h}^3$	$\mathfrak{C}_s^3$	$\mathfrak{C}_2^3$	$\mathfrak{C}_i$	monoklin, doppeltprimitiv
	$\mathfrak{C}_{2h}^6$	$\mathfrak{C}_s^4$	$\mathfrak{C}_2^3$	$\mathfrak{C}_i$	
$\mathfrak{C}_{2v}$	$\mathfrak{C}_{2v}^1$	$\mathfrak{C}_s^1\ \mathfrak{C}_s^1$ —	— — $\mathfrak{C}_2^1$	—	rhombisch, einfachprimitiv
	$\mathfrak{C}_{2v}^4$	$\mathfrak{C}_s^1\ \mathfrak{C}_s^2$ —	— — $\mathfrak{C}_2^1$	—	
	$\mathfrak{C}_{2v}^3$	$\mathfrak{C}_s^2\ \mathfrak{C}_s^2$ —	— — $\mathfrak{C}_2^1$	—	
	$\mathfrak{C}_{2v}^6$				
	$\mathfrak{C}_{2v}^8$				
	$\mathfrak{C}_{2v}^{10}$				
	$\mathfrak{C}_{2v}^2$	$\mathfrak{C}_s^1\ \mathfrak{C}_s^2$ —	— — $\mathfrak{C}_2^2$	—	
	$\mathfrak{C}_{2v}^7$				
	$\mathfrak{C}_{2v}^5$	$\mathfrak{C}_s^2\ \mathfrak{C}_s^2$ —	— — $\mathfrak{C}_2^2$	—	
	$\mathfrak{C}_{2v}^9$				
	$\mathfrak{C}_{2v}^{11}$	$\mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3$ —	— — $\mathfrak{C}_2^1$	—	rhombisch, doppeltprimitiv; einfach flächenzentriert
	$\mathfrak{C}_{2v}^{13}$	$\mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4$ —	— — $\mathfrak{C}_2^1$	—	
	$\mathfrak{C}_{2v}^{12}$	$\mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^4$ —	— — $\mathfrak{C}_2^2$	—	
	$\mathfrak{C}_{2v}^{14}$	$\mathfrak{C}_s^1\ \mathfrak{C}_s^3$ —	— — $\mathfrak{C}_2^3$	—	rhombisch, doppeltprimitiv; einfach flächenzentriert
	$\mathfrak{C}_{2v}^{15}$	$\mathfrak{C}_s^2\ \mathfrak{C}_s^3$ —	— — $\mathfrak{C}_2^3$	—	
	$\mathfrak{C}_{2v}^{16}$	$\mathfrak{C}_s^1\ \mathfrak{C}_s^4$ —	— — $\mathfrak{C}_2^3$	—	
	$\mathfrak{C}_{2v}^{17}$	$\mathfrak{C}_s^2\ \mathfrak{C}_s^4$ —	— — $\mathfrak{C}_2^3$	—	
	$\mathfrak{C}_{2v}^{18}$	$\mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3$ —	— — $\mathfrak{C}_2^3$	—	rhombisch, vierfachprimitiv; allseitig flächenzentriert
	$\mathfrak{C}_{2v}^{19}$	$\mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4$ —	— — $\mathfrak{C}_2^3$	—	
	$\mathfrak{C}_{2v}^{20}$	$\mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3$ —	— — $\mathfrak{C}_2^3$	—	rhombisch, doppeltprimitiv; innenzentriert
	$\mathfrak{C}_{2v}^{22}$	$\mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^4$ —	— — $\mathfrak{C}_2^3$	—	
	$\mathfrak{C}_{2v}^{21}$	$\mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4$ —	— — $\mathfrak{C}_2^3$	—	

Kristallklasse	Raumgruppe	Symmetrieebenen	Digonale Achsen	Symmetriezentrum	Elementarparallelepiped
$\mathfrak{V}$	$\mathfrak{V}^1$	— — —	$\mathfrak{C}_2^1\,\mathfrak{C}_2^1\,\mathfrak{C}_2^1$	—	rhombisch, einfachprimitiv
	$\mathfrak{V}^2$	— — —	$\mathfrak{C}_2^1\,\mathfrak{C}_2^1\,\mathfrak{C}_2^2$	—	
	$\mathfrak{V}^3$	— — —	$\mathfrak{C}_2^2\,\mathfrak{C}_2^2\,\mathfrak{C}_2^1$	—	
	$\mathfrak{V}^4$	— — —	$\mathfrak{C}_2^2\,\mathfrak{C}_2^2\,\mathfrak{C}_2^2$	—	
	$\mathfrak{V}^6$	— — —	$\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^1$	—	rhombisch, doppeltprimitiv;
	$\mathfrak{V}^5$	— — —	$\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^2$	—	einfach flächenzentriert
	$\mathfrak{V}^7$	— — —	$\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$	—	rhombisch, vierfachprimitiv; allseitig flächenzentriert
	$\mathfrak{V}^8$			—	rhombisch, doppeltprimitiv;
	$\mathfrak{V}^9$			—	innenzentriert
$\mathfrak{V}_h$	$\mathfrak{V}_h^1$	$\mathfrak{C}_s^1\,\mathfrak{C}_s^1\,\mathfrak{C}_s^1$	$\mathfrak{C}_2^1\,\mathfrak{C}_2^1\,\mathfrak{C}_2^1$	$\mathfrak{C}_i$	rhombisch, einfachprimitiv
	$\mathfrak{V}_h^3$	$\mathfrak{C}_s^1\,\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2$	$\mathfrak{C}_2^1\,\mathfrak{C}_2^1\,\mathfrak{C}_2^1$		
	$\mathfrak{V}_h^2$	$\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2$	$\mathfrak{C}_2^1\,\mathfrak{C}_2^1\,\mathfrak{C}_2^1$		
	$\mathfrak{V}_h^4$				
	$\mathfrak{V}_h^5$	$\mathfrak{C}_s^1\,\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^1$	$\mathfrak{C}_2^1\,\mathfrak{C}_2^1\,\mathfrak{C}_2^2$		
	$\mathfrak{V}_h^7$	$\mathfrak{C}_s^1\,\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2$	$\mathfrak{C}_2^1\,\mathfrak{C}_2^1\,\mathfrak{C}_2^2$		
	$\mathfrak{V}_h^6$	$\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2$	$\mathfrak{C}_2^1\,\mathfrak{C}_2^1\,\mathfrak{C}_2^2$		
	$\mathfrak{V}_h^8$				
	$\mathfrak{V}_h^{13}$	$\mathfrak{C}_s^1\,\mathfrak{C}_s^1\,\mathfrak{C}_s^2$	$\mathfrak{C}_2^2\,\mathfrak{C}_2^2\,\mathfrak{C}_2^1$		
	$\mathfrak{V}_h^{11}$	$\mathfrak{C}_s^1\,\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2$	$\mathfrak{C}_2^2\,\mathfrak{C}_2^2\,\mathfrak{C}_2^1$		
	$\mathfrak{V}_h^9$	$\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^1$	$\mathfrak{C}_2^2\,\mathfrak{C}_2^2\,\mathfrak{C}_2^1$		
	$\mathfrak{V}_h^{12}$				
	$\mathfrak{V}_h^{10}$	$\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2$	$\mathfrak{C}_2^2\,\mathfrak{C}_2^2\,\mathfrak{C}_2^1$		
	$\mathfrak{V}_h^{14}$				
	$\mathfrak{V}_h^{16}$	$\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^1$	$\mathfrak{C}_2^2\,\mathfrak{C}_2^2\,\mathfrak{C}_2^2$		
	$\mathfrak{V}_h^{15}$	$\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2$	$\mathfrak{C}_2^2\,\mathfrak{C}_2^2\,\mathfrak{C}_2^2$		
	$\mathfrak{V}_h^{19}$	$\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^1$	$\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^1$		rhombisch, doppeltprimitiv; einfach flächenzentriert
	$\mathfrak{V}_h^{21}$				
	$\mathfrak{V}_h^{20}$	$\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^1$	$\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^1$		
	$\mathfrak{V}_h^{22}$	$\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^2$	$\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^1$		
	$\mathfrak{V}_h^{17}$	$\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^1$	$\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^2$		
	$\mathfrak{V}_h^{18}$	$\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^2$	$\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^2$		
	$\mathfrak{V}_h^{23}$	$\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3$	$\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$		rhombisch, vierfachprimitiv; allseitig flächenzentriert
	$\mathfrak{V}_h^{24}$	$\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4$	$\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$		
	$\mathfrak{V}_h^{25}$	$\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3$	$\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$		rhombisch, doppeltprimitiv; innenzentriert
	$\mathfrak{V}_h^{26}$	$\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4$	$\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$		
	$\mathfrak{V}_h^{28}$	$\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^4$	$\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$		
	$\mathfrak{V}_h^{27}$	$\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4$	$\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$		

Kristallklasse	Raumgruppe	Hauptachse	Hauptsymmetrieebene	Nebensymmetrieebenen	Nebenachsen	Symmetriezentrum	Primitives Elementarparallelepiped
$\mathfrak{C}_3$	$\mathfrak{C}_3^1$	$\mathfrak{C}_3^1$	—	— — —	— — —	—	hexagonal
	$\mathfrak{C}_3^2$	$\mathfrak{C}_3^2$	—	— — —	— — —	—	
	$\mathfrak{C}_3^3$	$\mathfrak{C}_3^3$	—	— — —	— — —	—	
	$\mathfrak{C}_3^4$	$\mathfrak{C}_3^4$	—	— — —	— — —	—	rhomboedrisch
$\mathfrak{C}_{3i}$	$\mathfrak{C}_{3i}^1$	$\mathfrak{C}_3^1$	—	— — —	— — —	$\mathfrak{C}_i$	hexagonal
	$\mathfrak{C}_{3i}^2$	$\mathfrak{C}_3^4$	—	— — —	— — —	$\mathfrak{C}_i$	rhomboedrisch
$\mathfrak{C}_{3v}$	$\mathfrak{C}_{3v}^1$ $\mathfrak{C}_{3v}^2$	$\mathfrak{C}_3^1$	—	$\mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3$	— — —	—	hexagonal
	$\mathfrak{C}_{3v}^3$ $\mathfrak{C}_{3v}^4$	$\mathfrak{C}_3^1$	—	$\mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4$	— — —	—	
	$\mathfrak{C}_{3v}^5$	$\mathfrak{C}_3^4$	—	$\mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3$	— — —	—	rhomboedrisch
	$\mathfrak{C}_{3v}^6$	$\mathfrak{C}_3^4$	—	$\mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4$	— — —	—	
$\mathfrak{D}_3$	$\mathfrak{D}_3^1$ $\mathfrak{D}_3^2$	$\mathfrak{C}_3^1$	—	— — —	$\mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3$	—	hexagonal
	$\mathfrak{D}_3^3$ $\mathfrak{D}_3^4$	$\mathfrak{C}_3^2$	—	— — —	$\mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3$	—	
	$\mathfrak{D}_3^5$ $\mathfrak{D}_3^6$	$\mathfrak{C}_3^3$	—	— — —	$\mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3$	—	
	$\mathfrak{D}_3^7$	$\mathfrak{C}_3^4$	—	— — —	$\mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3$	—	rhomboedrisch
$\mathfrak{D}_{3d}$	$\mathfrak{D}_{3d}^1$ $\mathfrak{D}_{3d}^3$	$\mathfrak{C}_3^1$	—	$\mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3$	$\mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3$	$\mathfrak{C}_i$	hexagonal
	$\mathfrak{D}_{3d}^2$ $\mathfrak{D}_{3d}^4$	$\mathfrak{C}_3^1$	—	$\mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4$	$\mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3$	$\mathfrak{C}_i$	
	$\mathfrak{D}_{3d}^5$	$\mathfrak{C}_3^4$	—	$\mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3$	$\mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3$	$\mathfrak{C}_i$	rhomboedrisch
	$\mathfrak{D}_{3d}^6$	$\mathfrak{C}_3^4$	—	$\mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4$	$\mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3$	$\mathfrak{C}_i$	
$\mathfrak{S}_4$	$\mathfrak{S}_4^1$	$\mathfrak{S}_4^1$	—	—	—	—	tetragonal, einfach
	$\mathfrak{S}_4^2$	$\mathfrak{S}_4^2$	—	—	—	—	tetragonal, innenzentriert
$\mathfrak{C}_4$	$\mathfrak{C}_4^1$	$\mathfrak{C}_4^1$	—	—	—	—	tetragonal, einfach
	$\mathfrak{C}_4^3$	$\mathfrak{C}_4^3$	—	—	—	—	
	$\mathfrak{C}_4^2$	$\mathfrak{C}_4^2$	—	—	—	—	
	$\mathfrak{C}_4^4$	$\mathfrak{C}_4^4$	—	—	—	—	
	$\mathfrak{C}_4^5$	$\mathfrak{C}_4^5$	—	—	—	—	tetragonal, innenzentriert
	$\mathfrak{C}_4^6$	$\mathfrak{C}_4^6$	—	—	—	—	

Klasse	Raumgruppe	Hauptachse	Hauptsymmetrieebene	Nebenachsen	Nebensymmetrieebenen	Zwischenachsen	Zwischensymmetrieebenen	Symmetriezentrum	Elementarparallelepiped
$\mathfrak{C}_{4v}$	$\mathfrak{C}_{4v}^{1}$	$\mathfrak{C}_4^1$	—	—	$\mathfrak{C}_s^1\,\mathfrak{C}_s^1$	—	$\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3$	—	tetragonal, einfach
	$\mathfrak{C}_{4v}^{2}$	$\mathfrak{C}_4^1$	—	—	$\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2$	—	$\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3$	—	
	$\mathfrak{C}_{4v}^{5}$, $\mathfrak{C}_{4v}^{6}$	$\mathfrak{C}_4^1$	—	—	$\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2$	—	$\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4$	—	
	$\mathfrak{C}_{4v}^{3}$, $\mathfrak{C}_{4v}^{4}$	$\mathfrak{C}_4^3$	—	—	$\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2$	—	$\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3$	—	
	$\mathfrak{C}_{4v}^{7}$	$\mathfrak{C}_4^3$	—	—	$\mathfrak{C}_s^1\,\mathfrak{C}_s^1$	—	$\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4$	—	
	$\mathfrak{C}_{4v}^{8}$	$\mathfrak{C}_4^3$	—	—	$\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2$	—	$\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4$	—	
	$\mathfrak{C}_{4v}^{9}$	$\mathfrak{C}_4^5$	—	—	$\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3$	—	$\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3$	—	tetragonal, innenzentriert
	$\mathfrak{C}_{4v}^{10}$	$\mathfrak{C}_4^5$	—	—	$\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4$	—	$\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3$	—	
	$\mathfrak{C}_{4v}^{11}$	$\mathfrak{C}_4^6$	—	—	$\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3$	—	$\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4$	—	
	$\mathfrak{C}_{4v}^{12}$	$\mathfrak{C}_4^6$	—	—	$\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4$	—	$\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4$	—	
$\mathfrak{C}_{4h}$	$\mathfrak{C}_{4h}^{1}$	$\mathfrak{C}_4^1$	$\mathfrak{C}_s^1$	—	—	—	—	$\mathfrak{C}_i$	tetragonal, einfach
	$\mathfrak{C}_{4h}^{3}$	$\mathfrak{C}_4^1$	$\mathfrak{C}_s^2$	—	—	—	—	$\mathfrak{C}_i$	
	$\mathfrak{C}_{4h}^{2}$	$\mathfrak{C}_4^3$	$\mathfrak{C}_s^1$	—	—	—	—	$\mathfrak{C}_i$	
	$\mathfrak{C}_{4h}^{4}$	$\mathfrak{C}_4^3$	$\mathfrak{C}_s^2$	—	—	—	—	$\mathfrak{C}_i$	
	$\mathfrak{C}_{4h}^{5}$	$\mathfrak{C}_4^5$	$\mathfrak{C}_s^3$	—	—	—	—	$\mathfrak{C}_i$	tetragonal, innenzentriert
	$\mathfrak{C}_{4h}^{6}$	$\mathfrak{C}_4^6$	$\mathfrak{C}_s^4$	—	—	—	—	$\mathfrak{C}_i$	
$\mathfrak{B}_d$	$\mathfrak{B}_d^{1}$	$\mathfrak{C}_4^1$	—	$\mathfrak{C}_2^1\,\mathfrak{C}_2^1$	—	—	$\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3$	—	tetragonal, einfach: eventuell basisflächenzentriert
	$\mathfrak{B}_d^{2}$	$\mathfrak{C}_4^1$	—	$\mathfrak{C}_2^1\,\mathfrak{C}_2^1$	—	—	$\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4$	—	
	$\mathfrak{B}_d^{3}$	$\mathfrak{C}_4^1$	—	$\mathfrak{C}_2^2\,\mathfrak{C}_2^2$	—	—	$\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3$	—	
	$\mathfrak{B}_d^{4}$	$\mathfrak{C}_4^1$	—	$\mathfrak{C}_2^2\,\mathfrak{C}_2^2$	—	—	$\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4$	—	
	$\mathfrak{B}_d^{5}$	$\mathfrak{C}_4^1$	—	$\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$	—	—	$\mathfrak{C}_s^1\,\mathfrak{C}_s^1$	—	
	$\mathfrak{B}_d^{6}$, $\mathfrak{B}_d^{7}$, $\mathfrak{B}_d^{8}$	$\mathfrak{C}_4^1$	—	$\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$	—	—	$\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2$	—	
	$\mathfrak{B}_d^{9}$, $\mathfrak{B}_d^{11}$	$\mathfrak{C}_4^2$	—	$\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$	—	—	$\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3$	—	tetragonal, innenzentriert: eventuell zum Teil innenzentriert, zum Teil allseitig flächenzentriert
	$\mathfrak{B}_d^{10}$, $\mathfrak{B}_d^{12}$	$\mathfrak{C}_4^2$	—	$\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$	—	—	$\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4$	—	

Klasse	Raumgruppe	Hauptachse	Hauptsymmetrieebene	Nebenachsen	Nebensymmetrieebenen	Zwischenachsen	Zwischensymmetrieebenen	Symmetriezentrum	Elementarparallelepiped
$\mathfrak{C}_4$	$\mathfrak{D}_4^{\,1}$	$\mathfrak{C}_4^{\,1}$	—	$\mathfrak{C}_2^{\,1}\,\mathfrak{C}_2^{\,1}$	—	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	—	—	
	$\mathfrak{D}_4^{\,2}$	$\mathfrak{C}_4^{\,1}$	—	$\mathfrak{C}_2^{\,2}\,\mathfrak{C}_2^{\,2}$	—	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	—	—	
	$\mathfrak{D}_4^{\,5}$	$\mathfrak{C}_4^{\,3}$	—	$\mathfrak{C}_2^{\,1}\,\mathfrak{C}_2^{\,1}$	—	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	—	—	
	$\mathfrak{D}_4^{\,6}$	$\mathfrak{C}_4^{\,3}$	—	$\mathfrak{C}_2^{\,2}\,\mathfrak{C}_2^{\,2}$	—	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	—	—	tetragonal, einfach
	$\mathfrak{D}_4^{\,3}$	$\mathfrak{C}_4^{\,2}$	—	$\mathfrak{C}_2^{\,1}\,\mathfrak{C}_2^{\,1}$	—	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	—	—	
	$\mathfrak{D}_4^{\,4}$	$\mathfrak{C}_4^{\,2}$	—	$\mathfrak{C}_2^{\,2}\,\mathfrak{C}_2^{\,2}$	—	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	—	—	
	$\mathfrak{D}_4^{\,7}$	$\mathfrak{C}_4^{\,4}$	—	$\mathfrak{C}_2^{\,1}\,\mathfrak{C}_2^{\,1}$	—	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	—	—	
	$\mathfrak{D}_4^{\,8}$	$\mathfrak{C}_4^{\,4}$	—	$\mathfrak{C}_2^{\,2}\,\mathfrak{C}_2^{\,2}$	—	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	—	—	
	$\mathfrak{D}_4^{\,9}$	$\mathfrak{C}_4^{\,5}$	—	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	—	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	—	—	tetragonal, innenzentriert
	$\mathfrak{D}_4^{\,10}$	$\mathfrak{C}_4^{\,6}$	—	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	—	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	—	—	
$\mathfrak{D}_{4h}$	$\mathfrak{D}_{4h}^{\,1}$	$\mathfrak{C}_4^{\,1}$	$\mathfrak{C}_s^{\,1}$	$\mathfrak{C}_2^{\,1}\,\mathfrak{C}_2^{\,1}$	$\mathfrak{C}_s^{\,1}\,\mathfrak{C}_s^{\,1}$	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	$\mathfrak{C}_s^{\,3}\,\mathfrak{C}_s^{\,3}$	$\mathfrak{C}_i$	
	$\mathfrak{D}_{4h}^{\,2}$	$\mathfrak{C}_4^{\,1}$	$\mathfrak{C}_s^{\,1}$	$\mathfrak{C}_2^{\,1}\,\mathfrak{C}_2^{\,1}$	$\mathfrak{C}_s^{\,2}\,\mathfrak{C}_s^{\,2}$	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	$\mathfrak{C}_s^{\,4}\,\mathfrak{C}_s^{\,4}$	$\mathfrak{C}_i$	
	$\mathfrak{D}_{4h}^{\,5}$	$\mathfrak{C}_4^{\,1}$	$\mathfrak{C}_s^{\,1}$	$\mathfrak{C}_2^{\,2}\,\mathfrak{C}_2^{\,2}$	$\mathfrak{C}_s^{\,2}\,\mathfrak{C}_s^{\,2}$	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	$\mathfrak{C}_s^{\,3}\,\mathfrak{C}_s^{\,3}$	$\mathfrak{C}_i$	
	$\mathfrak{D}_{4h}^{\,6}$	$\mathfrak{C}_4^{\,1}$	$\mathfrak{C}_s^{\,1}$	$\mathfrak{C}_2^{\,2}\,\mathfrak{C}_2^{\,2}$	$\mathfrak{C}_s^{\,2}\,\mathfrak{C}_s^{\,2}$	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	$\mathfrak{C}_s^{\,4}\,\mathfrak{C}_s^{\,4}$	$\mathfrak{C}_i$	
	$\mathfrak{D}_{4h}^{\,3}$	$\mathfrak{C}_4^{\,1}$	$\mathfrak{C}_s^{\,2}$	$\mathfrak{C}_2^{\,1}\,\mathfrak{C}_2^{\,1}$	$\mathfrak{C}_s^{\,2}\,\mathfrak{C}_s^{\,2}$	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	$\mathfrak{C}_s^{\,3}\,\mathfrak{C}_s^{\,3}$	$\mathfrak{C}_i$	
	$\mathfrak{D}_{4h}^{\,4}$	$\mathfrak{C}_4^{\,1}$	$\mathfrak{C}_s^{\,2}$	$\mathfrak{C}_2^{\,1}\,\mathfrak{C}_2^{\,1}$	$\mathfrak{C}_s^{\,2}\,\mathfrak{C}_s^{\,2}$	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	$\mathfrak{C}_s^{\,4}\,\mathfrak{C}_s^{\,4}$	$\mathfrak{C}_i$	
	$\mathfrak{D}_{4h}^{\,7}$	$\mathfrak{C}_4^{\,1}$	$\mathfrak{C}_s^{\,2}$	$\mathfrak{C}_2^{\,2}\,\mathfrak{C}_2^{\,2}$	$\mathfrak{C}_s^{\,1}\,\mathfrak{C}_s^{\,1}$	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	$\mathfrak{C}_s^{\,3}\,\mathfrak{C}_s^{\,3}$	$\mathfrak{C}_i$	
	$\mathfrak{D}_{4h}^{\,8}$	$\mathfrak{C}_4^{\,1}$	$\mathfrak{C}_s^{\,2}$	$\mathfrak{C}_2^{\,2}\,\mathfrak{C}_2^{\,2}$	$\mathfrak{C}_s^{\,2}\,\mathfrak{C}_s^{\,2}$	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	$\mathfrak{C}_s^{\,4}\,\mathfrak{C}_s^{\,4}$	$\mathfrak{C}_i$	tetragonal, einfach
	$\mathfrak{D}_{4h}^{\,9}$	$\mathfrak{C}_4^{\,3}$	$\mathfrak{C}_s^{\,1}$	$\mathfrak{C}_2^{\,1}\,\mathfrak{C}_2^{\,1}$	$\mathfrak{C}_s^{\,1}\,\mathfrak{C}_s^{\,1}$	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	$\mathfrak{C}_s^{\,4}\,\mathfrak{C}_s^{\,4}$	$\mathfrak{C}_i$	
	$\mathfrak{D}_{4h}^{\,10}$	$\mathfrak{C}_4^{\,3}$	$\mathfrak{C}_s^{\,1}$	$\mathfrak{C}_2^{\,1}\,\mathfrak{C}_2^{\,1}$	$\mathfrak{C}_s^{\,2}\,\mathfrak{C}_s^{\,2}$	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	$\mathfrak{C}_s^{\,3}\,\mathfrak{C}_s^{\,3}$	$\mathfrak{C}_i$	
	$\mathfrak{D}_{4h}^{\,14}$	$\mathfrak{C}_4^{\,3}$	$\mathfrak{C}_s^{\,1}$	$\mathfrak{C}_2^{\,2}\,\mathfrak{C}_2^{\,2}$	$\mathfrak{C}_s^{\,2}\,\mathfrak{C}_s^{\,2}$	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	$\mathfrak{C}_s^{\,3}\,\mathfrak{C}_s^{\,3}$	$\mathfrak{C}_i$	
	$\mathfrak{D}_{4h}^{\,13}$	$\mathfrak{C}_4^{\,3}$	$\mathfrak{C}_s^{\,1}$	$\mathfrak{C}_2^{\,2}\,\mathfrak{C}_2^{\,2}$	$\mathfrak{C}_s^{\,2}\,\mathfrak{C}_s^{\,2}$	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	$\mathfrak{C}_s^{\,4}\,\mathfrak{C}_s^{\,4}$	$\mathfrak{C}_i$	
	$\mathfrak{D}_{4h}^{\,12}$	$\mathfrak{C}_4^{\,3}$	$\mathfrak{C}_s^{\,2}$	$\mathfrak{C}_2^{\,1}\,\mathfrak{C}_2^{\,1}$	$\mathfrak{C}_s^{\,2}\,\mathfrak{C}_s^{\,2}$	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	$\mathfrak{C}_s^{\,3}\,\mathfrak{C}_s^{\,3}$	$\mathfrak{C}_i$	
	$\mathfrak{D}_{4h}^{\,11}$	$\mathfrak{C}_4^{\,3}$	$\mathfrak{C}_s^{\,2}$	$\mathfrak{C}_2^{\,1}\,\mathfrak{C}_2^{\,1}$	$\mathfrak{C}_s^{\,2}\,\mathfrak{C}_s^{\,2}$	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	$\mathfrak{C}_s^{\,4}\,\mathfrak{C}_s^{\,4}$	$\mathfrak{C}_i$	
	$\mathfrak{D}_{4h}^{\,15}$	$\mathfrak{C}_4^{\,3}$	$\mathfrak{C}_s^{\,2}$	$\mathfrak{C}_2^{\,2}\,\mathfrak{C}_2^{\,2}$	$\mathfrak{C}_s^{\,1}\,\mathfrak{C}_s^{\,1}$	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	$\mathfrak{C}_s^{\,4}\,\mathfrak{C}_s^{\,4}$	$\mathfrak{C}_i$	
	$\mathfrak{D}_{4h}^{\,16}$	$\mathfrak{C}_4^{\,3}$	$\mathfrak{C}_s^{\,2}$	$\mathfrak{C}_2^{\,2}\,\mathfrak{C}_2^{\,2}$	$\mathfrak{C}_s^{\,2}\,\mathfrak{C}_s^{\,2}$	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	$\mathfrak{C}_s^{\,3}\,\mathfrak{C}_s^{\,3}$	$\mathfrak{C}_i$	
	$\mathfrak{D}_{4h}^{\,17}$	$\mathfrak{C}_4^{\,5}$	$\mathfrak{C}_s^{\,3}$	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	$\mathfrak{C}_s^{\,3}\,\mathfrak{C}_s^{\,3}$	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	$\mathfrak{C}_s^{\,3}\,\mathfrak{C}_s^{\,3}$	$\mathfrak{C}_i$	
	$\mathfrak{D}_{4h}^{\,18}$	$\mathfrak{C}_4^{\,5}$	$\mathfrak{C}_s^{\,3}$	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	$\mathfrak{C}_s^{\,4}\,\mathfrak{C}_s^{\,4}$	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	$\mathfrak{C}_s^{\,3}\,\mathfrak{C}_s^{\,3}$	$\mathfrak{C}_i$	tetragonal, innenzentriert
	$\mathfrak{D}_{4h}^{\,19}$	$\mathfrak{C}_4^{\,6}$	$\mathfrak{C}_s^{\,4}$	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	$\mathfrak{C}_s^{\,3}\,\mathfrak{C}_s^{\,3}$	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	$\mathfrak{C}_s^{\,4}\,\mathfrak{C}_s^{\,4}$	$\mathfrak{C}_i$	
	$\mathfrak{D}_{4h}^{\,20}$	$\mathfrak{C}_4^{\,6}$	$\mathfrak{C}_s^{\,4}$	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	$\mathfrak{C}_s^{\,4}\,\mathfrak{C}_s^{\,4}$	$\mathfrak{C}_2^{\,3}\,\mathfrak{C}_2^{\,3}$	$\mathfrak{C}_s^{\,4}\,\mathfrak{C}_s^{\,4}$	$\mathfrak{C}_i$	

Klasse	Raumgruppe	Hauptachse	Haupt-Symmetrieebene	Nebenachsen	Neben-Symmetrieebenen	Zwischenachsen	Zwischen-Symmetrieebenen	Symmetriezentrum	Elementarparallelepiped
$\mathfrak{C}_{3h}$	$\mathfrak{C}_{3h}^{1}$	$\mathfrak{C}_3^{1}$	$\mathfrak{C}_s^{1}$	—	—	—	—	—	hexagonal (gewöhnlich hexagonal = einfachprimitiv) (orthohexagonal = doppeltprimitiv)
$\mathfrak{D}_{3h}$	$\mathfrak{D}_{3h}^{1}$, $\mathfrak{D}_{3h}^{3}$	$\mathfrak{C}_3^{1}$	$\mathfrak{C}_s^{1}$	$\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$	$\mathfrak{C}_s^{3}$ $\mathfrak{C}_s^{3}$ $\mathfrak{C}_s^{3}$	—	—	—	
	$\mathfrak{D}_{3h}^{2}$, $\mathfrak{D}_{3h}^{4}$	$\mathfrak{C}_3^{1}$	$\mathfrak{C}_s^{1}$	$\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$	$\mathfrak{C}_s^{4}$ $\mathfrak{C}_s^{4}$ $\mathfrak{C}_s^{4}$	—	—	—	
$\mathfrak{C}_6$	$\mathfrak{C}_6^{1}$	$\mathfrak{C}_6^{1}$	—	—	—	—	—	—	
	$\mathfrak{C}_6^{6}$	$\mathfrak{C}_6^{6}$	—	—	—	—	—	—	
	$\mathfrak{C}_6^{4}$	$\mathfrak{C}_6^{4}$	—	—	—	—	—	—	
	$\mathfrak{C}_6^{5}$	$\mathfrak{C}_6^{5}$	—	—	—	—	—	—	
	$\mathfrak{C}_6^{2}$	$\mathfrak{C}_6^{2}$	—	—	—	—	—	—	
	$\mathfrak{C}_6^{3}$	$\mathfrak{C}_6^{3}$	—	—	—	—	—	—	
$\mathfrak{C}_{6v}$	$\mathfrak{C}_{6v}^{1}$	$\mathfrak{C}_6^{1}$	—	—	$\mathfrak{C}_s^{3}$ $\mathfrak{C}_s^{3}$ $\mathfrak{C}_s^{3}$	—	$\mathfrak{C}_s^{3}$ $\mathfrak{C}_s^{3}$ $\mathfrak{C}_s^{3}$	—	
	$\mathfrak{C}_{6v}^{2}$	$\mathfrak{C}_6^{1}$	—	—	$\mathfrak{C}_s^{4}$ $\mathfrak{C}_s^{4}$ $\mathfrak{C}_s^{4}$	—	$\mathfrak{C}_s^{4}$ $\mathfrak{C}_s^{4}$ $\mathfrak{C}_s^{4}$	—	
	$\mathfrak{C}_{6v}^{3}$	$\mathfrak{C}_6^{6}$	—	—	$\mathfrak{C}_s^{3}$ $\mathfrak{C}_s^{3}$ $\mathfrak{C}_s^{3}$	—	$\mathfrak{C}_s^{4}$ $\mathfrak{C}_s^{4}$ $\mathfrak{C}_s^{4}$	—	
	$\mathfrak{C}_{6v}^{4}$	$\mathfrak{C}_6^{6}$	—	—	$\mathfrak{C}_s^{4}$ $\mathfrak{C}_s^{4}$ $\mathfrak{C}_s^{4}$	—	$\mathfrak{C}_s^{3}$ $\mathfrak{C}_s^{3}$ $\mathfrak{C}_s^{3}$	—	
$\mathfrak{C}_{6h}$	$\mathfrak{C}_{6h}^{1}$	$\mathfrak{C}_6^{1}$	$\mathfrak{C}_s^{1}$	—	—	—	—	$\mathfrak{C}_i$	
	$\mathfrak{C}_{6h}^{2}$	$\mathfrak{C}_6^{6}$	$\mathfrak{C}_s^{1}$	—	—	—	—	$\mathfrak{C}_i$	
$\mathfrak{D}_6$	$\mathfrak{D}_6^{1}$	$\mathfrak{C}_6^{1}$	—	$\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$	—	$\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$	—	—	
	$\mathfrak{D}_6^{6}$	$\mathfrak{C}_6^{6}$	—	$\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$	—	$\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$	—	—	
	$\mathfrak{D}_6^{4}$	$\mathfrak{C}_6^{4}$	—	$\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$	—	$\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$	—	—	
	$\mathfrak{D}_6^{5}$	$\mathfrak{C}_6^{5}$	—	$\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$	—	$\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$	—	—	
	$\mathfrak{D}_6^{2}$	$\mathfrak{C}_6^{2}$	—	$\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$	—	$\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$	—	—	
	$\mathfrak{D}_6^{3}$	$\mathfrak{C}_6^{3}$	—	$\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$	—	$\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$	—	—	
$\mathfrak{D}_{6h}$	$\mathfrak{D}_{6h}^{1}$	$\mathfrak{C}_6^{1}$	$\mathfrak{C}_s^{1}$	$\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$	$\mathfrak{C}_s^{3}$ $\mathfrak{C}_s^{3}$ $\mathfrak{C}_s^{3}$	$\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$	$\mathfrak{C}_s^{3}$ $\mathfrak{C}_s^{3}$ $\mathfrak{C}_s^{3}$	$\mathfrak{C}_i$	
	$\mathfrak{D}_{6h}^{2}$	$\mathfrak{C}_6^{1}$	$\mathfrak{C}_s^{1}$	$\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$	$\mathfrak{C}_s^{4}$ $\mathfrak{C}_s^{4}$ $\mathfrak{C}_s^{4}$	$\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$	$\mathfrak{C}_s^{4}$ $\mathfrak{C}_s^{4}$ $\mathfrak{C}_s^{4}$	$\mathfrak{C}_i$	
	$\mathfrak{D}_{6h}^{3}$	$\mathfrak{C}_6^{6}$	$\mathfrak{C}_s^{1}$	$\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$	$\mathfrak{C}_s^{3}$ $\mathfrak{C}_s^{3}$ $\mathfrak{C}_s^{3}$	$\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$	$\mathfrak{C}_s^{4}$ $\mathfrak{C}_s^{4}$ $\mathfrak{C}_s^{4}$	$\mathfrak{C}_i$	
	$\mathfrak{D}_{6h}^{4}$	$\mathfrak{C}_6^{6}$	$\mathfrak{C}_s^{1}$	$\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$	$\mathfrak{C}_s^{4}$ $\mathfrak{C}_s^{4}$ $\mathfrak{C}_s^{4}$	$\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$ $\mathfrak{C}_2^{3}$	$\mathfrak{C}_s^{3}$ $\mathfrak{C}_s^{3}$ $\mathfrak{C}_s^{3}$	$\mathfrak{C}_i$	

Klasse	Raumgruppe	Hauptachsen	Hauptsymmetrieebenen	Nebenachsen	Nebensymmetrieebenen	Trigonale Achsen	Symmetriezentrum	Elementarparallelepiped
$\mathfrak{T}$	$\mathfrak{T}^1$	$\mathfrak{C}_2^1\ \mathfrak{C}_2^1\ \mathfrak{C}_2^1$	—	—	—	$\mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4$	—	— einfacher Würfel
	$\mathfrak{T}^4$	$\mathfrak{C}_2^2\ \mathfrak{C}_2^2\ \mathfrak{C}_2^2$	—	—	—	$\mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4$	—	— einfacher Würfel
	$\mathfrak{T}^2$		—	—	—		—	— flächenzentrierter Würfel
	$\mathfrak{T}^3$	$\mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3$	—	—	—	$\mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4$	—	— innenzentrierter Würfel
	$\mathfrak{T}^5$		—	—	—		—	— innenzentrierter Würfel
$\mathfrak{T}_h$	$\mathfrak{T}_h^1$	$\mathfrak{C}_2^1\ \mathfrak{C}_2^1\ \mathfrak{C}_2^1$	$\mathfrak{C}_s^1\ \mathfrak{C}_s^1\ \mathfrak{C}_s^1$	—	—			— einfacher Würfel
	$\mathfrak{T}_h^2$	$\mathfrak{C}_2^1\ \mathfrak{C}_2^1\ \mathfrak{C}_2^1$	$\mathfrak{C}_s^2\ \mathfrak{C}_s^2\ \mathfrak{C}_s^2$	—	—			— einfacher Würfel
	$\mathfrak{T}_h^6$	$\mathfrak{C}_2^2\ \mathfrak{C}_2^2\ \mathfrak{C}_2^2$	$\mathfrak{C}_s^2\ \mathfrak{C}_s^2\ \mathfrak{C}_s^2$	—	—			— einfacher Würfel
	$\mathfrak{T}_h^3$							— flächenzentrierter Würfel
	$\mathfrak{T}_h^5$	$\mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3$	$\mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3$	—	—	$\mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4$	$\mathfrak{C}_1$	— innenzentrierter Würfel
	$\mathfrak{T}_h^4$							— flächenzentrierter Würfel
	$\mathfrak{T}_h^7$	$\mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3$	$\mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4$	—	—			— innenzentrierter Würfel
$\mathfrak{T}_d$	$\mathfrak{T}_d^1$	$\mathfrak{C}_4^1\ \mathfrak{C}_4^1\ \mathfrak{C}_4^1$	—	—	$\mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3$			— einfacher Würfel
	$\mathfrak{T}_d^4$	$\mathfrak{C}_4^1\ \mathfrak{C}_4^1\ \mathfrak{C}_4^1$	—	—	$\mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4$			— einfacher Würfel
	$\mathfrak{T}_d^2$							— flächenzentrierter Würfel
	$\mathfrak{T}_d^3$	$\mathfrak{C}_4^2\ \mathfrak{C}_4^2\ \mathfrak{C}_4^2$	—	—	$\mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3$	$\mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4$		— innenzentrierter Würfel
	$\mathfrak{T}_d^5$							— flächenzentrierter Würfel
	$\mathfrak{T}_d^6$	$\mathfrak{C}_4^2\ \mathfrak{C}_4^2\ \mathfrak{C}_4^2$	—	—	$\mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4$			— innenzentrierter Würfel
$\mathfrak{O}$	$\mathfrak{O}^1$	$\mathfrak{C}_4^1\ \mathfrak{C}_4^1\ \mathfrak{C}_4^1$	—		—		—	— einfacher Würfel
	$\mathfrak{O}^2$	$\mathfrak{C}_4^3\ \mathfrak{C}_4^3\ \mathfrak{C}_4^3$	—		—		—	— einfacher Würfel
	$\mathfrak{O}^6$	$\mathfrak{C}_4^2\ \mathfrak{C}_4^2\ \mathfrak{C}_4^2$	—		—		—	— einfacher Würfel
	$\mathfrak{O}^7$	$\mathfrak{C}_4^4\ \mathfrak{C}_4^4\ \mathfrak{C}_4^4$	—		—		—	— einfacher Würfel
	$\mathfrak{O}^3$			$\mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_3^3$				— flächenzentrierter Würfel
	$\mathfrak{O}^5$	$\mathfrak{C}_4^5\ \mathfrak{C}_4^5\ \mathfrak{C}_4^5$	—		—	$\mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4$		— innenzentrierter Würfel
	$\mathfrak{O}^4$							— flächenzentrierter Würfel
	$\mathfrak{O}^8$	$\mathfrak{C}_4^6\ \mathfrak{C}_4^6\ \mathfrak{C}_4^6$	—		—			— innenzentrierter Würfel
$\mathfrak{O}_h$	$\mathfrak{O}_h^1$	$\mathfrak{C}_4^1\ \mathfrak{C}_4^1\ \mathfrak{C}_4^1$	$\mathfrak{C}_s^1\ \mathfrak{C}_s^1\ \mathfrak{C}_s^1$		$\mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3$			— einfacher Würfel
	$\mathfrak{O}_h^2$	$\mathfrak{C}_4^1\ \mathfrak{C}_4^1\ \mathfrak{C}_4^1$	$\mathfrak{C}_s^2\ \mathfrak{C}_s^2\ \mathfrak{C}_s^2$		$\mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4$			— einfacher Würfel
	$\mathfrak{O}_h^3$	$\mathfrak{C}_4^3\ \mathfrak{C}_4^3\ \mathfrak{C}_4^3$	$\mathfrak{C}_s^1\ \mathfrak{C}_s^1\ \mathfrak{C}_s^1$		$\mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4$			— einfacher Würfel
	$\mathfrak{O}_h^4$	$\mathfrak{C}_4^3\ \mathfrak{C}_4^3\ \mathfrak{C}_4^3$	$\mathfrak{C}_s^2\ \mathfrak{C}_s^2\ \mathfrak{C}_s^2$		$\mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3$			— einfacher Würfel
	$\mathfrak{O}_h^5$							— flächenzentrierter Würfel
	$\mathfrak{O}_h^9$	$\mathfrak{C}_4^5\ \mathfrak{C}_4^5\ \mathfrak{C}_4^5$	$\mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3$	$\mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3$	$\mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3$	$\mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4$	$\mathfrak{C}_1$	— innenzentrierter Würfel
	$\mathfrak{O}_h^6$	$\mathfrak{C}_4^5\ \mathfrak{C}_4^5\ \mathfrak{C}_4^5$	$\mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3$		$\mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4$			— flächenzentrierter Würfel
	$\mathfrak{O}_h^7$	$\mathfrak{C}_4^6\ \mathfrak{C}_4^6\ \mathfrak{C}_4^6$	$\mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4$		$\mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3$			— flächenzentrierter Würfel
	$\mathfrak{O}_h^8$							— flächenzentrierter Würfel
	$\mathfrak{O}_h^{10}$	$\mathfrak{C}_4^6\ \mathfrak{C}_4^6\ \mathfrak{C}_4^6$	$\mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4$		$\mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4$			— innenzentrierter Würfel

II. Haupttabelle:

Kristallsystem (Abteilung)	Symbol der Kristalklasse	Symmetrieelemente
Triklin	C_1	(Identität)
	C_i	Z
Monoklin	C_s	1 SE
	C_2	1 ○↓
	C_{2h}	(1 SE + 1 ○) + Z
Rhombisch	C_{2v}	1 SE + 1 SE + 1 ○↓
	V	1 ○ + 1 ○ + 1 ○
	V_h	(1 SE + 1 ○) + (1 SE + 1 ○) + (1 SE + 1 ○) + Z
Rhomboedrisch (Trigonal)	C_3	1 △↓
	C_{3i}	1 ⟨△⟩ = 1 △ + Z
	C_{3v}	3 SE + 1 △↓
	D_3	1 △ + 3 ○↓
	D_{3d}	(3 SE + 3 ○) + 1 ⟨△⟩ (+Z)
Trigonal	C_{3h}	(1 SE + 1 △)
	D_{3h}	(1 SE + 1 △) + 3 SE + 3 ○↓
Hexagonal	C_6	1 ⟨⬡⟩↓
	C_{6h}	(1 SE + 1 ⟨⬡⟩) + Z
	C_{6v}	3 SE + 3 SE + 1 ⟨⬡⟩↓
	D_6	1 ⟨⬡⟩ + (3 + 3) ○
	D_{6h}	(1 SE + 1 ⟨⬡⟩) + (3 SE + 3 ○) + (3 SE + 3 ○) + Z
Tetragonal	C_4	1 □↓
	C_{4h}	(1 SE + 1 □) + Z
	C_{4v}	2 SE + 2 SE + 1 □↓
	D_4	1 □ + (2 + 2) ○
	D_{4h}	(1 SE + 1 □) + (2 SE + 2 ○) + (2 SE + 2 ○) + Z
	S_4	1 ⟨◇⟩
	V_d	(2 SE + 2 ○) + 1 ⟨◇⟩
Kubisch	T	3 ○ + 4 △↓
	T_h	(3 SE + 3 ○) + 4 ⟨△⟩ + (Z)
	T_d	6 SE + 3 ⟨◇⟩ + 4 △↓
	O	3 □ + 6 ○ + 4 △
	O_h	(3 SE + 3 □) + (6 SE + 6 ○) + 4 ⟨△⟩ + (Z)

Die 32 Kristallklassen

Bezeichnung (Französische Schule, Schoenflies)	Groth sche Klassenbezeichnung
triklin hemiedrisch	Asymmetrische oder pediale Klasse
triklin holoedrisch	Pinakoidale Klasse
monoklin hemiedrisch	Domatische Klasse
monoklin hemimorph	Monoklin sphenoidische Klasse
monoklin holoedrisch	Monoklin prismatische Klasse
rhombisch hemimorph	Rhombisch pyramidale Klasse
rhombisch hemiedrisch	Rhombisch bisphenoidische Klasse
rhombisch holoedrisch	Rhombisch bipyramidale Klasse
rhomboedrisch tetartoedrisch	Trigonal pyramidale Klasse
rhomboedrisch paramorph	Rhomboedrische Klasse
rhomboedrisch hemimorph	Ditrigonal pyramidale Klasse
rhomboedrisch enantiomorph	Trigonal trapezoedrische Klasse
rhomboedrisch holoedrisch	Ditrigonal skalenoedrische Klasse
hexagonal tetartoedrisch mit trig. Achse (Trigonal paramorph)	Trigonal bipyramidale Klasse
hexagonal hemiedrisch mit trig. Achse (Trigonal holoedrisch)	Ditrigonal bipyramidale Klasse
hexagonal tetartoedrisch	Hexagonal pyramidale Klasse
hexagonal paramorph	Hexagonal bipyramidale Klasse
hexagonal hemimorph	Dihexagonal pyramidale Klasse
hexagonal enantiomorph	Hexagonal trapezoedrische Klasse
hexagonal holoedrisch	Dihexagonal bipyramidale Klasse
tetragonal tetartoedrisch	Tetragonal pyramidale Klasse
tetragonal paramorph	Tetragonal bipyramidale Klasse
tetragonal hemimorph	Ditetragonal pyramidale Klasse
tetragonal enantiomorph	Tetragonal trapezoedrische Klasse
tetragonal holoedrisch	Ditetragonal bipyramidale Klasse
tetragonal tetartoedrisch zweiter Art	Tetragonal bisphenoidische Klasse
Tetragonal hemiedrisch zweiter Art (sphenoidisch)	Tetragonal skalenoedrische Klasse (didigonal)
kubisch tetartoedrisch	Tetraedrisch-pentagondodekaedrische Klasse
kubisch paramorph	Dyakisdodekaedrische Klasse
kubisch hemimorph	Hexakistetraedrische Klasse
kubisch enantiomorph	Pentagonikositetraedrische Klasse
kubisch holoedrisch	Hexakisoktaedrische Klasse

III. Kapitel: Die analytisch-geometrische Darstellung der 230 Raumsysteme

1. Allgemeines

Kanten der soeben gekennzeichneten, jeweilen einfachsten Elementarparallelepipede sind Koordinatenachsen und gleichzeitig Einheitsmaßstäbe. Alle Symmetrieelemente, die sich nicht mittels elementarer Translationen ($r \cdot a + s \cdot b + t \cdot c$, wo r, s, t ganze Zahlen einschließlich Null sind) auseinander ableiten lassen, werden für ein Elementarparallelepiped angegeben. Dadurch ist das ganze System bestimmt. Man geht also vor, als ob a, b, c ein primitives Tripel bilden würden. Tun sie das nicht, so sind von den angegebenen Symmetrieelementen selbst wieder einzelne identisch, ihre Zahl ist dann doppelt oder eventuell viermal so groß wie die Zahl nichtidentischer Symmetrieelemente einer isomorphen Parallelschar. Die Angabe der einfachsten Form, in der ein primitives Tripel sich in a, b, c ausdrücken läßt, gibt über die Art der Translationsgruppe Auskunft.

Ein Raumsystem besteht im allgemeinsten Falle aus verschiedenen parallelen Scharen von Spiegelebenen, Gleitspiegelebenen, Drehungsachsen, Schraubenachsen und Drehspiegelachsen mit Drehspiegelebenen (inklusive Symmetriezentren). Dadurch wird das System gleichwertiger Punkte von der Lage abhängig. In den Raumsystemen $\mathfrak{C}_1$, die keine eigentlichen Symmetrieelemente besitzen, sind nicht zwei Punkte eines primitiven Parallelepipeds gleichwertig. Alle gleichwertigen Punkte bilden Gitter von ein und derselben Form, nämlich von der Form der zugehörigen Translationsgruppe. In den übrigen Raumsystemen sind einer Punktlage alle jenen Lagen, in die der Punkt durch die Deckoperationen an den Symmetrieelementen übergeht, gleichwertig. Jedem Punkt gehört daher eine, von der Lage zu den Symmetrieelementen abhängige Zahl gleichwertiger Punkte pro Elementarparallelepiped an. Wird ein Punkt durch die den Symmetrieelementen zukommenden Operationen in (inklusive der Ausgangslage) n ein und demselben Elementarparallelepiped ganz angehörige gleichwertige Punkte übergeführt, so nennt man ihn hinsichtlich des Elementarparallelepipeds n-zählig.

Die Zähligkeit der Punktlage ist = n.

In einem gegebenen Raumsystem sind alle Punktlagen, die keinerlei Symmetrieelementen angehören, gleichzählig, da jede der vorhandenen unabhängigen Deckoperationen den Punkt in eine neue Lage überführt. Die Zähligkeit entspricht der größtmöglichen in dem betreffenden Elementarparallelepiped. Raumsysteme ein und derselben Klasse besitzen die gleiche Zahl unabhängiger Deckoperationen, diese unterscheiden sich lediglich in den Verschiebungsgrößen, das heißt den mit Drehungen oder Spiegelungen verbundenen Translationen, voneinander. Die größtmögliche Zähligkeit von Punktlagen ist daher für alle Raumsysteme einer Klasse, die auf ein gleichprimitives Elementarparallelepiped bezogen werden, gleich. Ist das Elementarparallelepiped doppelt- oder vierfachprimitiv, so ist die diesbezügliche Zähligkeit naturgemäß doppelt- oder viermal so groß als im einfach primitiven Parallelepiped. Trotzdem die Zähligkeit aller, keinem Symmetrieelement angehöriger, Punktlagen eines Raumsystemes gleich ist, bilden die gleichwertigen Punkte je nach der Lage einen verschiedenen Gitterkomplex. Mit der Ausgangslage ändert sich das Bild der Punktzusammengehörigkeit, die Variationsfähigkeit ist eine unendlichfache. Punkte, die auf Schraubenachsen oder Gleitspiegelebenen liegen, werden durch die Schraubungsoperation, beziehungsweise die Gleitspiegelung, ebenfalls nicht in sich selbst, sondern in neue Punkte übergeführt. Gehören sie daher weiter keinen Symmetrieelementen an, so ist die Zähligkeit gleich groß wie für Punkte, die auf gar keinen Symmetrieelementen liegen. Selbstverständlich führt die Schraubenbewegung der Achse, beziehungsweise die Gleitspiegelung der Ebene, den Punkt in wiederum auf der Achse oder Ebene liegende Punkte über, beeinflußt also die Art des zusammengehörigen Gitterkomplexes.

Auch Punkte, die nur auf Drehspiegelebenen, nicht aber im Schnittpunkt der Drehspiegelebene und Drehspiegelachse liegen, werden in ihrer Zähligkeit nicht beeinflußt. Von allen derartigen Punkten sagt man, sie besitzen allgemeine oder allgemeinste Lage, die Zähligkeit ist eine maximalste. Die Punkte, oder in diesen Punkten liegende kleinste Massenteilchen, müssen dann auch keinerlei Symmetriebedingungen genügen. Die ganze Symmetrie eines derartigen Punktsystemes, beziehungsweise eines derartigen Massenteilchenhaufens, liegt in der Anordnung und ist von der Gestalt des Einzelbausteines unabhängig: Die Einzelbausteine stehen selbst in Spiegel- oder Gleitspiegelstellung, in Inversion, Dreh- oder Schraubenstellung zueinander.

Punkte allgemeinster Lage finden sich immer in räumlichem Zusammenhang, die Teilräume werden durch Spiegelebenen, Drehungsachsen voneinander getrennt. Eine derartige Punktlage kann daher im allgemeinen nach einer beliebigen Richtung um einen kleinen Betrag verschoben werden, ohne daß die Zähligkeit erniedrigt oder erhöht wird.

Man sagt, die allgemeine oder allgemeinste Lage besitze hinsichtlich der Zähligkeit oder der Symmetriebedingungen drei (beziehungsweise unendlich viele) Freiheitsgrade.

Liegt ein Punkt auf einer Spiegelebene, einer Drehungsachse, in einem Symmetriezentrum oder im Schnittpunkt einer Drehspiegelachse mit einer Drehspiegelebene, so wird er durch die Operationen der betreffenden Symmetrieelemente in sich selbst übergeführt. Dadurch wird die Zähligkeit, das heißt die Zahl des Wiederauftretens an anderen Stellen des Raumes eines Elementarparallelepipeds, erniedrigt.

n sei die Zähligkeit der allgemeinsten Lage. Liegt der Punkt auf einer Spiegelebene, so führt die Spiegelung ihn in sich selbst über, die Zähligkeit ist nur $\frac{n}{2}$. Gehört der Punkt einer p-zähligen Drehungsachse an, so wird er durch alle Achsendrehungen in sich selbst übergeführt, seine Zähligkeit ist nur $\frac{n}{p}$ usw. Gehört der Punkt gleichzeitig mehreren der oben genannten Symmetrieelemente an, so wird seine Zähligkeit in dem Maße erniedrigt, als voneinander unabhängige Deckoperationen vorhanden sind. Die durch einen Punkt gehenden Symmetrieelemente müssen naturgemäß den allgemeinen Bedingungen der Sätze 1—12 auf Seite 44 ff. genügen, d. h. Drehungsachsen, Spiegelebenen, Symmetriezentren, Drehspiegelachsen und Drehspiegelebenen können nur in Kombination auftreten, die eine der 32 aufs Kontinuum bezogenen Kristallklassen charakterisieren. Die betreffenden Punkte werden dann sovielmal in sich selbst übergeführt, als die allgemeinste Kristallform der betreffenden Klasse Flächen hat.

Die Punkte, beziehungsweise Massenteilchen, deren Schwerpunkte die betreffende Lage haben, müssen in allen diesen Fällen mindestens die durch die Punktlage markierte Symmetrie besitzen, das heißt die den Symmetrieelementen zukommenden Deckoperationen müssen tatsächlich Deckoperationen für die Massenteilchen sein. Mit jeder geringeren als der maximalsten Zähligkeit ist daher eine Symmetriebedingung verknüpft. Diese notwendig vorhanden sein müssende Minimalsymmetrie entspricht stets der Symmetriegruppe einer der 32 aufs Kontinuum bezogenen Kristallklassen. Die Symmetriebedingungen sind natürlich für alle gleichwertigen Punkte einander gleich (liegt einer auf einer Spiegelebene, so gehen auch durch alle anderen dazu gehörigen gleichwertigen Punkte Spiegelebenen usw.). In allen diesen Fällen ist die resultierende Symmetrie eines zusammengehörigen Punkthaufens oder Massenteilchenhaufens teils durch die Anordnung, teils durch Eigensymmetrie der Bausteine bedingt. Liegt ein Punkt lediglich auf einer Spiegelebene, so bleiben sich Zähligkeit und Symmetriebedingung bei einer Verschiebung auf dieser Ebene gleich. Man sagt, die Punktlage besitze zwei Freiheitsgrade der Lageänderung.

Auf einer Drehungsachse, die zugleich auch Schnittlinie von Spiegelebenen sein kann, bleiben Zähligkeit und Symmetriebedingung erhalten, wenn der Punkt auf dieser Achse bewegt wird, es sei denn, die Bewegung führe ihn in einen ausgezeichneten Punkt über, durch den noch weitere Symmetrieelemente gehen. Die Punktlage besitzt einen Freiheitsgrad. Ein Freiheitsgrad bedeutet somit gleichbleibende Zähligkeit in einer Richtung, erhöhte Zähligkeit bei Lageänderungen nach allen anderen Richtungen.

Symmetriezentren, Schnittpunkte von Drehungsachsen oder von Drehungsachsen mit Spiegelebenen, beziehungsweise Drehspiegelachsen mit Drehspiegelebenen sind ausgezeichnete Punkte ohne Freiheitsgrad. Bei jeder kleinen Verschiebung ändern sich Zähligkeit und Symmetriebedingung. Ein Massenteilchen, beispielsweise, dessen Schwerpunkt auf ein Symmetriezentrum fällt, muß sich selbst invers gebaut sein. Wird der Schwerpunkt, bei Erhaltung des Raumsystemes, nur wenig verschoben, so müßte das Massenteilchen in Inversionsstellung zum Symmetriezentrum neu auftreten, seine Zähligkeit pro Elementarparallelepiped würde verdoppelt.

Durch die einem Raumsysteme zukommenden Scharen von Symmetrieelementen entsteht daher eine außerordentliche Mannigfaltigkeit in der Art der zusammengehörigen, gleichwertigen Punktkomplexe. Im allgemeinsten Fall wird das Elementarparallelepiped eines bestimmten Raumsystemes Punktlagen gewisser Symmetriebedingungen und Zähligkeiten ohne Freiheitsgrad, Punktlagen mit einem Freiheitsgrad, mit zwei und mit drei Freiheitsgraden besitzen. Die Zahl der Verschiedenartigkeit dieser Punktlagen sowie deren Zähligkeit sind selbstverständlich unabhängig von der Wahl des Koordinatenanfangspunktes des Elementarparallelepipeds. Darüber haben wir bis jetzt noch nichts festgesetzt. So lange die Kanten des Elementarparallelepipeds den bewußten Richtungen im Raume parallel sind, gelten bei beliebiger Nullpunktslage alle bis jetzt erläuterten Beziehungen.

Sollen nun aber die einzelnen Raumsysteme beschrieben werden, die gegenseitigen Lagebeziehungen der Symmetrieelemente und Punktarten möglichst übersichtlich zutage treten, so müssen wir das Koordinatensystem genau festlegen. Wir wenden folgendes Prinzip an:

Der Nullpunkt des Elementarparallelepipeds, das heißt irgend einer seiner Eckpunkte (speziell der Eckpunkt links hinten unten), soll stets ein Punkt kleinster Zähligkeit sein. Gibt es Punkte ohne Freiheitsgrad, mit einem oder zwei Freiheitsgraden von gleicher kleinster Zähligkeit, so wird zum Koordinatenanfangspunkt eine Punktlage gewählt, der ein geringster Freiheitsgrad (wenn möglich gar kein Freiheitsgrad) zukommt. Sind mehrere ungleichwertige Punktlagen ohne Freiheitsgrad mit gleicher kleinster Zähligkeit vorhanden, so wählt

man zum Anfangspunkt diejenige, welche zu Vergleichszwecken mit anderen Raumsystemen am günstigsten gelegen ist. Kommen nur Punktlagen mit einem oder mit zwei Freiheitsgraden in Frage, so kann innerhalb der zukommenden Freiheit die Lage beliebig gewählt werden, sind aber noch Gleitspiegelebenen oder Schraubenachsen vorhanden, so wird man eine zu diesen möglichst einfache Lage vorziehen.

Eine derartige Wahl rechtfertigt sich aus mancherlei Gründen. Die am meisten ausgezeichneten Punktlagen erhalten einfachste Symbole, meistens gehen durch den Nullpunkt entsprechend der geringen Zähligkeit und relativ hohen Symmetriebedingung die wesentlichen Symmetrieelemente des Raumsystemes; auch für sie wird die Symbolisierung eine möglichst einfache. Aber auch die übrigen Symmetrieelemente werden sich dann, der zwischen ihnen vorhandenen Beziehungen wegen, in einfachen Teilabständen der zugehörigen primitiven Translationen befinden müssen. Nichtsdestoweniger ist die Wahl der Koordinatenanfangspunkte im gewissen Sinne eine willkürliche; nachdrücklichst sei empfohlen sich in Koordinatentransformationen, die Parallelverschiebungen entsprechen, zu üben. Nur dann lassen sich vorhandene Untergruppen leicht erkennen und die Vieldeutigkeiten eines gegebenen Gitterkomplexes gleichwertiger Punkte diskutieren.

Auf ein derartiges Elementarparallelepiped in elementarer Lage werden nun die mittels Kantentranslationen des Parallelepipeds nicht ineinander überführbaren Symmetrieelemente und ausgezeichneten Punktlagen bezogen. Die Symbolisierung geschieht nach den im ersten Kapitel erläuterten Grundsätzen. Einheitsmaßstäbe sind die Kanten a, b, c des Elementarparallelepipeds. Darauf bezogen erhalten Punkte Symbole: $[\![m, n, p]\!]$, Gerade: $[u\ v\ w]^{BC}$, Ebenen: $(h\ k\ l)_a$.

Der erste Index bezieht sich immer auf die a-Achse, der zweite auf die b-Achse, der dritte auf die c-Achse. Bei der Darstellung eines Komplexes zusammengehöriger Punkte kann sich eine Vertauschung der Indizes einstellen, so daß in den abgeleiteten Punkten m nicht mehr auf die a-Achse bezogen wird. $[\![n, m, p]\!]$ würde dann bedeuten, daß der abgeleitete Punkt gegenüber der a-Achse gleiche Koordinate hat, wie der Ausgangspunkt gegenüber der b-Achse. Selbstverständlich muß dann a = b sein. Sollen sich Zusatzglieder $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{s}$, $\frac{1}{t}$ der Reihe nach auf die a-, b-, c-Koordinatenwerte eines ganzen Punktkomplexes beziehen, so wird das in der Form $x + \frac{1}{p}$, $y + \frac{1}{s}$, $z + \frac{1}{t}$ geschrieben.

Die bei jedem einzelnen Raumsystem sich vorfindenden Angaben bestehen in einer ganzen Zahl von Überbestimmungen. Zur eindeutigen Charakterisierung würden nur wenige davon genügen. Die Darstellung soll aber in erster Linie ein schnell orientierendes Nachschlagewerk

sein, das möglichst allen Bedürfnissen angepaßt ist. Dann lassen sich keine der gegebenen Daten missen.

Die Raumsysteme sind nach Klassen und Abteilungen (Kristallsystemen) geordnet. Die Reihenfolge innerhalb der Klassen ist die von Schoenflies seiner Ableitung zugrunde gelegte, so daß die durch Indexziffern voneinander unterschiedenen Raumsysteme in normaler Weise aufeinander folgen. Das Auffinden eines bestimmten Raumsystemes wird dadurch erleichtert, ein Inhaltsverzeichnis am Schlusse des Bandes ist dem gleichen Zwecke dienlich. Zunächst werden die Untergruppen des Raumsystemes, die ja für sich selbst wieder Raumsystemen entsprechen, angegeben, und zwar im allgemeinen nur die Scharenuntergruppen der Symmetrieelemente (isomorphe Parallelscharen) und die zum gleichen Kristallsystem gehörigen Untergruppen. Als charakteristische Untergruppen werden solche bezeichnet, die das ganze Raumsystem abzuleiten gestatten. Sie sind in verschiedener Weise wählbar. Nach Wahl des Koordinatenanfangspunktes werden (siehe Seite 23) die je 12 Größen der voneinander unabhängigen Decktransformationsbedingungen angegeben. Die drei ersten Decktransformationsbedingungen beziehen sich auf die Translationsgruppe, sie geben über ein primitives Tripel, daher auch über die Art des Elementarparallelepipeds, Auskunft. Die übrigen bestimmen die Lage der Symmetrieelemente. Es werden immer nur die absolut notwendigen Decktransformationsbedingungen angegeben, aus denen sich die anderen ableiten lassen (siehe z. B. Seite 42). Diese charakterisierenden Decktransformationsbedingungen sind naturgemäß ebenfalls verschieden wählbar, das angewandte Prinzip gestattet möglichst weitgehende Vergleiche. Änderung der Koordinatenanfangspunkte hätte Änderung der Verschiebungsgrößen der Decktransformationsbedingungen zur Folge. Man übe sich derartige Verschiebungen zu interpretieren.

Durch die Angabe der Decktransformationsbedingungen ist bereits das ganze Raumsystem eindeutig bestimmt, keine zwei Raumsysteme besitzen lauter gleiche Bedingungen. Dennoch werden zur Erlangung eines raschen Überblickes die Lagen der einzelnen Symmetrieelemente nach den im I. Kapitel mitgeteilten Grundsätzen symbolisiert.

Besitzt ein Punkt die allgemeinen Koordinaten $[\![m, n, p]\!]$ (bezogen auf a, b, c als Einheitsmaßstäbe), so lassen sich die Koordinaten derjenigen Punkte angeben, in die $[\![m, n, p]\!]$ infolge der Deckoperationen übergeht und die nicht mittels einfacher oder zusammengesetzter Translationen von der Größe und Richtung der Kanten des Elementarparallelepipeds aus ihm ableitbar sind. Es ist das ein System gleichwertiger Punkte oder ein System zusammengehöriger Koordinatenwerte. Die Punktlagen von geringerer als maximalster Zähligkeit entsprechen dann bestimmten Koordinatenwerten, für die gewisse

zusammengehörige Punktsymbole übereins fallen. Aus der Art der zusammengehörigen Koordinatenwerte lassen sich daher auch algebraisch, mit analytisch geometrischer Deutung, die als Symmetrieelemente ausgezeichneten Punkte, Gerade und Ebenen bestimmen. Man möge sich auch darin üben, damit aus dem System gleichwertiger Punkte sofort die gegenseitige Lage der Symmetrieelemente erkenntlich wird. Bei der Angabe der zusammengehörigen Punkte finden sich oft negative Werte oder es treten durch Addition zusätzlicher Größen Zahlen auf, welche die Einheit übersteigen, man kann dann immer die Punkte auf das eine positive Elementarparallelepiped durch Addition beziehungsweise Subtraktion ganzer Zahlen rückbeziehen. Das System der zusammengehörigen Koordinatenwerte gestattet zu jedem Ausgangspunkt alle gleichwertigen Punkte des Elementarparallelepipeds rasch aufzufinden, es ist das wichtigste Hilfsmittel zur Konstruktion von bestimmten Gitterkomplexen. Ein Beispiel soll die Anwendungen erläutern.

In der von mir gewählten Darstellung lautet das System zusammengehöriger Koordinatenwerte für $\mathfrak{C}_{2v}^{6}$ folgendermaßen:

$$\left[\!\left[m,\ n,\ p\right]\!\right]\ \left[\!\left[m,\ n,\ p\right]\!\right]\ \left[\!\left[m+\frac{1}{2},\ n,\ p+\frac{1}{2}\right]\!\right]\ \left[\!\left[m+\frac{1}{2},\ n,\ p+\frac{1}{2}\right]\!\right].$$

Die beiden ersten Werte mit verschiedenen Zeichen der x- und y-Koordinaten entsprechen einer digonalen Drehungsachse in der Richtung der c-Achse. Man findet sofort für die Bedingung, daß 1. und 2. Wert übereins fallen:

$$m = -m;\ n = -n;\ p = p$$

Diese Bedingung ist erfüllt für alle Punkte $[\![0,\ 0,\ p]\!]$, somit ist [001] eine digonale Drehungsachse.

Sucht man, ob der 1. und 3. Wert zusammenfallen können, so erhält man die Bedingungen

$$m = -m + \frac{1}{2};\ n = n;\ p = p + \frac{1}{2}.$$

p kann nie gleich sein $p + \frac{1}{2}$, also gibt es keine Punkte dieser Art. Hingegen wird für alle Punkte, deren $m = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$, der dritte zugehöige Punkt sich vom ersten nur um $p' = p + \frac{1}{2}$ unterschieden. $(100)_{\frac{1}{4}}$ ist eine Gleitspiegelebene mit einer Gleitkomponente in der c-Richtung.

Der Ausgangspunkt besitze die Lage $\left[\!\left[\frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{8}\right]\!\right]$. Das System der gleichwertigen Punkte liefert für $\mathfrak{C}_{2v}^{6}$ folgende drei zugehörigen Werte: $\left[\!\left[\frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{8}\right]\!\right]\ \left[\!\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right]\!\right]\ \left[\!\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right]\!\right]$.

Auf das erste positive Elementarparallelepiped bezogen heißen sie: $[\![\begin{smallmatrix}3 & 1 & 1\\ 4' & 2' & 8\end{smallmatrix}]\!]$ $[\![\begin{smallmatrix}1 & 1 & 5\\ 4' & 2' & 8\end{smallmatrix}]\!]$ $[\![\begin{smallmatrix}3 & 1 & 5\\ \bar{4}' & 2' & 8\end{smallmatrix}]\!]$.

Weiterhin werden die Punktlagen mit Symmetriebedingungen, d. h. geringerer als der maximalen Zähligkeit, nach Freiheitsgraden geordnet, angeführt. Bei Punktlagen ohne Freiheitsgrad wird das System zusammengehöriger Punkte vollständig mitgeteilt. Bei relativ einfachen Lagen werden auch etwa die entstehenden Gitterkomplexe mit dem Eckpunktgitter des Elementarparallelepipeds verglichen. Durch besondere Namengebung hätte man diese Gitterkomplexe, ähnlich wie bei den Kristallindividuen die Flächenkomplexe, einzeln charakterisieren können. Es ist davon Abstand genommen worden. (Siehe aber die tabellarische Zusammenstellung für kubische Gitterkomplexe ohne Freiheitsgrad.)

Da wir, abgesehen etwa von der rhomboedrischen Abteilung, die Raumsysteme einer Klasse auf gleiche Elementarparallelepipede (hinsichtlich der Stellung der Kantenrichtungen zu Symmetrieelementen) beziehen, so unterscheiden sich die zusammengehörigen Systeme von Koordinatenwerten innerhalb einer Klasse nur durch sogenannte Zusatzgrößen, die Zusatztranslationen (Schraubungskomponenten, Gleitkomponenten, Verschiebungstranslationen) entsprechen, voneinander. Frei von derartigen Zusatzgrößen stellt ein System gleichwertiger Koordinaten gleichzeitig das System der gleichwertigen Flächenkomplexe dieser Klasse in der Kontinuumsauffassung dar. Die Koordinatenachsenrichtungen sind ja parallel den sogenannten kristallographischen Achsen der gewöhnlichen geometrischen Kristallographie.

Mit Hilfe dieser allgemeinen Klassenkoordinatenwerte können wir noch eine Übersichtstabelle der Kristallklassen konstruieren, die, besonders in Verbindung mit der stereographischen Projektion, die 32 Klassen ganz hübsch entwickeln läßt.

Es ist das Tabelle III auf Seite 143.

Singulär findet sich jedes Element in der triklin hemiedrischen Klasse vor, man kann auch sagen, irgend eine Richtung sei monogonale Drehungsachse. Fügt man zu jedem Wert [[m n p]] einen Wert [[m n p]] (entsprechend einer digonalen Achse in Richtung von Y), so entsteht die monoklin hemimorphe Klasse. Werden die „monogonalen Drehungen“ digonale Drehspiegelachsen, das heißt tritt ein Symmetriezentrum auf, so entsteht die triklin holoedrische Klasse. Zu jedem Wert [[m n p]] gehört dann ein Wert [[$\bar{\text{m}}$ $\bar{\text{n}}$ $\bar{\text{p}}$]]. Beide Fälle zugleich anwesend, erzeugen die monoklin holoedrische Klasse. Gehört anderseits zu dem Wert [[m n p]] ein Wert [[m n $\bar{\text{p}}$]] (horizontale Symmetrieebene), so stellt sich die monoklin hemiedrische Klasse ein. Das gleiche Resultat ergibt sich,

wenn zu [[m n p]] allein noch [[m̄ n p]] gehört, nur ist jetzt gemäß der Aufstellung (100) Symmetrieebene.

Kommt dazu noch die Vertauschung [[m n p]] → [[m̄ n p]] und [[m n p]] → [[m n p̄]], so ist das System der Koordinatenwerte oder Flächenwerte (hkl) für die rhombisch hemimorphe Klasse charakteristisch, allerdings mit einer nicht üblichen Wahl der Achsenrichtung. Indem man die gleichen Erweiterungen der Koordinatensysteme vornimmt, wenn die z-Richtung schon zum voraus eine mehrzählige Symmetrieachse ist, erhält man systematisch die übrigen Kristallklassen. Einige monokline und rhombische werden so (in lediglich verschiedener Stellung) zweimal abgeleitet, für einige kubische sind infolge der Achsenvertauschbarkeit einzelne Stufen nicht unterscheidbar. Wo die z-Achse tetragonal oder hexagonal ist, fallen die Zusatzhemiedrie und -Holoedrie II. Art (Drehspiegelung) weg, da Acht- und Zwölfzähligkeit der Achsen nicht statthaft ist. Diese Ableitung in sieben Stufen ist ähnlich der von Tschermak vorgeschlagenen, doch sind die Drehspiegeloperationen als Zusatzsymmetrien zu jenen Klassen aufgefaßt, die Drehungsachsen gleicher Zähligkeit ($\frac{1}{2}$ der Drehspiegelachsenzähligkeit) besitzen. Erwähnung wurde dieser Darstellung hier getan, weil sie zugleich ein Bild von den Systemen gleichwertiger Punkte der einzelnen Raumgruppen, frei von Zusatzgrößen, vermittelt.

Eine graphische Darstellung der Symmetrieverhältnisse ist für ungefähr 100 Raumsysteme durchgeführt worden. Die vollständige Darstellung aller 230 Systeme hätte zuviel Platz beansprucht. Da aber gerade beim Unterricht auf die zeichnerische Veranschaulichung nicht verzichtet werden kann, schien es mir wünschenswert, ein als außerordentlich praktisch erwiesenes Darstellungsprinzip an Beispielen soweit zu erläutern, daß es mit Leichtigkeit auf irgend einen speziellen Fall angewandt werden kann. Gleichzeitig geben die einzelnen Figuren dem Leser eine Kontrolle, ob die zunächst vielleicht etwas fremdartig anmutenden Symbole richtig verstanden werden.

Die Darstellungen sind meistens Projektionen eines Elementarparallelepipeds auf eine Ebene, vorzugsweise die $(001)_0$-Ebene. (Monoklin eine (010)-Ebene.) Die Durchstoßpunkte von senkrecht auf der Projektionsebene liegenden Achsen sind durch die auf Seite 27 ff. und in den Figuren 6—9 erläuterten Symbole gekennzeichnet. Die Schnittlinien der auf der Projektionsebene senkrecht stehenden Symmetrieebenen sind durchwegs Bandlinien. Einfach nicht durchbrochene Bänder stellen Spiegelebenen, durchbrochene Bänder Gleitspiegelebenen dar. In der Projektionsebene liegende Achsen sind Gerade, ausgezogen markieren sie Drehungsachsen, gestrichelt Schraubenachsen. Gehen sie der Projektionsebene parallel, befinden sie sich aber teils in einer gewissen Höhe

III. Haupttabelle. Tabelle der zusammengehörigen Koordinatenwerte, frei von Zusatzgrößen, in den einzelnen Raumsystemklassen. Zugleich zur mechanischen Ableitung der 32 Klassen verwendbar.

	0	I	II	III	IV	V	VI
	Tetartoedrie	Enantiomorphie. Zu jedem Wert $[\![x\ y\ z]\!]$ ein Wert $[\![\bar{x}\ y\ \bar{z}]\!]$	Zusatzhemiedrie 2. Art. Die n-zählige Drehungsachse ist 2n-zählige Drehspiegelachse. Die neuen 2 n-Werte mit $[\![x_1\ y_1\ z]\!]$ statt $[\![x_1\ y_1\ z]\!]$	Zusatzholoedrie 2. Art. Gleichzeitige Kombination von I u. II	Paramorphie. Zu jedem Wert der Tetartoedrie $[\![x\ y\ z]\!]$ ein Wert $[\![x\ y\ \bar{z}]\!]$	Hemimorphie. Zu jedem Wert der Tetartoedrie $[\![x\ y\ z]\!]$ ein Wert $[\![\bar{x}\ y\ z]\!]$	Holoedrie. Gleichzeitige Kombination von I mit IV oder I mit V
z-Achse = monogonale Drehungsachse. $[\![m\ n\ p]\!]$	$\mathfrak{C}_1$		$\mathfrak{C}_i$		$\mathfrak{C}_s$		
z-Achse = digonale Drehungsachse. $[\![m\ n\ p]\!]$ $[\![\bar{m}\ \bar{n}\ p]\!]$	$\mathfrak{C}_2$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{S}_4$	$\mathfrak{B}_d$	$\mathfrak{C}_{2h}$	$\mathfrak{C}_{2v}$	$\mathfrak{B}_h$
x-y-z-Achsen = drei digonale gleichwertige Drehungsachsen. $[\![m\ n\ p]\!]$ $[\![m\ \bar{n}\ \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}\ n\ \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}\ \bar{n}\ p]\!]$ $[\![p\ m\ n]\!]$ $[\![\bar{p}\ m\ \bar{n}]\!]$ $[\![\bar{p}\ \bar{m}\ n]\!]$ $[\![p\ \bar{m}\ \bar{n}]\!]$ $[\![n\ p\ m]\!]$ $[\![\bar{n}\ \bar{p}\ m]\!]$ $[\![n\ \bar{p}\ \bar{m}]\!]$ $[\![\bar{n}\ p\ \bar{m}]\!]$	$\mathfrak{T}$		$\mathfrak{T}_d$		$\mathfrak{T}_h$		
z-Achse = trigonale Drehungsachse. $[\![m\ n\ p]\!]$ $[\![m_1\ n_1\ p]\!]$ $[\![m_2\ n_2\ p]\!]$	$\mathfrak{C}_3$	$\mathfrak{D}_3$	$\mathfrak{C}_{3i}$	$\mathfrak{D}_{3d}$	$\mathfrak{C}_{3h}$	$\mathfrak{C}_{3v}$	$\mathfrak{D}_{3h}$
z-Achse = tetragonale Drehungsachse. $[\![m\ n\ p]\!]$ $[\![n\ \bar{m}\ p]\!]$ $[\![\bar{m}\ \bar{n}\ p]\!]$ $[\![\bar{n}\ m\ p]\!]$	$\mathfrak{C}_4$	$\mathfrak{D}_4$			$\mathfrak{C}_{4h}$	$\mathfrak{C}_{4v}$	$\mathfrak{D}_{4h}$
x-y-z-Achse = drei tetragonale gleichwertige Drehungsachsen. $[\![m\ n\ p]\!]$ $[\![n\ \bar{m}\ p]\!]$ $[\![\bar{m}\ \bar{n}\ p]\!]$ $[\![\bar{n}\ m\ p]\!]$ $[\![m\ n\ \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}\ m\ \bar{p}]\!]$ $[\![m\ \bar{n}\ \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}\ \bar{m}\ \bar{p}]\!]$ $[\![p\ m\ n]\!]$ $[\![p\ \bar{n}\ m]\!]$ $[\![p\ \bar{m}\ \bar{n}]\!]$ $[\![p\ n\ \bar{m}]\!]$ $[\![\bar{p}\ m\ n]\!]$ $[\![\bar{p}\ \bar{n}\ m]\!]$ $[\![\bar{p}\ \bar{m}\ \bar{n}]\!]$ $[\![\bar{p}\ n\ m]\!]$ $[\![n\ p\ m]\!]$ $[\![\bar{n}\ p\ \bar{m}]\!]$ $[\![n\ \bar{p}\ \bar{m}]\!]$ $[\![\bar{n}\ \bar{p}\ m]\!]$ $[\![m\ p\ n]\!]$ $[\![\bar{m}\ p\ \bar{n}]\!]$ $[\![m\ \bar{p}\ \bar{n}]\!]$ $[\![\bar{m}\ \bar{p}\ n]\!]$	$\mathfrak{D}$				$\mathfrak{D}_h$		
z-Achse = hexagonale Drehungsachse. $[\![m\ n\ p]\!]$ $[\![m_2\ \bar{n}_2\ p]\!]$ $[\![m_1\ n_1\ p]\!]$ $[\![m\ \bar{n}\ p]\!]$ $[\![m_2\ n_2\ p]\!]$ $[\![m_1\ n_1\ p]\!]$	$\mathfrak{C}_6$	$\mathfrak{D}_6$			$\mathfrak{C}_{6h}$	$\mathfrak{C}_{6v}$	$\mathfrak{D}_{6h}$

darüber oder darunter, so bilden verschiedene Stärken oder Doppellinien neben einfachen Linien das Unterscheidungsmittel.

Es genügt, die in der unteren Hälfte des Elementarparallelepipeds vorkommenden Achsen zu projizieren, da nach $\frac{1}{2}\tau_z$ stets wieder eine gleichartige Achse sich einstellen muß. Ist die Projektionsebene Symmetrieebene, so umfaßt ein großer Kreis die ganze Figur. Ausgezogen bedeutet er eine Spiegelebene, gestrichelt eine Gleitspiegelebene. Gehen Symmetrieebenen in $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{6}\tau_z$ über oder unter der Projektionsebene dieser parallel, so werden Doppelkreise gezogen. In der Projektionsebene liegende Symmetriezentren sind durch kleine ausgefüllte Kreischen markiert. Unausgefüllte kleine Doppelkreise bedeuten Symmetriezentren in $\frac{\tau_z}{4}$ über beziehungsweise unter der Projektionsebene.

In wenigen Fällen wurde einer perspektivischen Darstellung der Vorzug gegeben. Sie empfiehlt sich besonders bei komplizierteren Achsenraumsystemen. Ersetzen kann man sie durch Betrachtung mehrerer paralleler Achsenebenen und der Teilsymmetrieelemente auf ihnen. Auch dieser Weg wurde ausnahmsweise beschritten.

2. Spezielle Darstellung

Trikline Abteilung

Kein Translationstripel ist rein strukturell vor einem anderen ausgezeichnet. α, β, γ können beliebige Werte besitzen. a, b, c sind ungleichwertig.

Triklin hemiedrische Klasse (Pediale Klasse)

Symmetrie: J = Identität. Raumgruppe $\mathfrak{C}_1$. Koordinatenanfangspunkt beliebig. Koordinatenachsen irgend ein primitives Tripel a, b, c mit den Koordinatenachsenwinkeln α, β, γ. Einheitsmaßstäbe a, b, c.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.) a, 0, 0; 1, $\cos\gamma$, $\cos\beta$; $\cos\gamma$, 1, $\cos\alpha$; $\cos\beta$, $\cos\alpha$, 1.
II.) 0, b, 0; 1, $\cos\gamma$, $\cos\beta$; $\cos\gamma$, 1, $\cos\alpha$; $\cos\beta$, $\cos\alpha$, 1.
III.) 0, 0, c; 1, $\cos\gamma$, $\cos\beta$; $\cos\gamma$, 1, $\cos\alpha$; $\cos\beta$, $\cos\alpha$, 1.

Alle Punktlagen asymmetrisch. Zähligkeit = 1. Freiheitsgrad = 3. Koordinatenwerte [[m, n, p]]. Jeder Punkt für sich.

Manchmal mag es, zum Vergleich mit Strukturen höherer Symmetrie, zweckmäßig sein als kristallographisches Elementarparallelepiped ein doppelt- oder vierfachprimitives zu wählen, beispielweise mit einseitiger

Flächenzentrierung, Innenzentrierung oder vollständiger Flächenzentrierung. Es handelt sich hierbei nur um eine physikalisch und kristallsymmetrisch bedeutungslose, neue, nicht mehr primitive Raumaufteilung. Bezeichnet man die Perioden in Richtung der neuen Koordinatenachsen mit a, b, c, so ändern sich natürlich die Symbolisierung des zugehörigen primitiven Tripels und die Zähligkeit einer Punktlage hinsichtlich des neuen Parallelelepipeds. Beispielsweise würde bei Einführung eines Parallelepipeds mit zentrierter Grundfläche die Zähligkeit jeder Punktlage = 2, mit den Koordinatenwerten $[\![m, n, p]\!]$ und $[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$. Das primitive Tripel könnte in der Form $\frac{a}{b}+\frac{b}{2}$, $\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$, c geschrieben werden.

Jede Gerade besitzt den Charakter eines polaren Vektors. Jede Gerade und jede Ebene treten nur als Identitätsschar auf.

Triklin holoedrische Klasse (Pinakoidale Klasse)

Symmetrie = Z = Symmetriezentrum.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_i$

(Enthält als Untergruppe $\mathfrak{C}_1$.)

Koordinatenanfangspunkt in einem Symmetriezentrum. Koordinatenachsen irgend ein primitives Tripel a, b, c mit den Koordinatenachsenwinkeln α, β, γ.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.) a, 0, 0; 1, $\cos\gamma$, $\cos\beta$; $\cos\gamma$, 1, $\cos\alpha$; $\cos\beta$, $\cos\alpha$, 1.

II.) 0, b, 0; 1, $\cos\gamma$, $\cos\beta$; $\cos\gamma$, 1, $\cos\alpha$; $\cos\beta$, $\cos\alpha$, 1.

III.) 0, 0, c; 1, $\cos\gamma$, $\cos\beta$; $\cos\gamma$, 1, $\cos\alpha$; $\cos\beta$, $\cos\alpha$, 1.

IV.) 0, 0, 0; 1, $\cos\gamma$, $\overline{\cos\beta}$; $\cos\gamma$, 1, $\cos\alpha$; $\cos\beta$, $\cos\alpha$, 1.

Primitives Tripel a, b, c: α, β, γ. (a, b, c = Einheitsmaßstäbe.)

Symmetriezentren:

$[\![0\,0\,0]\!]$; $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$; $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$; $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$; $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$; $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$; $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$; $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad: Jedes der oben hingeschriebenen Symmetriezentren. Achterlei Punkte. Jede derartige Lage besitzt die Zähligkeit = 1.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden zweizählig. Die Koordinatenwerte $[\![m\,n\,p]\!]$ und $[\![\overline{m}\,\overline{n}\,\overline{p}]\!]$ sind zusammengehörig.

Alle Geraden und Ebenen treten nur als Parallelscharen auf. Geht beispielsweise eine Gerade nicht durch irgend ein Symmetriezentrum, so tritt sie lediglich als aus zwei Identitätsscharen zusammengesetzte Parallelschar auf. Irgend eine durch ein Symmetriezentrum gehende Gerade kann physikalisch das Verhalten eines axialen Vektors oder polaren Tensors darstellen.

Auch hier kann es, im Vergleich mit Strukturen höherer Symmetrie, zweckmäßig werden als kristallographisches Elementarparallelepiped ein doppelt- oder vierfachprimitives zu wählen.

Monokline Abteilung

Es gibt immer drei Translationen a, b, c von verschiedener Länge, die der Bedingung genügen a und c senkrecht auf b. ($\alpha = \gamma = 90^0$). Sie bestimmen ein Parallelepiped, das entweder primitiv oder doppeltprimitiv ist. Es ist unser Elementarparallelepiped. a, b, c sind die Einheitsmaßstäbe. Die Aufstellung erfolgt so, daß $\measuredangle \beta > 90^0$ ist.

$\mathfrak{C}_s$. Monoklin-hemiedrische Klasse (Domatische Klasse)

Es ist die einer Symmetrieebene isomorphe Parallelschar verallgemeinerter Symmetrieebenen vorhanden.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_s^1$

(Enthält als Untergruppe $\mathfrak{C}_1$.) Alle Symmetrieebenen sind Spiegelebenen. Der Koordinatenanfangspunkt hat beliebige Lage auf einer Symmetrieebene. b-Koordinatenachse = kürzeste Periode in Richtung senkrecht zur Symmetrieebenenschar. a und c = beliebiges primitives in der Symmetrieebene liegendes Paar, das mit b ein primitives Tripel bildet. α und $\gamma = 90^0$. $\beta > 90^0$. Einheitsmaßstäbe a, b, c.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.) a, 0, 0; 1, 0, $\cos\beta$; 0, 1, 0; $\cos\beta$, 0, 1.
II.) 0, b, 0; 1, 0, $\cos\beta$; 0, 1, 0; $\cos\beta$, 0, 1.
III.) 0, c, 0; 1, 0, $\cos\beta$; 0, 1, 0; $\cos\beta$, 0, 1.
IV.) 0, 0, 0; 1, 0, $\cos\beta$; 0, 1, 0; $\cos\beta$, 0, 1.

Spiegelebenen: $(010)_0$. $(010)_{\frac{1}{2}}$. (Siehe Fig. 68.)

Keine Punkte ohne Freiheitsgrad oder mit bloß einem Freiheitsgrad sind vorhanden. Punktlagen auf den Spiegelebenen = $[\![m, 0, p]\!]$ oder $[\![m, \frac{1}{2}, p]\!]$ besitzen bei der Zähligkeit 1 zwei Freiheitsgrade. Ihnen muß die monoklin hemiedrische Symmetrie = 1 SE zukommen.

Alle übrigen Punkte sind von allgemeinster Lage (drei Freiheitsgrade) und brauchen keinerlei Symmetriebedingungen zu genügen.

Zugehörige Koordinatenwerte: $[\![m\ n\ p]\!]$ $[\![m\ \bar{n}\ p]\!]$.

Jede in einer Spiegelebene liegende Gerade ist von einzigartiger Richtung, also vom Charakter eines polaren Vektors. Im übrigen gehört zur Schar der Geraden $[u\ v\ w]^{BC}$ die Schar $[u\ \bar{v}\ w]^{\bar{B}C}$, zur Ebenenschar $(h\ k\ l)_N$ die Schar $(h\ \bar{k}\ l)_N$.

Da die Richtungen von a und c an sich beliebig sind, kann es aus kristallographischen Gründen auch hier zweckmäßig sein, zur Seitenfläche (010) des Parallelepipeds ein doppeltprimitives Parallelogramm

zu wählen (zentriertes 010). Die Änderungen hinsichtlich der Beziehungsweise des primitiven Tripels, der Zähligkeiten und zusammengehörigen Koordinatenwerte sind leicht anzubringen.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_s^2$

(Enthält als Untergruppe $\mathfrak{C}_1$.) Alle Symmetrieebenen sind Gleitspiegelebenen ein-und-derselben Operation. (Siehe Fig. 69.)

Der Koordinatenanfangspunkt hat beliebige Lage auf einer Gleitspiegelebene. Die b-Koordinatenachse ist die kürzeste Periode in Richtung senkrecht zur Gleitspiegelebenenschar, die c-Koordinatenachse die kürzeste Periode in der Gleitrichtung (doppelte Größe der Gleitkomponente). a, ebenfalls in der Gleitspiegelebene liegend, ergänzt b und c zu einem primitiven Tripel. α und $\gamma = 90^0$. $\beta > 90^0$. Einheitsmaßstäbe a, b, c.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.) a, 0, 0; 1, 0, $\cos\beta$; 0, 1, 0; $\cos\beta$, 0, 1.

II.) 0, b, 0; 1, 0, $\cos\beta$; 0, 1, 0; $\cos\beta$, 0, 1.

III.) 0, 0, c; 1, 0, $\cos\beta$; 0, 1, 0; $\cos\beta$, 0, 1.

IV.) $0, 0, \frac{c}{2}$; 1, 0, $\cos\beta$; 0, $\bar{1}$, 0; $\cos\beta$, 0, 1.

Einzige Symmetrieelemente sind die Gleitspiegelebenen: $(010)_0$; $(010)_{\frac{1}{2}}$.

Alle Punktlagen sind ohne Symmetriebedingungen zweizählig.

Zusammengehörige Koordinatenwerte: $[\![m, n, p]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p + \frac{1}{2}]\!]$.

Zu $[\![0\,0\,0]\!]$ gehört beispielsweise $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$. Alle Punktlagen auf den Gleitspiegelebenen bilden Gitter der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Kanten [001]. In den Gleitspiegelebenen liegende Gerade bilden eine einzige (polar vektorielle) Parallelschar von zwei Identitätsscharen. Im übrigen gehört zur Schar der Geraden $[u\,v\,w]^{B\,C}$ die Schar $[u\,\bar{v}\,w]^{\bar{B},\,C+\frac{1}{2}}$, zur Ebenenschar $(h\,k\,l)_N$ die Schar $(h\,\bar{k}\,l)_{N+\frac{1}{2}}$.

Bemerkung hinsichtlich Seitenflächenzentrierung wie bei $\mathfrak{C}_s^1$.

Die Wahl der Gleitrichtung zur c-Achse ist eine willkürliche.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_s^3$

(Enthält als Untergruppe $\mathfrak{C}_1$.) Es wechseln Spiegelebenen mit Gleitspiegelebenen ab. Der Koordinatenanfangspunkt kann beliebige Lage auf einer Spiegelebene haben.

Die b-Koordinatenachse ist kürzeste Periode in Richtung senkrecht zu den Symmetrieebenen. c- und a-Achse bilden ein primitives Periodenpaar auf der Spiegelebene; man kann es so wählen, daß die c-Achse oder die a-Achse oder die Diagonale des Parallelogrammes zwischen a und c die Richtung der Gleitkomponente der Gleitspiegelebenen haben. Die Translationen a, b, c bilden selbst kein primitives Tripel: sie

bestimmen ein doppeltprimitives Parallelepiped, das im einen Falle zentrierte Flächen (1$\bar{0}$0), im zweiten Falle zentrierte Basisflächen (001), im dritten Falle Innenzentrierung besitzen würde. Wegen der Unbestimmtheit des Winkels β sind kristallsymmetrisch die drei Fälle sich gleichberechtigt und strukturell ident. Wir legen unseren Betrachtungen den zweiten Fall (Basiszentrierung) zugrunde. Dann ist ein primitives Tripel gegeben durch: $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$; $\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$, c. α und γ sind wieder 90°. Einheitsmaßstäbe a, b, c.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0$; 1, 0, cos β; 0, 1, 0; cos β, 0, 1.

II.) $\frac{a}{2}, \frac{\bar{b}}{2}, 0$; 1, 0, cos β; 0, 1, 0; cos β, 0, 1.

III.) 0 0 c; 1, 0, cos β; 0, 1, 0; cos β, 0, 1.

IV.) 0 0 0; 1, 0, cos β; 0, $\bar{1}$, 0; cos β, 0, 1.

Spiegelebenen: $(010)_0$ und $(010)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen (mit Gleitkomp. $\frac{a}{2}$) $(010)_{\frac{1}{4}}$ und $(010)_{\frac{3}{4}}$.
(Siehe Fig. 70.)

Die Punktlagen auf den Spiegelebenen sind für das in Betracht gezogene Elementarparallelepiped zweizählig. Zu [[000]] gehört in paralleler Stellung beispielsweise [[$\frac{1}{2}\frac{1}{2}$0]]. Symmetrie dieser Punktlagen = 1 SE. Alle Punktlagen auf den Spiegelebenen, nämlich [[m, o, p]] oder [[m, $\frac{1}{2}$, p]], bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Basisflächen.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden vierzählig und frei von Symmetriebedingungen. Punkte [[m, $\frac{1}{4}$, p]] bezw. [[m, $\frac{3}{4}$, p]] auf den Gleitspiegelebenen bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Basisflächen und zentrierten Grundkanten.

Zusammengehörige Koordinatenwerte: [[m, n, p]], [[m + $\frac{1}{2}$, n + $\frac{1}{2}$, p]], [[m, $\bar{n}$, p]], [[m + $\frac{1}{2}$, $\bar{n}$ + $\frac{1}{2}$, p]]. Die Geraden $[u\,o\,w]^{BC}$ mit B = 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{4}$ sind von einzigartiger Richtung, die übrigen besitzen gleichwertige Scharen einer zweiten hinsichtlich $(0\,1\,0)_0$ symmetrischen Richtung.

Wählt man zu etwaigen kristallographischen Vergleichszwecken das Parallelogramm a c doppeltprimitiv (Zentrierung der Flächen $(010)_0$), so wird das Elementarparallelepiped vierfachprimitiv. Es ist dann allseitig flächenzentriert. Die Punktlagen von der Symmetrie 1 SE sind in Hinsicht darauf vierzählig, die übrigen Punktlagen werden achtzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_s^4$

(Enthält als Untergruppe $\mathfrak{C}_1$.) Alle Symmetrieebenen sind Gleitspiegelebenen, und zwar treten Gleitspiegelebenen von zweierlei Art auf. Wahl der Koordinatenachsen analog wie in der Gruppe $\mathfrak{C}_s^3$.

b = kürzeste Periode senkrecht zu den Gleitspiegelebenen. Zur speziellen Betrachtung legen wir die c-Achse in eine Gleitrichtung. Die zweite Gleitrichtung läßt sich dann durch $\left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2}\right)$ darstellen. Der

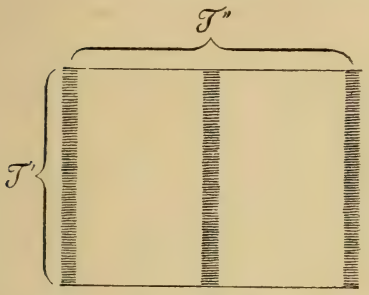


Fig. 68. $\mathfrak{C}_s^1$ Spuren der Spiegelebenen auf $(001)_0$.

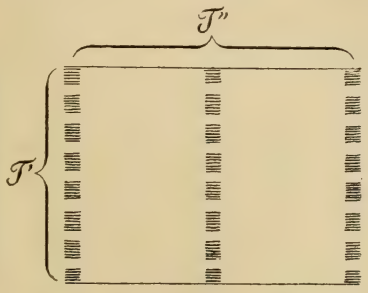


Fig. 69. $\mathfrak{C}_s^2$ Spuren der Gleitspiegelebenen auf $(001)_0$.

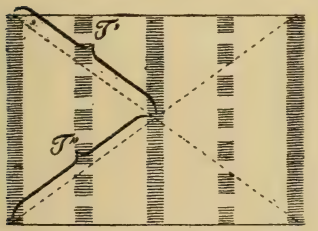


Fig. 70. $\mathfrak{C}_s^3$ Spuren der Spiegelebenen und Gleitspiegelebenen auf $(001)_0$.

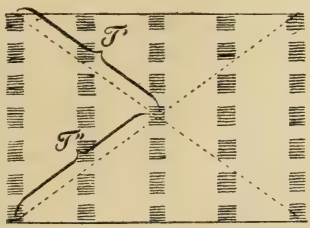


Fig. 71. $\mathfrak{C}_s^4$ Spuren der Gleitspiegelebenen auf $(001)_0$.

Anfangspunkt liege in einer Gleitspiegelebene mit der Gleitkomponente $\frac{c}{2}$. Das Elementarparallelepiped ist basiszentriert. Ein primitives Translationentripel ist somit von der Form $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$; $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$; c.

α und γ wieder = 90°. Einheitsmaßstäbe a, b, c.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}$, 0; 1, 0, $\cos\beta$; 0, 1, 0; $\cos\beta$, 0, 1.

II.) $\frac{a}{2}, \overline{\frac{b}{2}}$, 0; 1, 0, $\cos\beta$; 0, 1, 0; $\cos\beta$, 0, 1.

III.) $0, 0, c;\ 1, 0, \cos\beta;\ 0, 1, 0;\ \cos\beta, 0, 1.$

IV.) $0, 0, \frac{c}{2};\ 1, 0, \cos\beta;\ 0, 1, 0;\ \cos\beta, 0, 1.$

Einzige Symmetrieelemente sind Gleitspiegelebenen und zwar

$(010)_0$ und $(010)_{\frac{1}{2}}$ mit der Gleitkomponente $\frac{c}{2}$;

$(010)_{\frac{1}{4}}$ und $(010)_{\frac{3}{4}}$ mit der Gleitkomponente $\frac{a}{2}+\frac{c}{2}$.

Alle Punktlagen (ohne Symmetriebedingungen) sind infolge der Zusammengehörigkeit der Koordinatenwerte $[\![m, n, p]\!]$, $[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$, $[\![m, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$, $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ vierzählig und besitzen drei Freiheitsgrade. Die Punkte $[\![m, 0, p]\!]$ bezw. $[\![m, \frac{1}{2}, p]\!]$ bilden Gitter der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Basisflächen, Innenzentrierung und zentrierten Kanten [001]. Die Punkte $[\![m, \frac{1}{4}, p]\!]$ bezw. $[\![m, \frac{3}{4}, p]\!]$ bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit allseitig zentrierten Flächen. (Siehe Fig. 71.)

Im übrigen gelten hinsichtlich besonderer Wahl der Koordinatenachsen analoge Bemerkungen wie in $\mathfrak{C}_s^3$.

$\mathfrak{C}_2$. Monoklin hemimorphe Klasse (Sphenoidische Klasse)

Die einer digonalen Achse isomorphe Parallelschar digonaler Achsen ist vorhanden.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_2^1$

(Enthält als Untergruppe $\mathfrak{C}_1$.) Alle digonalen Achsen sind Drehungsachsen. Der Koordinatenanfangspunkt hat beliebige Lage auf einer digonalen Drehungsachse. Die b-Koordinatenachse ist der Länge nach die kürzeste Periode in Richtung der digonalen Achse. a und c bilden ein beliebiges primitives Paar auf der Normalebene zur Achsenrichtung. α und $\gamma = 90^0$; $\beta > 90^0$. Primitives Tripel und Einheitsmaßstäbe = a, b, c.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.) $a, 0, 0;\ 1, 0, \cos\beta;\ 0, 1, 0;\ \cos\beta, 0, 1.$

II.) $0, b, 0;\ 1, 0, \cos\beta;\ 0, 1, 0;\ \cos\beta, 0, 1.$

III.) $0, 0, c;\ 1, 0, \cos\beta;\ 0, 1, 0;\ \cos\beta, 0, 1.$

IV.) $0, 0, 0;\ \bar{1}, 0, \overline{\cos}\beta;\ 0, 1, 0;\ \overline{\cos}\beta, 0, \bar{1}.$

Digonale Drehungsachsen: ${}^{00}[010]$ | ${}^{0\frac{1}{2}}[010]$

${}^{\frac{1}{2}0}[010]$ | ${}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[010]$.

(Siehe Fig. 72.)

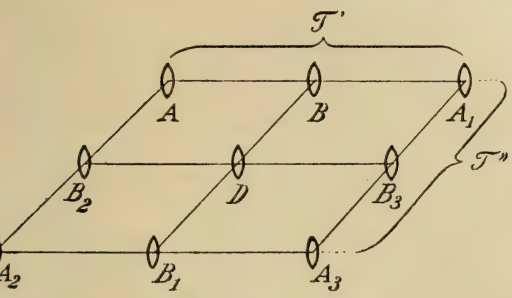
Punktlagen auf irgend einer der vier digonalen Drehungsachsen sind einzählig und von einem Freiheitsgrad. Sie müssen die Minimalsymmetrie $1\,\widehat{()}^{\downarrow}$ besitzen. (Symmetrie C_2.) Alle übrigen Punktlagen sind

gemäß der einander zugehörigen Koordinatenwerte $[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}, n, \bar{p}]\!]$ zweizählig und besitzen keinerlei Symmetriebedingung. (3 Freiheitsgrade).

Alle Punkte $[\![0, n, 0]\!]$ oder $[\![0, n, \frac{1}{2}]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}, n, 0]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}, n, \frac{1}{2}]\!]$ bilden einfache Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds.

Die [010] parallelen Geraden sind von einzigartiger Richtung und von polar vektoriellem Charakter.

Hinsichtlich der Koordinatenwahl a, c gelten für spezielle Vergleichszwecke ähnliche Überlegungen wie in der Raumgruppe $\mathfrak{C}_s^1$.



ig. 72. $\mathfrak{C}_2^1$ Achsendurchstoßpunkte auf $(010)_0$ (Drehungsachsen).

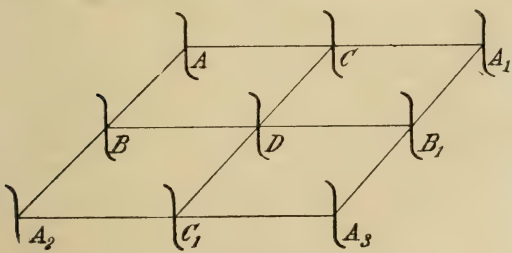


Fig. 73. $\mathfrak{C}_2^2$ Achsendurchstoßpunkte auf $(010)_0$ (Schraubenachsen).

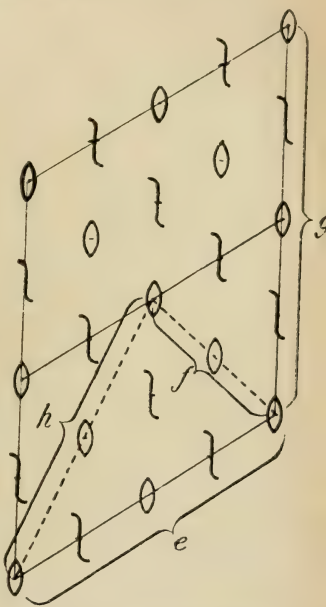


Fig. 74. $\mathfrak{C}_2^3$ Achsendurchstoßpunkte auf $(010)_0$ (Drehungs- und Schraubenachsen).

Raumgruppe $\mathfrak{C}_2^2$

(Enthält als Untergruppe $\mathfrak{C}_1$.) Alle digonalen Achsen sind Schraubenachsen. Der Koordinatenanfangspunkt hat beliebige Lage auf einer digonalen Schraubenachse. b = Identitätsabstand (Periode) auf dieser Schraubenachse, d. h. das Doppelte der Länge der Schraubungskomponente. a und c sind ein beliebiges Paar primitiver Translationen auf einer zur Achsenrichtung normalen Ebene. α und $\gamma = 90°$; $\beta > 90°$. Primitives Tripel a, b, c; zugleich Einheitsmaßstäbe.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.) a, 0, 0; 1, 0, $\cos\beta$; 0, 1, 0; $\cos\beta$, 0, 1.
II.) 0, b, 0; 1, 0, $\cos\beta$; 0, 1, 0; $\cos\beta$, 0, 1.
III.) 0, 0, c; 1, 0, $\cos\beta$; 0, 1, 0; $\cos\beta$, 0, 1.
IV.) 0, $\frac{b}{2}$, 0; $\bar{1}$, 0, $\overline{\cos\beta}$; 0, 1, 0; $\overline{\cos\beta}$, 0, $\bar{1}$.

Die einzigen Symmetrieelemente sind die digonalen Schraubenachsen $^{00}[010]$ $^{0\,\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{1}{2}\,0}[010]$ | $^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}[010]$. (Siehe Fig. 73.)

Alle Punktlagen sind ohne Symmetriebedingungen mit der Zusammengehörigkeit $[\![m, n, p]\!]$, $[\![\bar{m}, n + \frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ zweizählig. Diejenigen auf den Schraubenachsen wie $[\![0, n, 0]\!]$ oder $[\![0, n, \frac{1}{2}]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}, n, 0]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}, n, \frac{1}{2}]\!]$ bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Kanten [010]. Zu $[\![000]\!]$ gehört beispielsweise $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ in um 180° gedrehter Stellung. Die [010] parallelen Geraden sind von einzigartiger Richtung und von polar vektoriellem Verhalten.

Das Parallelogramm ac kann auch hier etwa zu Vergleichszwecken doppeltprimitiv gewählt werden.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_2^3$

(Enthält als Untergruppe $\mathfrak{C}_1$.) Digonale Drehungsachsen und Schraubenachsen. Der Koordinatenanfangspunkt hat beliebige Lage auf einer digonalen Drehungsachse. b ist in Länge und Richtung kürzeste Periode auf einer digonalen Drehungsachse, somit auch das Doppelte des Schraubungskomponentenbetrages einer Schraubenachse. c und a sind ein primitives Translationen-(Perioden-)paar auf einer zu den Achsen senkrechten Ebene. Das Bild der Durchstoßpunkte der zweizähligen Achsen auf einer Ebene senkrecht zur Achsenrichtung liegt in Fig. 74 vor. Folgende einfachsten Zuordnungen von a und c (abgesehen von der Raumorientierung bezw. der Bedingung $\beta > 90°$) lassen sich erkennen.

I. a und c = e und f. Das Elementarparallelepiped besitzt dann zentrierte Basisflächen.
II. a und c = f und h. Das Elementarparallelepiped ist innenzentriert.
III. a und c = e und g. Das Elementarparallelepiped besitzt allseitige Flächenzentrierung.

In den Fällen I und II ist das Elementarparallelepiped doppeltprimitiv, im Falle III vierfachprimitiv. Unseren Betrachtungen ist der Fall I zugrunde gelegt. Ein primitives Tripel ist dann gegeben durch $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$, $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$, c. α und $\gamma = 90°$. Die Einheitsmaßstäbe = a, b, c. $\beta > 90°$.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0;\ 1, 0, \cos\beta;\ 0, 1, 0;\ \cos\beta, 0, 1.$

II.) $\frac{a}{2}, \frac{\bar{b}}{2}, 0;\ 1, 0, \cos\beta;\ 0, 1, 0;\ \cos\beta, 0, 1.$

III.) $0, 0, c;\ 1, 0, \cos\beta;\ 0, 1, 0;\ \cos\beta, 0, 1.$

IV.) $0, 0, 0;\ \bar{1}, 0, \cos\beta;\ 0, 1, 0;\ \cos\beta, 0, \bar{1}.$

Symmetrieelemente:

Digonale Drehungsachsen ${}^{00}[0\,1\,0]$, ${}^{\frac{1}{2}\,0}[0\,1\,0]$ und ${}^{0\,\frac{1}{2}}[0\,1\,0]$, ${}^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}[0\,1\,0]$.

Digonale Schraubenachsen ${}^{\frac{1}{4}\,0}[0\,1\,0]$, ${}^{\frac{3}{4}\,0}[0\,1\,0]$ und ${}^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}[0\,1\,0]$, ${}^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}[0\,1\,0]$. (Siehe Fig. 74.)

Punktlagen auf einer der vier digonalen Drehungsachsen sind bei einem Freiheitsgrad zweizählig und müssen die Symmetrie $1\,\widehat{0}\downarrow = C_2$ besitzen.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden vierzählig und besitzen keinerlei Symmetriebedingungen. Es gehören zusammen:

$[\![m, n, p]\!]$, $[\![m + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}, p]\!]$, $[\![\bar{m}, n, \bar{p}]\!]$, $[\![\bar{m} + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$.

Punkte auf den Drehungsachsen bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierter Basis, Punkte auf den Schraubenachsen Gitter dieser Form mit zentrierter Basis und zentrierten Seitenkanten der Richtung a und b. Polar vektorieller Charakter der zu [0 1 0] parallelen Geraden wie oben.

$\mathfrak{C}_{2h}$. Monoklin holoedrische Klasse (Prismatische Klasse)

1. Einer digonalen Achse isomorphe Parallelschar digonaler Achsen.
2. Senkrecht dazu einer Symmetrieebene isomorphe Parallelschar verallgemeinerter Symmetrieebenen.
3. Einem Symmetriezentrum isomorphe Schar von Symmetriezentren.

Charakteristische Symmetrieelemente 1 und 2, oder 1 und 3, oder 2 und 3.

In Analogie mit den bereits betrachteten Raumgruppen wird b stets die Periode in der Achsenrichtung angeben; a und c liegen parallel der Symmetrieebenenschar und bezeichnen hier ein primitives Paar. α und $\gamma = 90^0$. $\beta > 90^0$. Für Vergleichzwecke unter Umständen zweckmäßige Sonderwahl von a und c erledigt sich analog wie in den entsprechenden Untergruppen.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{2h}^1$

(Enthält als Untergruppen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_2^1$.) Charakteristische Untergruppen $\mathfrak{C}_s^1\,\mathfrak{C}_2^1$ oder $\mathfrak{C}_s^1\,\mathfrak{C}_i$ oder $\mathfrak{C}_i\,\mathfrak{C}_2^1$. Alle Symmetrieebenen sind

Spiegelebenen, alle digonalen Achsen Drehungsachsen. Koordinatenanfangspunkt im Schnittpunkt (Symmetriezentrum!) einer digonalen Drehungsachse mit einer Spiegelebene. Primitives Tripel a, b, c.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.) a, 0, 0; $\frac{1}{2}$, 0, $\cos\beta$; 0, 1, 0; $\cos\beta$, 0, 1.

II.) 0, b, 0; 1, 0, $\cos\beta$; 0, 1, 0; $\cos\beta$, 0, 1.

III.) 0, 0, c; 1, 0, $\cos\beta$; 0, 1, 0; $\cos\beta$, 0, 1.

IV.) 0, 0, 0; $\bar{1}$, 0, $\overline{\cos\beta}$; 0, 1, 0; $\overline{\cos\beta}$, 0, $\bar{1}$.

V.) 0, 0, 0; 1, 0, $\cos\beta$; 0, $\bar{1}$, 0; $\cos\beta$, 0, 1.

Statt der Bedingungen IV.) und V.) könnten als bedingend und charakteristisch auch V.) und VI.) oder IV.) und VI.) gewählt werden, wo VI.) der Gruppe $\mathfrak{C}_i$ mit der speziellen Form

0, 0, 0; $\bar{1}$, 0, $\overline{\cos\beta}$; 0, $\bar{1}$, 0; $\overline{\cos\beta}$, 0, $\bar{1}$

gleich ist.

Weiterhin sind immer nur die den Gruppen $\mathfrak{C}_s$ und $\mathfrak{C}_2$ konformen Bedingungen angegeben, die durchaus genügen, da sich die Symmetriezentrumsbedingung durch Kombination daraus ableiten läßt. (Siehe Seite 42.)

Symmetrieelemente: (Siehe Fig. 75).

Symmetriezentren:

$[\![0\,0\,0]\!]$; $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$; $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$; $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$; $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$; $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$; $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$; $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$.

Spiegelebenen: $(0\,1\,0)_0$ und $(0\,1\,0)_{\frac{1}{2}}$.

Drehungsachsen: ${}^{00}[0\,1\,0]$; ${}^{\frac{1}{2}\,0}[0\,1\,0]$; ${}^{0\,\frac{1}{2}}[0\,1\,0]$; ${}^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}[0\,1\,0]$.

Punktlagen: Jedes der acht verschiedenartigen Symmetriezentren stellt eine Punktlage ohne Freiheitsgrad dar, die mit der Symmetriebedingung $(1\,() + 1\,\mathrm{SE}) + \mathrm{Z} = \mathrm{C}_{2h}$ einzählig ist. Also achterlei Punkte ohne Freiheitsgrad.

Die Punkte $[\![0, n, 0]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}, n, 0]\!]$ oder $[\![0, n, \frac{1}{2}]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}, n, \frac{1}{2}]\!]$ auf den Drehungsachsen sind mit einem Freiheitsgrad zweizählig. Symmetriebedingung $= 1\,\widehat{()} = \mathrm{C}_2$. Die Punkte $[\![m, 0, p]\!]$ oder $[\![m, \frac{1}{2}, p]\!]$ auf den Spiegelebenen sind mit zwei Freiheitsgraden ebenfalls zweizählig. Symmetriebedingung $= 1\,\mathrm{SE} = \mathrm{C}_s$. Alle übrigen Punkte sind bei allgemeinster Lage mit drei Freiheitsgraden vierzählig und besitzen keinerlei Symmetriebedingungen.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$, $[\![\overline{m}, n, \bar{p}]\!]$, $[\![m, \bar{n}, p]\!]$, $[\![\overline{m}, \bar{n}, \bar{p}]\!]$.

Es gehören beispielsweise zusammen

einerseits $[\![\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}]\!]$;

anderseits $[\![\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}]\!]$.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{2h}^2$

(Enthält die Untergruppen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_2^2$.) Charakteristische Untergruppen $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_2^2$. Alle Symmetrieebenen sind Spiegelebenen, alle digonalen Achsen Schraubenachsen. Den Koordinatenanfangspunkt legt man zweckmäßig in ein Symmetriezentrum, dem entspricht eine Koordinatenverschiebung um $\frac{b}{4}$ gegenüber der Untergruppe $\mathfrak{C}_s^1$. Primitives Tripel a, b, c; zugleich (wie immer) Einheitsmaßstäbe. (Fig. 76.)

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) wie in der Raumgruppe $\mathfrak{C}_{2h}^1$.

IV.) $0, \frac{b}{2}, 0;\ \bar{1}, 0, \overline{\cos\beta};\ 0, 1, 0;\ \overline{\cos\beta}, 0, \bar{1}$.

V.) $0, \frac{b}{2}, 0;\ 1, 0, \cos\beta;\ 0, \bar{1}, 0;\ \cos\beta, 0, 1$.

Symmetriezentren: viererlei, je zwei zusammengehörig, nämlich $[\![0\,0\,0]\!]$ zu $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$; $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ zu $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$; $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ zu $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$; $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ zu $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$.

Spiegelebenen: $(0\,1\,0)_{\frac{1}{4}}$, $(0\,1\,0)_{\frac{3}{4}}$.

Schraubenachsen: ${}^{00}[0\,1\,0]$; ${}^{\frac{1}{2}0}[0\,1\,0]$; ${}^{0\frac{1}{2}}[0\,1\,0]$; ${}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[0\,1\,0]$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$, $[\![\bar{m}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$, $[\![m, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$, $[\![\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad: Viererlei entsprechend den viererlei voneinander unabhängigen Arten von Symmetriezentren. Zähligkeit jeder Punktlage = 2. Symmetriebedingung = $1\,Z = C_i$. Die Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarpipeds mit zentrierten Kanten [0 1 0].

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad gibt es keine.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden: Sie liegen auf den Spiegelebenen, sind also von der Art $[\![m, \frac{1}{4}, p]\!]$ oder $[\![m, \frac{3}{4}, p]\!]$. Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung = $1\,S\,E = C_s$.

Die Schnittpunkte der Schraubenachsen mit den Spiegelebenen bilden Gitter gleicher Form wie die Symmetriezentren. Zu $[\![0\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ gehört beispielsweise $[\![0\,\frac{3}{4}\,0]\!]$.

Alle übrigen Punkte besitzen keinerlei Symmetriebedingungen, sie sind mit drei Freiheitsgraden vierzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{2h}^3$

(Enthält die Untergruppen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^3$.) Charakteristische Untergruppen $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^3$. Es sind vorhanden Spiegelebenen und Gleitspiegelebenen, Drehungsachsen und Schraubenachsen.

Das Elementarparallelepiped mit α und $\gamma = 90^0$ ist mindestens doppeltprimitiv und in der nachfolgenden Darstellung basisflächenzentriert.

Ein primitives Tripel ist daher gegeben durch $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}, \frac{a}{2}-\frac{b}{2}$, c.

a, b und c sind unsere Einheitsmaßstäbe, α und γ sind $= 90^0$. $\beta > 90^0$. Der Koordinatenanfangspunkt ist Schnittpunkt von einer Drehungsachse mit einer Spiegelebene (Symmetriezentrum). (Fig. 77).

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0$; 1, 0, $\cos\beta$; 0, 1, 0; $\cos\beta$, 0, 1.

II.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0$; 1, 0, $\cos\beta$; 0, 1, 0; $\cos\beta$, 0, 1.

III.) 0, 0, c; 1, 0, $\cos\beta$; 0, 1, 0; $\cos\beta$, 0, 1.

IV.) 0, 0, 0; $\bar{1}$, 0, $\overline{\cos\beta}$; 0, 1, 0; $\overline{\cos\beta}$, 0, $\bar{1}$.

V.) 0, 0, 0; 1, 0, $\cos\beta$; 0, $\bar{1}$, 0; $\cos\beta$, 0, 1.

Symmmetriezentren: 8 Symmetriezentren. Viererlei von je zwei zusammengehörigen, zweierlei von je vier zusammengehörigen.

Nämlich $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$; $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$; $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$; $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$.

Ferner $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$; anderseits $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$.

Spiegelebenen: $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$. Gleitkomponente $= \frac{a}{2}$.

Digonale Drehungsachsen: $^{(0)}[010]$, $^{\frac{1}{2}0}[010]$; $^{0\frac{1}{2}}[010]$, $^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[010]$.

Digonale Schraubenachsen: $^{\frac{1}{4}0}[010]$, $^{\frac{3}{4}0}[010]$; $^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}[010]$, $^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}[010]$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, n, \bar{p}]\!]$ $[\![\overline{m+\frac{1}{2}}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$

$[\![m, \bar{n}, p]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \overline{n+\frac{1}{2}}, p]\!]$, $[\![\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![\overline{m+\frac{1}{2}}, \overline{n+\frac{1}{2}}, \bar{p}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad: Die viererlei Arten von Symmetriezentren der ersten Zeile oben. Zähligkeit jeweilen = 2.

Symmetriebedingung $= (1\,() + 1\,SE) + Z = C_{2h}$.

Die zweierlei Symmetriezentren der zweiten Zeile oben; je 4 zusammengehörig, also Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung $1\,Z = C_i$.

Die ersteren bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Basisflächen, die letzteren mit zentrierten Basisflächen und zentrierten Seitenkanten des Basisrechteckes.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad: $[\![0, n, 0]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}, n, 0]\!]$ oder $[\![0, n, \frac{1}{2}]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}, n, \frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung $= 1\widehat{()} = C_2$.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden: $[\![m, 0, p]\!]$ oder $[\![m, \frac{1}{2}, p]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung $1\,SE = C_s$.

Alle übrigen Punktlagen sind ohne Symmetriebedingung achtzählig.

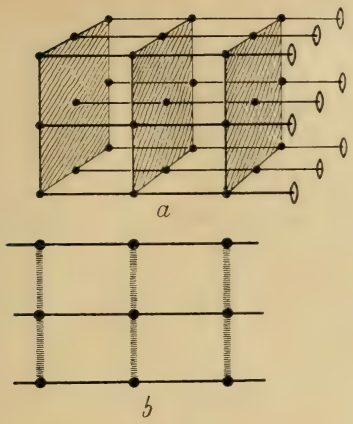


Fig. 75. C_{2h}^1.
Fig. 75a = perspektivische Darstellung.
Fig. 75b = Projektion auf $(001)_0$.

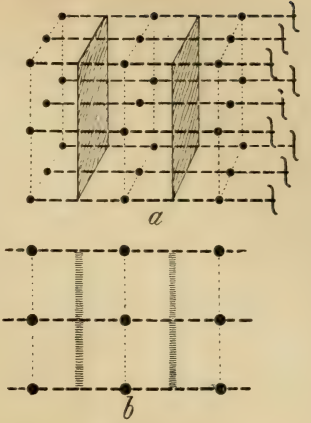


Fig. 76. C_{2h}^2.
Fig. 76a = perspektivische Darstellung.
Fig. 76b = Projektion auf $(001)_0$.

Fig. 78. C_{2h}^4. Ebene $(001)\frac{1}{4}$.
Die durchbrochenen Bänder stellen Gleitspiegelebenen dar, die kräftigen schwarzen Linien Drehungsachsen. Die Doppelkreise sollen angeben, daß die Symmetriezentren $\frac{\tau}{4}$ oberhalb und $\frac{\tau}{4}$ unterhalb der Achsenebene liegen.

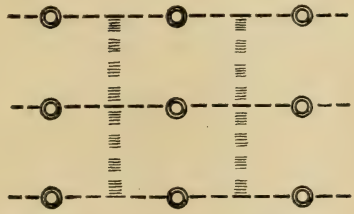


Fig. 79. C_{2h}^5. Ebene $(001)\frac{1}{4}$.
Bezeichnung wie Fig. 78. Alle Symmetrieebenen sind Gleitspiegelebenen, alle Achsen Schraubenachsen (gestrichelt).

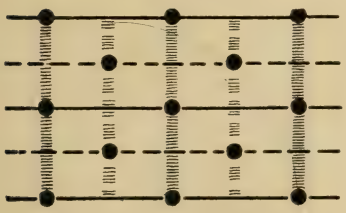


Fig. 77. C_{2h}^3. Ebene $(001)_0$.

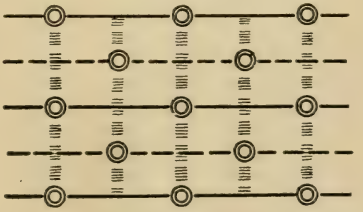


Fig. 80. C_{2h}^6. Ebene $(001)\frac{1}{4}$.
Achsenebene. Bezeichnung wie Fig. 78.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{2h}^4$

(Sie enthält die Untergruppen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_2^1$.) Charakteristische Untergruppen $\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_2^1$. Alle Symmetrieebenen sind Gleitspiegelebenen, alle digonalen Achsen sind Drehungsachsen. Die Richtung der Gleitkomponente wählen wir zur c-Richtung. (Fig. 78.)

Der Koordinatenanfangspunkt wird zweckmäßig die Lage eines Symmetriezentrums einnehmen. Gegenüber der Untergruppe $\mathfrak{C}_2^1$ findet eine Koordinatenachsenverschiebung von $\frac{1}{4}$ c statt. Primitives Tripel: a, b, c, zugleich Einheitsmaßstäbe.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) wie in $\mathfrak{C}_{2h}^1$.

IV.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $1, 0, \cos\beta$; $0, \bar{1}, 0$; $\cos\beta, 0, 1$.

V.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $\bar{1}, 0, \overline{\cos}\,\beta$; $0, 1, 0$; $\overline{\cos}\,\beta, 0, \bar{1}$.

Symmetriezentren: Viererlei Arten von je zwei zusammengehörigen Symmetriezentren.

$[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\tfrac{1}{2}]\!]$; $[\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}]\!]$; $[\![0\,\tfrac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}]\!]$; $[\![\tfrac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}\,0\,\tfrac{1}{2}]\!]$.

Gleitspiegelebenen: $(010)_0$; $(010)_{\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: $^{0\,\frac{1}{4}}[010]$ $^{0\,\frac{3}{4}}[010]$; $^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}}[010]$ $^{\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}}[010]$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}, n, \bar{p} + \tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p + \tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad: Viererlei, entsprechend den viererlei Symmetriezentrumsarten. Jede Lage ist zweizählig. Symmetriebedingung $1\,Z = C_i$. Diese Punktlagen bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Kanten [001].

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad:

$[\![0, n, \tfrac{1}{4}]\!]$ oder $[\![0, n, \tfrac{3}{4}]\!]$ oder $[\![\tfrac{1}{2}, n, \tfrac{1}{4}]\!]$ oder $[\![\tfrac{1}{2}, n, \tfrac{3}{4}]\!]$.

Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung $1\,\widehat{()^{\downarrow}} = C_2$.

Alle übrigen Punktlagen sind ohne Symmetriebedingung, also mit drei Freiheitsgraden, vierzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{2h}^5$

(Enthält die Untergruppen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_2^2$.) Charakteristische Untergruppen $\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_2^2$. Alle Symmetrieebenen sind Gleitspiegelebenen ein und derselben Operation, z. B. mit der Gleitkomponente $\frac{c}{2}$. Alle digonalen Achsen sind Schraubenachsen. a, b, c ist ein primitives Tripel, es liefert die Einheitsmaßstäbe. α und $\gamma = 90^0$. $\beta > 90^0$.

Der Koordinatenanfangspunkt besitzt zweckmäßig die Lage eines Symmetriezentrums. Koordinatenverschiebung gegenüber der Untergruppe $\mathfrak{C}_s^2 = \frac{b}{4}$; gegenüber $\mathfrak{C}_2^2 = \frac{c}{4}$. (Fig. 79).

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) wie $\mathfrak{C}_{2h}^1$.

IV.) $0, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$; $1, 0, \cos\beta$; $0, \bar{1}, 0$; $\cos\beta, 0, 1$.

V.) $0, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$; $\bar{1}, 0, \overline{\cos\beta}$; $0, 1, 0$; $\overline{\cos\beta}, 0, \bar{1}$.

Symmetriezentren:

$[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$; $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$; $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$; $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$.

Gleitspiegelebenen: $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$.

Digonale Schraubenachsen: ${}^{0}{}_{\frac{1}{4}}[010]$ ${}^{0}{}_{\frac{3}{4}}[010]$; ${}^{\frac{1}{2}}{}_{\frac{1}{4}}[010]$ ${}^{\frac{1}{2}}{}_{\frac{3}{4}}[010]$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}, n + \frac{1}{2}, \bar{p} + \frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n} + \frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad: Den viererlei Symmetriezentren entsprechende Punktlagen sind zweizählig. Beispielsweise gehören zusammen $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ usw. (Siehe oben unter Symmetriezentren.) Symmetriebedingung: $1\,Z = C_i$. Derartige Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Flächen (100).

Alle übrigen Punktlagen sind ohne Symmetriebedingung vierzählig. (Drei Freiheitsgrade.)

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{2h}^6$

Vorhandene Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_2^3$. Charakteristische Untergruppen: $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_2^3$. Es treten Drehungsachsen und Schraubenachsen auf. Alle Symmetrieebenen sind Gleitspiegelebenen. Das Elementarparallelepiped mit $\alpha = \gamma = 90^0$ ist mindestens doppeltprimitiv und in der nachfolgenden Darstellung basisflächenzentriert. Achsenwahl wie in der Untergruppe $\mathfrak{C}_s^4$. Der Anfangspunkt wird aber hier zweckmäßig in ein Symmetriezentrum verlegt. Gegenüber der Untergruppe $\mathfrak{C}_2^3$ hat somit eine Koordinatenverschiebung um $\frac{c}{4}$ stattgefunden. a, b, c Einmaßstäbe; $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$, $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$, c ist ein primitives Tripel. (Fig. 80).

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) wie in Raumgruppe $\mathfrak{C}_{2h}^3$.

IV.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $\bar{1}, 0, \overline{\cos\beta}$; $0, 1, 0$; $\overline{\cos\beta}, 0, \bar{1}$.

V.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $1, 0, \cos\beta$; $0, \bar{1}, 0$; $\cos\beta, 0, 1$.

16 Symmetriezentren, je vier zusammengehörig, nämlich

$[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$; oder $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}[\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$;
oder $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$; oder $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$.

Gleitspiegelebenen:

$(010)_0$ und $(010)_{\frac{1}{2}}$ mit der Gleitkomponente $\frac{c}{2}$

$(010)_{\frac{1}{4}}$ und $(010)_{\frac{3}{4}}$ mit der Gleitkomponente $\left(\frac{c}{2}+\frac{a}{2}\right)$.

Drehungsachsen: ${}^{0}\!_{4}^{1}[010]$ ${}^{\frac{1}{2}}\!_{4}^{1}[010]$ ${}^{0}\!_{4}^{3}[010]$ ${}^{\frac{1}{2}}\!_{4}^{3}[010]$.

Schraubenachsen: ${}^{\frac{1}{4}}\!_{4}^{1}[010]$ ${}^{\frac{3}{4}}\!_{4}^{1}[010]$ ${}^{\frac{1}{4}}\!_{4}^{3}[010]$ ${}^{\frac{3}{4}}\!_{4}^{3}[010]$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![m, n, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![m, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad. Die Symmetriezentrumslagen in den oben hingeschriebenen Kombinationen besitzen keinen Freiheitsgrad. Zähligkeit = 4. Symmetrie = 1 Z = C_i. Sie bilden einerseits Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierter Basis, zentrierten Kanten [0 0 1] und mit Innenzentrierung, anderseits allseitig flächenzentrierte Gitter.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Alle Punkte:

$[\![0\,n\,\frac{1}{4}]\!]$ oder $[\![0\,n\,\frac{3}{4}]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}\,n\,\frac{1}{4}]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}\,n\,\frac{3}{4}]\!]$.

Symmetriebedingung = $1\,\widehat{()}\,\downarrow$ = C_2. Zähligkeit = 4.

Alle übrigen Punktlagen sind ohne Symmetriebedingungen mit drei Freiheitsgraden pro Elementarparallelepiped achtzählig.

Rhombische Abteilung

Es gibt immer drei verschiedenartige Perioden a, b, c, die aufeinander senkrecht stehen und die ein Parallelepiped bedingen, das entweder primitiv, doppeltprimitiv oder vierfachprimitiv ist. Dieses Parallelepiped ist unser Elementarparallelepiped. a, b, c sind die Einheitsmaßstäbe. α, β, γ also gleich 90°.

C_{2v}. Rhombisch hemimorphe Klasse (Pyramidale Klasse)

1. Einer Symmetrieebene isomorphe Parallelschar verallgemeinerter Symmetrieebenen.
2. Senkrecht dazu einer zweiten Symmetrieebene isomorphe Parallelschar verallgemeinerter Symmetrieebenen.
3. Parallel der Schnittlinie beider Ebenenscharen eine Schar digonaler Achsen (polar).

Charakteristische Symmetrieelemente entweder 1 und 2 oder 1 und 3 oder 2 und 3. Die c-Koordinatenachse wird parallel zur digonalen

Achsenschar gewählt, so daß die Symmetrieebenen parallel (100) und (010) liegen. Die Raumgruppen $\mathfrak{C}_{2v}^1$ bis $\mathfrak{C}_{2v}^{10}$ besitzen als primitives Tripel a, b, c.

Die drei ersten Decktransformationsbedingungen lauten daher für alle diese 10 Gruppen folgendermaßen: a, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.
I.)—III.) 0, b, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.
0, 0, c; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{2v}^1$

Sie enthält als Untergruppen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_2^1$. Charakteristische Untergruppen $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^1$ oder $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_s^1$. Alle Symmetrieebenen sind Spiegelebenen, alle digonalen Achsen Drehungsachsen. Der Koordinatenanfangspunkt hat beliebige Lage auf einer digonalen Drehungsachse. (Fig. 81.)

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) Siehe oben.

IV.) 0, 0, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, $\bar{1}$, 0; 0, 0, 1. V.) 0, 0, 0; 1, 0, 0; 0, $\bar{1}$, 0; 0, 0, 1.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$; $[001]_{0\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{1}{2}0}$; $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$:

Spiegelebenen: $(010)_0$; $(010)_{\frac{1}{2}}$ und $(100)_0$; $(100)_{\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n\, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, n, p]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p]\!]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad:

$[\![0\,0\,p]\!]$ oder $[\![0\,\frac{1}{2}\,p]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}\,0\,p]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,p]\!]$. Zähligkeit = 1. Symmetriebedingung $= 1SE + 1SE + 1\widehat{0}\downarrow = C_{2v}$. Alle derartigen Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden:

$[\![m\,0\,p]\!]$ oder $[\![m\,\frac{1}{2}\,p]\!]$ oder $[\![0\,n\,p]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}\,n\,p]\!]$. Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung $= 1\,SE = C_s$.

Alle übrigen Punkte sind mit drei Freiheitsgraden vierzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{2v}^2$

Sie enthält als Untergruppen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_2^2$. Charakteristische Untergruppen[1]: $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^1$. Die eine Schar der Symmetrieebenen besteht aus Spiegelebenen (010), die andere aus Gleitspiegelebenen (100). Alle digonalen Achsen sind Schraubenachsen. Koordinatenanfangspunkt auf eine Spiegelebene und in die Schraubenachse fallend.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III). Siehe Seite 161.

IV.) 0, 0, $\frac{c}{2}$; $\bar{1}$, 0, 0; 0, $\bar{1}$, 0; 0, 0, 1. V.) 0, 0, 0; 1, 0, 0; 0, $\bar{1}$, 0: 0, 0, 1.

[1]) Der Strich durch $\mathfrak{C}_s^2$ deutet die Gleitrichtung an. Senkrecht: wenn parallel der digonalen Achse, schräg: wenn schief dazu, horizontal: wenn senkrecht dazu.

Symmetrieelemente:

Digonale Schraubenachsen: $[010]_{00}$, $[001]_{0\frac{1}{2}}$, $[001]_{\frac{1}{2}0}$, $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.
Spiegelebenen: $(010)_0$, $(010)_{\frac{1}{2}}$.
Gleitspiegelebenen: $(100)_0$, $(100)_{\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$$[\![m, n, p]\!] \quad [\![\bar{m}, \bar{n}, p + \tfrac{1}{2}]\!] \quad [\![\bar{m}, n, p + \tfrac{1}{2}]\!] \quad [\![m, \bar{n}, p]\!].$$

Punktlagen: Außer vierzähligen Punkten mit drei Freiheitsgraden gibt es nur zweizählige Punkte mit zwei Freiheitsgraden und der Symmetriebedingung $1\,SE = C_s$. Es sind das Punkte $[\![m, 0, p]\!]$ oder $[\![m, \frac{1}{2}, p]\!]$.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{2v}^3$

Sie enthält als Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_2^1$. Charakteristische Untergruppen: $\mathfrak{F}_s^2$, $\mathfrak{F}_s^2$. Alle Symmetrieebenen sind Gleitspiegelebenen mit der Gleitkomponente $\frac{c}{2}$. Alle digonalen Achsen sind Drehungsachsen. Der Koordinatenanfangspunkt hat beliebige Lage auf einer Drehungsachse.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 161.

IV.) $0, 0, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1$. V.) $0, 0, \frac{c}{2};\ 1, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1$.

Symmetrieelemente:

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$, $[001]_{\frac{1}{2}0}$, $[001]_{0\frac{1}{2}}$, $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.
Gleitspiegelebenen: $(010)_0$, $(010)_{\frac{1}{2}}$ und $(100)_0$, $(100)_{\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$$[\![m, n, p]\!] \quad [\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!] \quad [\![\bar{m}, n, p + \tfrac{1}{2}]\!] \quad [\![m, \bar{n}, p + \tfrac{1}{2}]\!].$$

Punktlagen: Alle Punkte $[\![00p]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}0p]\!]$ oder $[\![0\frac{1}{2}p]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}\frac{1}{2}p]\!]$ sind zweizählig mit einem Freiheitsgrad und der Symmetriebedingung $= 1\widehat{()} = \mathfrak{C}_2$. Sie bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Kanten [001]. Die übrigen Punkte sind mit drei Freiheitsgraden vierzählig und besitzen keinerlei Symmetriebedingung.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{2v}^4$

Sie enthält als Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_2^1$. Charakteristische Untergruppen: $\mathfrak{C}_s^1$ $\mathfrak{F}_s^2$. Die Spiegelebenen sollen von der Lage (010) sein, die Gleitspiegelebenen von der Lage (100). Alle digonalen Achsen sind Drehungsachsen. Koordinatenanfangspunkt in einer Drehungsachse. Koordinatenverschiebung gegenüber der Untergruppe $\mathfrak{C}_s^1 = \frac{b}{4}$.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 161.

IV.) $0,0,0;\ \bar{1},0,0;\ 0,\bar{1},0;\ 0,0,1$. V.) $0,\frac{b}{2},0;\ 1,0,0;\ 0,\bar{1},0;\ 0,0,1$.

Symmetrieelemente:

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$, $[001]_{0\frac{1}{2}}$, $[001]_{\frac{1}{2}0}$, $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$.

Gleitspiegelebenen: $(100)_0$; $(100)_{\frac{1}{2}}$. Gleitkomponente $\frac{b}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[m, n, p]$ $[\bar{m}, \bar{n}, p]$ $[\bar{m}, n+\frac{1}{2}, p]$ $[m, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad: Punkte $[0\,0\,p]$ oder $[\frac{1}{2}\,0\,p]$ oder $[0\,\frac{1}{2}\,p]$ oder $[\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,p]$. Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung $= 1\overset{\curvearrowright}{0}\downarrow = C_2$. Sie bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Kanten [010].

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden: $[m\,\frac{1}{4}\,p]$ oder $[m\,\frac{3}{4}\,p]$. Sie sind zweizählig und besitzen die Symmetriebedingung $1\,S\,E = C_s$. Alle übrigen Punkte besitzen drei Freiheitsgrade und sind vierzählig. (Ohne Symmetriebedingung.)

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{2v}^5$

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_2^2$. Charakteristische Untergruppen: $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^2$. Koordinatenanfangspunkt auf einer Schraubenachse.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 161.

IV.) $0,0,\frac{c}{2};\ \bar{1},0,0;\ 0,\bar{1},0;\ 0,0,1$. V.) $\frac{a}{2},0,0;\ 1,0,0;\ 0,\bar{1},0;\ 0,0,1$.

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{00}\,[001]_{\frac{1}{2}0}$; $[001]_{0\frac{1}{2}}\,[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}$.

$(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{c}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[m, n, p]$ $[\bar{m}, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]$ $[\bar{m}+\frac{1}{2}, n, p+\frac{1}{2}]$ $[m+\frac{1}{2}, \bar{n}, p]$.

Alle Punkte sind mit drei Freiheitsgraden, ohne Symmetriebedingung, vierzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{2v}^6$ (Siehe Fig. 82)

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_2^1$. Charakteristische Untergruppen: $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^2$. Alle Symmetrieebenen sind Gleitspiegelebenen. Parallel (010) sei die Gleitkomponente $= \frac{a+c}{2}$, parallel (100) $= \frac{c}{2}$. Der Koordinatenanfangspunkt liegt auf einer zweizähligen Drehungsachse.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 161.

IV.) $0, 0, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1.$ V.) $\frac{a}{2}, 0, \frac{c}{2};\ 1, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1.$

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}\,[001]_{\frac{1}{2}0}$; $[001]_{0\frac{1}{2}}\,[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(010)_0$, $(010)_{\frac{1}{2}}$ und $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(\bar{1}00)_{\frac{3}{4}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad: Alle Punkte $[\![0\,0\,p]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}\,0\,p]\!]$ oder $[\![0\,\frac{1}{2}\,p]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,p]\!]$ besitzen die Zähligkeit 2, die Symmetriebedingung $= C_2$ und bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Flächen [010].

Alle übrigen Punkte sind mit drei Freiheitsgraden ohne Symmetriebedingung vierzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{2v}^{7}$

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_2^2$. Charakteristische Untergruppen: $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^2$. Die Ebenen parallel (010) seien Spiegelebenen, diejenigen parallel (100) Gleitspiegelebenen. Alle digonalen Achsen sind Schraubenachsen. Der Koordinatenanfangspunkt liege auf einer Spiegelebene im Schnitt mit einer Gleitspiegelebene. Koordinatenachsenverschiebung gegenüber Gruppe $\mathfrak{C}_2^2 = \frac{b}{4}$.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 161.

IV.) $0, \frac{b}{2}, \frac{c}{2};\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1.$ V.) $0, 0, 0;\ 1, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1.$

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{0\frac{1}{4}}\,[001]_{0\frac{3}{4}}$; $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}\,[001]_{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$.

Spiegelebenen: $(010)_0$, $(010)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(100)_0$, $(\bar{1}00)_{\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p]\!]$.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden finden sich auf den Spiegelebenen, entsprechend den Werten $[\![m, 0, p]\!]$ und $[\![\bar{m}, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ sind sie zweizählig und besitzen die Symmetriebedingung C_s.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden vierzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{2v}^{8}$

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_2^1$. Charakteristische Untergruppen: $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^2$. Der Koordinatenanfangspunkt liegt in einer Drehungsachse.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 161.

IV.) $0,0,0;\ \bar{1},0,0;\ 0,\bar{1},0;\ 0,0,1.$ V.) $\frac{a}{2},\frac{b}{2},0;\ 1,0,0;\ 0,\bar{1},0;\ 0,0,1.$

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}\ [001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}};\ [001]_{\frac{1}{2}0}\ [001]_{0\frac{1}{2}}.$

Gleitspiegelebenen: $(010)_{\frac{1}{4}}\ (010)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}$.

$(100)_{\frac{1}{4}}\ (100)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{2}$.

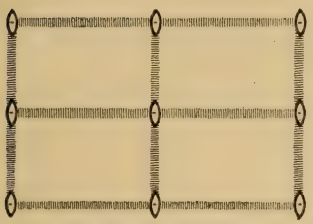


Fig. 81. $\mathfrak{C}_{2v}^{1}$ Ebene $(001)_0$. (Projektion.)

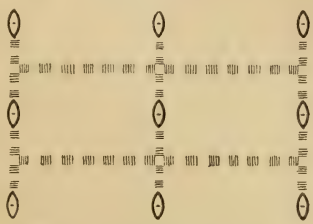


Fig. 82. $\mathfrak{C}_{2v}^{6}$ Ebene $(001)_0$. (Projektion.)

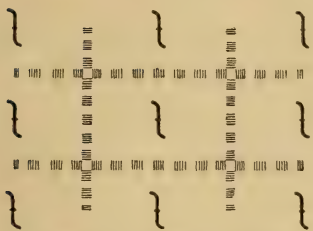


Fig. 83. $\mathfrak{C}_{2v}^{9}$ Ebene $(001)_0$. (Projektion.)

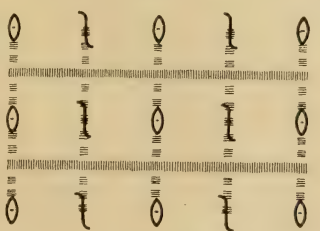


Fig. 84. $\mathfrak{C}_{2v}^{16}$ Ebene $(001)_0$ (Projektion.)

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]\ [\![m, \bar{n}, p]\!]\ [\![\bar{m}+\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}, p]\!]\ [\![m+\tfrac{1}{2}, \bar{n}+\tfrac{1}{2}, p]\!].$

$[\![0\ 0\ p]\!]$ mit $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ p]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}\ 0\ p]\!]$ mit $[\![0\ \frac{1}{2}\ p]\!]$ sind Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Sie besitzen die Zähligkeit 2 und die Symmetriebedingung C_2. Sie bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Basisflächen.

Alle übrigen Punkte sind mit drei Freiheitsgraden (ohne Symmetriebedingung) vierzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{2v}^{9}$ (Siehe Fig. 83)

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_s^{2}$, $\mathfrak{C}_s^{2}$, $\mathfrak{C}_2^{2}$. Charakteristische Untergruppen: $\mathfrak{C}_s^{2}$, $\mathfrak{C}_s^{2}$. Koordinatenanfangspunkt in einer Schraubenachse.

Charakteristische Decktransformationsbedingungen:
I.)—III.) siehe Seite 161.

IV.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$. V.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0$; $1, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$.

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}$.

$(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{2}+\frac{c}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$.

Für keinerlei Punktlagen sind Symmetriebedingungen vorhanden. Alle besitzen drei Freiheitsgrade und sind vierzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{2v}^{10}$

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_2^1$. Charakteristische Untergruppen: $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^2$. Koordinatenanfangspunkt in einer Drehungsachse.

Charakteristische Decktransformationsbedingungen:
I.)—III.) siehe Seite 161.

IV.) $0, 0, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$. V.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$; $1, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}+\frac{c}{2}$;

$(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{2}+\frac{c}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad: $[\![0\,0\,p]\!]$ oder $[\![0\,\frac{1}{2}\,p]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}\,0\,p]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,p]\!]$. Zähligkeit = 2. Z. B. gehören zusammen: $[\![0\,0\,p]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$. Symmetriebedingung C_2. Sie bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung.

Alle übrigen Punktlagen ohne Symmetriebedingung, also mit drei Freiheitsgraden vierzählig.

Ein Tripel primitiver Translationen der Raumgruppen $\mathfrak{C}_{2v}^{11}$ — $\mathfrak{C}_{2v}^{13}$ lautet $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$, $\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$, c. Das Elementarparallelepiped ist somit doppeltprimitiv und basisflächenzentriert. Die drei ersten Decktransformationsbedingungen lauten für alle drei Gruppen:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0$; $1, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, 1$. II.) $\frac{a}{2}, \frac{\bar{b}}{2}, 0$; $1, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, 1$.

III.) $0, 0, c$; $1, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, 1$.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{2v}^{11}$

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^1$. Charakteristische Untergruppen[1]): $\underline{\mathfrak{C}_s^3}$, $\underline{\mathfrak{C}_s^3}$. Koordinatenanfangspunkt auf einer zweizähligen Drehungsachse, die zugleich Schnittlinie zweier Spiegelebenen ist.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe oben.

IV.) $0,0,0;\ \bar{1},0,0;\ 0,\bar{1},0;\ 0,0,1$. V.) $0,0,0;\ 1,0,0;\ 0,\bar{1},0;\ 0,0,1$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[001]_{0\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$.

ferner $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$

Spiegelebenen: $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$, ferner $(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ mit Gleitkomp. $\frac{a}{2}$;

$(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ mit Gleitkomp. $\frac{b}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[m, n, p]$ $[m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]$ $[\bar{m}, \bar{n}, p]$ $[\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]$

$[\bar{m}, n, p]$ $[\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]$ $[m, \bar{n}, p]$ $[m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad: Punkte $[00p]$ mit $[\frac{1}{2}\frac{1}{2}p]$ oder $[\frac{1}{2}0p]$ mit $[0\frac{1}{2}p]$ sind zweizählig. Symmetriebedingung C_{2v}. Sie bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierter Basis. Punkte $[\frac{1}{4}\frac{1}{4}p]$ mit $[\frac{3}{4}\frac{3}{4}p]$, $[\frac{1}{4}\frac{3}{4}p]$, $[\frac{3}{4}\frac{1}{4}p]$ sind vierzählig. Die vier hingeschriebenen Werte gehören zusammen. Symmetriebedingung C_2. Sie bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierter Basis und zentrierten Kanten des Basisparallelogrammes.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden: $[m, 0, p]$ oder $[m, \frac{1}{2}, p]$ oder $[0, n, p]$ oder $[\frac{1}{2}, n, p]$. Symmetriebedingung $= C_s$. Zähligkeit $= 4$.

Alle übrigen Punkte sind ohne Symmetriebedingung mit drei Freiheitsgraden achtzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{2v}^{12}$

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_2^2$. Charakteristische Untergruppen: $\underline{\mathfrak{C}_s^3}$, $\underline{\mathfrak{C}_s^4}$. Die (010) parallelen Ebenen bestehen aus Spiegelebenen und Gleitspiegelebenen, die (100) parallelen Ebenen sind nur Gleitspiegelebenen. Alle digonalen Achsen sind Schraubenachsen. Koordinatenanfangspunkt auf einer Spiegelebene und in einer Schraubenachse liegend.

---

[1]) Ein Strich unterhalb einer Raumgruppe $\mathfrak{C}_s^3$ oder $\mathfrak{C}_s^4$ gibt in Beziehung zur Achsenrichtung die Gleitrichtung der neben Spiegelebenen oder Gleitspiegelebenen vorhandenen Gleitspiegelebenen zweiter Operationsart an. $\underline{\mathfrak{C}_s^3}$ bedeutet also, daß neben Spiegelebenen noch Gleitspiegelebenen mit einer Gleitrichtung quer (horizontal) zur Achse vorhanden sind.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 166.

IV.) $0,0,\frac{c}{2}$; $\bar{1},0,0$; $0,\bar{1},0$; $0,0,1$. V.) $0,0,0$; $1,0,0$; $0,\bar{1},0$; $0,0,1$.

Digonale Schraubenachsen:

$[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$. — $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$.

Spiegelebenen: $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ mit Gleitkomp. $\frac{a}{2}$;

$(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ mit Gleitkomp. $\frac{c}{2}$; $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ mit Gleitkomp. $\frac{c}{2}+\frac{b}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{m}, n, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden: Sie besitzen das allgemeine Symbol $[\![m\ o\ p]\!]$ oder $[\![m\ \frac{1}{2}\ p]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_s.

Alle übrigen Punkte sind achtzählig mit drei Freiheitsgraden und ohne Symmetriebedingung.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{2v}^{13}$

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_2^1$. Charakteristische Untergruppen: $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_s^4$. Der Koordinatenanfangspunkt liegt in einer digonalen Drehungsachse, die Schnittlinie von zwei Gleitspiegelebenen der Gleitung $\frac{c}{2}$ ist.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 166.

IV.) $0,0,0$; $\bar{1},0,0$; $0,\bar{1},0$; $0,0,1$. V.) $0,0,\frac{c}{2}$; $1,0,0$; $0,\bar{1},0$; $0,0,1$.

Digonale Drehungsachsen. $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$;
ferner $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$.

Gleitspiegelebenen:

$(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ und $(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ mit der Gleitkomp. $\frac{c}{2}$;

$(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ mit d. Gleitkomp. $\frac{a}{2}+\frac{c}{2}$; $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ mit d. Gleitkomp. $\frac{b}{2}+\frac{c}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$
$[\![\bar{m}, n, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Es gehören als vierzählige Punkte zusammen die Punkte: $[\![0, 0, p]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![0, 0, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$. Symmetriebedingung = C_2. Sie bilden Gitter von der Form

des Elementarparallelepipeds mit zentrierter Basis, zentrierten Kanten [001] und mit Innenzentrierung. Ebenso: $[\![0, \frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, 0, p]\!]$ $[\![0, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, 0, p+\frac{1}{2}]\!]$. Ferner gehören zusammen als ebenfalls vierzählig und von gleichem Symmetriegrad: $[\![\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, p]\!]$ $[\![\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, p]\!]$ $[\![\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, p+\frac{1}{2}]\!]$. Sie bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit durchgehender Flächenzentrierung.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden, ohne Symmetriebedingung, achtzählig.

Die Raumgruppen $\mathfrak{C}_{2v}^{14}$ — $\mathfrak{C}_{2v}^{17}$ lassen sich auf ein primitives Tripel $\frac{a}{2}+\frac{c}{2}, \frac{a}{2}-\frac{c}{2}$, b oder $\frac{b}{2}+\frac{c}{2}, \frac{b}{2}-\frac{c}{2}$, a zurückführen. Es sind also nicht mehr diejenigen Flächen des doppeltprimitiven Elementarparallelepipeds zentriert, welche auf den digonalen Achsen senkrecht stehen, sondern irgend zwei Seitenflächen.

Die Aufstellung ist im folgenden derart, daß die Flächen (100) zentriert sind, daß parallel (010) also eine Gruppe $\mathfrak{C}_s^3$ oder $\mathfrak{C}_s^4$ vorhanden ist.

Das primitive Tripel lautet dann $\frac{b}{2}+\frac{c}{2}, \frac{b}{2}-\frac{c}{2}$, a.

Diesen vier Raumgruppen sind die drei ersten Decktransformationsbedingungen gemeinsam:

I.) a, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) $0, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

III.) $0, \frac{b}{2}, \frac{\bar{c}}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{2v}^{14}$

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^3$. Charakteristische Untergruppen: $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^3$. Koordinatenanfangspunkt auf einer digonalen Drehungsachse.

Einfachste Decktranformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe oben.

IV.) 0, 0, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, $\bar{1}$, 0; 0, 1, 0. V.) 0, 0, 0; 1, 0, 0; 0, $\bar{1}$, 0; 0, 1, 0.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{0\frac{1}{4}}$ $[001]_{0\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$.

Spiegelebenen: $(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$; $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![m, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![\bar{m}, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p]\!]$ $[\![m, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Alle Punkte $[\![0\,0\,p]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}\,0\,p]\!]$ oder $[\![0\,\frac{1}{2}\,p]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,p]\!]$ müssen der Symmetriebedingung $= C_{2v}$ genügen. Sie besitzen die Zähligkeit zwei und bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Flächen (100).

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Alle übrigen Punkte $[\![0\,n\,p]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}\,n\,p]\!]$ oder $[\![m\,0\,p]\!]$ oder $[\![m\,\frac{1}{2}\,p]\!]$ sind gemäß der Symmetriebedingung C_s vierzählig.

Die übrigen Punktlagen besitzen keine Symmetriebedingungen. Sie sind dann mit drei Freiheitsgraden achtzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{2v}{}^{15}$

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_s{}^2$, $\mathfrak{C}_s{}^3$, $\mathfrak{C}_2{}^3$. Charakteristische Untergruppen: $\mathfrak{C}_s{}^2$, $\mathfrak{C}_s{}^3$. Spiegelebenen finden sich gemeinsam mit Gleitspiegelebenen nur bei der einen Schar vor. Drehungsachsen und Schraubenachsen sind vorhanden. Der Koordinatenanfangspunkt liegt auf einer digonalen Drehungsachse.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 169.

IV.) $0, 0, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1$. V.) $0, 0, \frac{c}{2};\ 1, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![m, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{m}, n, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$

Symmetrieelemente: Digonale Drehungsachsen und Schraubenachsen wie in $\mathfrak{C}_{2v}{}^{14}$.

Spiegelebenen: $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$.

Gleitspiegelebenen:

$(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ und $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ mit der Gleitkomp. $\frac{c}{2}$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad: Auf den digonalen Drehungsachsen. Es gehören zusammen $[\![0, 0, p]\!]$ $[\![0, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0, 0, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0, \frac{1}{2}, p]\!]$ einerseits, anderseits $[\![\frac{1}{2}, 0, p]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, 0, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p]\!]$. Sie sind also vierzählig mit der Symmetriebedingung $= C_2$ und bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Flächen (100) und zentrierten Kanten [001] und [010].

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. $[\![m\,\frac{1}{4}\,p]\!]$, $[\![m\,\frac{3}{4}\,p]\!]$. Sie sind vierzählig. Symmetriebedingung $= C_s$.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden (ohne Symmetriebedingung) achtzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{2v}^{16}$ (Siehe Fig. 84)

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_2^3$. Charakteristische Untergruppen: $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^4$. Koordinatenanfangspunkt in einer Drehungsachse.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 169.

IV.) $0, 0, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1.$ V.) $\frac{a}{2}, 0, 0;\ 1, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1.$

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{0\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$ $[001]_{0\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$.

Spiegelebenen: $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$.

Gleitspiegelebenen:

$(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}$; $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}+\frac{c}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![m, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad liegen auf den digonalen Drehungsachsen. Es gehören zusammen $[\![0\,0\,p]\!]$ $[\![0, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, 0, p]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_2. Derartige Punkte bilden ein Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Flächen (100), zentrierten Kanten [100] und mit Innenzentrierung.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden genügen den Symbolen $[\![\frac{1}{4}, n, p]\!]$ oder $[\![\frac{3}{4}, n, p]\!]$. Zähligkeit = vier. Symmetriebedingung = C_s.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden achtzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{2v}^{17}$

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_2^3$. Charakteristische Untergruppen: $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^4$. Der Koordinatenanfangspunkt liegt in einer digonalen Drehungsachse.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 169.

IV.) $0, 0, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1.$ V.) $\frac{a}{2}, 0, \frac{c}{2};\ 1, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1.$

Symmetrieelemente: Digonale Drehungsachsen und Schraubenachsen wie $\mathfrak{C}_{2v}^{16}$.

Gleitspiegelebenen: $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}+\frac{c}{2}$;

$(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}$; $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{c}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[m, n, p]$ $[m, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$ $[\bar{m}, \bar{n}, p]$ $[\bar{m}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$
$[\bar{m}+\frac{1}{2}, n, p+\frac{1}{2}]$ $[\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]$ $[m+\frac{1}{2}, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]$ $[m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad auf den digonalen Drehungsachsen. Es gehören zusammen: $[0\,0\,p]$ $[0, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{2}, 0, p+\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_2. Derartige Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit vollständiger Flächenzentrierung.

Alle übrigen Punktlagen besitzen drei Freiheitsgrade und sind achtzählig.

Das Elementarparallelepiped mit $\alpha = \beta = \gamma = 90^0$ der Raumgruppen $\mathfrak{C}_{2v}^{18}$ und $\mathfrak{C}_{2v}^{19}$ ist allseitig flächenzentriert. Ein Tripel primitiver Translationen ist daher gegeben durch $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}; \frac{a}{2}+\frac{c}{2}; \frac{b}{2}+\frac{c}{2}$.

a, b, c geben die Einheitsmaßstäbe.

Die drei ersten Decktransformationsbedingungen lauten gemeinsam:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0;\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1.$ II.) $\frac{a}{2}, 0, \frac{c}{2};\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1.$

III.) $0, \frac{b}{2}, \frac{c}{2};\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1.$

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{2v}^{18}$

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^3$. Charakteristische Untergruppen: $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_s^3$. Der Koordinatenanfangspunkt liegt in einer Drehungsachse, die zugleich Schnittlinie zweier Spiegelebenen ist.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe oben Seite 172.

IV.) $0,0,0;\ \bar{1},0,0;\ 0,\bar{1},0;\ 0,0,1.$ V.) $0,0,0;\ 1,0,0;\ 0,\bar{1},0;\ 0,0,1.$

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$;
ferner $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$.

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{\frac{1}{4}0}$ $[001]_{\frac{3}{4}0}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}$;
$[001]_{0\frac{1}{4}}$ $[001]_{0\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$.

Spiegelebenen: $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$; $(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen. $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}$ oder $\frac{c}{2}$

$(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{2}$ oder $\frac{c}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[m, n, p]$ $[m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]$ $[\bar{m}+\frac{1}{2}, n, p+\frac{1}{2}]$ $[\bar{m}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$
$[\bar{m}, \bar{n}, p]$ $[\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]$ $[m+\frac{1}{2}, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]$ $[m, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$
$[\bar{m}, n, p]$ $[\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]$ $[m+\frac{1}{2}, n, p+\frac{1}{2}]$ $[m, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$
$[m, \bar{n}, p]$ $[m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]$ $[\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]$ $[\bar{m}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad: Solche gibt es:

1.) Auf den durch die Flächenzentren gehenden, einander identischen, digonalen Drehungsachsen. Es gehören zusammen: $[0, 0, p]$ $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p]$ $[\frac{1}{2}, 0, p+\frac{1}{2}]$ $[0, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_{2v}. Derartige Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit durchgehender Flächenzentrierung.

2.) Auf den übrigen zweizähligen Achsen. Es gehören beispielsweise zusammen: $[\frac{1}{4}, 0, p]$ $[\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, p]$ $[\frac{3}{4}, 0, p+\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$ $[\frac{3}{4}, 0, p]$ $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, p]$ $[\frac{1}{4}, 0, p+\frac{1}{2}]$ $[\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$. Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = C_2. Derartige Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Flächen, zentrierten Kanten und mit Innenzentrierung.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden: Gemäß der allgemeinen Formel: $[m, 0, p]$ oder $[m, \frac{1}{2}, p]$ oder $[0, n, p]$ oder $[\frac{1}{2}, n, p]$. Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = C_s.

Alle übrigen Punktlagen besitzen mit drei Freiheitsgraden keinerlei Symmetriebedingung. Sie sind 16zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{2v}^{19}$

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_2^3$. Charakteristische Untergruppen: $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_s^4$. Der Koordinatenanfangspunkt liegt in einer digonalen Drehungsachse.

Einfachste Koordinatentransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 172.

IV.) $0, 0, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1$. V.) $\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, \frac{c}{4};\ 1, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1$.

Symmetrieelemente: Digonale Drehungsachsen und Schraubenachsen wie $\mathfrak{C}_{2v}^{18}$; es gehören aber einerseits alle Drehungsachsen zusammen, anderseits alle Schraubenachsen. (Siehe Fig. 85.)

Gleitspiegelebenen:

$(010)_{\frac{1}{8}}$ $(010)_{\frac{5}{8}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{4}+\frac{c}{4}$; $(100)_{\frac{1}{8}}$ $(100)_{\frac{5}{8}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{4}+\frac{c}{4}$;

$(010)_{\frac{3}{8}}$ $(010)_{\frac{7}{8}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{4}+\frac{c}{4}+\frac{c}{2}$; $(100)_{\frac{3}{8}}$ $(100)_{\frac{7}{8}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{4}+\frac{c}{4}+\frac{c}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{m}+\frac{1}{4}, n+\frac{1}{4}, p+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{3}{4}, n+\frac{3}{4}, p+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{3}{4}, n+\frac{1}{4}, p+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{4}, n+\frac{3}{4}, p+\frac{3}{4}]\!]$
$[\![m+\frac{1}{4}, \bar{n}+\frac{1}{4}, p+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![m+\frac{3}{4}, \bar{n}+\frac{3}{4}, p+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![m+\frac{3}{4}, \bar{n}+\frac{1}{4}, p+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{4}, \bar{n}+\frac{3}{4}, p+\frac{3}{4}]\!]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad befinden sich auf den digonalen Drehungsachsen. Es gehören beispielsweise zusammen: $[\![0, 0, p]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, 0, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, p+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, p+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, p+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, p+\frac{3}{4}]\!]$. Die Punktlagen sind mit der Symmetriebedingung C_2 achtzählig und bilden zwei ineinander gestellte flächenzentrierte Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds (gegenseitige Verschiebung $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$). (Rhombisches „Diamantgitter").

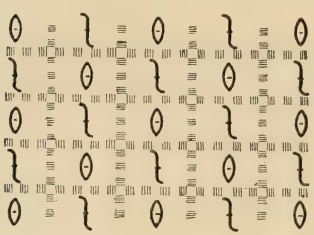


Fig. 85. $\mathfrak{C}_{2v}^{19}$ Ebene $(001)_0$. (Projektion.)

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden 16zählig.

Die Raumgruppen $\mathfrak{C}_{2v}^{20}$ — $\mathfrak{C}_{2v}^{22}$ enthalten als primitives Tripel

$$c;\ \frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2};\ \frac{a}{2}-\frac{b}{2}+\frac{c}{2}.$$

Das Elementarparallelepiped ist innenzentriert. Die drei ersten Decktransformationsbedingungen lauten gemeinsam:

I.) $= \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2};\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1.$ II.) $= \frac{a}{2}, \frac{\bar{b}}{2}, \frac{c}{2};\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1.$

III.) $= 0, 0, c;\ 1, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, 1.$

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{2v}^{20}$

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^3$. Charakteristische Untergruppen: $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_s^3$. Der Koordinatenanfangspunkt liegt in einer digonalen Drehungsachse.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe oben.

IV.) $0, 0, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1.$ V.) $0, 0, 0;\ 1, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1.$

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$.

Spiegelebenen: $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ und $(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen:

$(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ und $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ mit der Gleitkomp. $\frac{a}{2}+\frac{c}{2}$ bezw. $\frac{b}{2}+\frac{c}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[m, n, p]$ $[m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$ $[\bar{m}, \bar{n}, p]$ $[\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$
$[\bar{m}, n, p]$ $[\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$ $[m, \bar{n}, p]$ $[m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad liegen auf den digonalen Drehungsachsen. Symmetriebedingung $= C_{2v}$. Zähligkeit $= 2$. Sie bilden Gitter von der Form des Elementarpallelepipeds mit Innenzentrierung.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden: Punkte: $[m, 0, p]$ oder $[m, \frac{1}{2}, p]$ oder $[0, n, p]$ oder $[\frac{1}{2}, n, p]$. Derartige Punktlagen sind gemäß der Symmetriebedingung $= C_s$ vierzählig.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden achtzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{2v}^{21}$

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_2^3$. Charakteristische Untergruppen: $\mathfrak{F}_s^4$, $\mathfrak{F}_s^4$.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 174.

IV.) $0, 0, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$. V.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $1, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$.

Digonale Drehungsachsen und Schraubenachsen wie $\mathfrak{C}_{2v}^{20}$.

Gleitspiegelebenen:

$(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ und $(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ mit der Gleitkomp. $\frac{c}{2}$;

$(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ mit der Gleitkomp. $\frac{a}{2}$; $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ mit der Gleitkomp. $\frac{b}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[m, n, p]$ $[m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$ $[\bar{m}, \bar{n}, p]$ $[\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$
$[\bar{m}, n, p+\frac{1}{2}]$ $[\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]$ $[m, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]$ $[m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad auf den digonalen Drehungsachsen. Es gehören beispielsweise zusammen:

$[0, 0, p]$ $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$ $[0, 0, p+\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p]$ einerseits,
$[\frac{1}{2}, 0, p]$ $[0, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{2}, 0, p+\frac{1}{2}]$ $[0, \frac{1}{2}, p]$ anderseits.

Diese Punktlagen sind somit gemäß der Symmetriebedingung $= C_2$ vierzählig und bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung, zentrierten Basisflächen und zentrierten Kanten. [001]. Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden achtzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{2v}^{22}$

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_2^3$. Charakteristische Untergruppen: $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{F}_s^4$. Der Koordinatenanfangspunkt liege in einer Drehungsachse.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 174.

IV.) $0, 0, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$. V.) $0, \frac{b}{2}, 0$; $1, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$; $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$.

Spiegelebenen: $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$.

Gleitspiegelebenen: $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}+\frac{c}{2}$;

$(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{2}$; $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkom. $\frac{c}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![\bar{m}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad liegen auf den digonalen Drehungsachsen. Es gehören zusammen: $[\![0, 0, p]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0, \frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, 0, p+\frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_2. Die Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung, (010)- und [010]-Zentrierung.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. $[\![m, \frac{1}{4}, p]\!]$ oder $[\![m, \frac{3}{4}, p]\!]$. Derartige Punktlagen sind vierzählig. Symmetriebedingung = C_s.

Alle übrigen Punkte sind mit drei Freiheitsgraden achtzählig.

$\mathfrak{V}$. Rhombisch hemiedrische Klasse (Rhombisch bisphenoidische Klasse)

Drei Scharen verschiedenartiger digonaler Achsen stehen gegenseitig aufeinander senkrecht. Zwei bedingen die dritte.

Die Perioden (Identitätsabstände) auf den digonalen Achsen geben die Einheitsmaßstäbe a, b, c des Elementarparallelepipeds an, das entweder einfach-, doppelt- oder vierfachprimitiv ist.

Die Raumgruppen $\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V}_4$ besitzen als primitives Tripel a, b, c, so daß die drei ersten Decktransformationsbedingungen lauten:

I.) a, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) 0, b, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.
III.) 0, 0, c; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Raumgruppe $\mathfrak{V}^1$. (Siehe Fig. 86)

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^1$. Charakteristische Untergruppen[1]): $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^1$. +. Alle Achsen sind Drehungsachsen. Der Koordinatenanfangspunkt liegt im Schnittpunkt dreier digonaler Drehungsachsen.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III. siehe oben.

IV.) 0, 0, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, $\bar{1}$, 0; 0, 0, 1. V.) 0, 0, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

---

[1]) Das Zeichen + bedeutet, daß die Achsen sich schneiden, das Zeichen ×, daß die gegebenen Achsen sich kreuzen.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$; $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{1}{2}0}$; $[001]_{0\frac{1}{2}}$; ${}^{00}[010]$; ${}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[010]$; ${}^{\frac{1}{2}0}[010]$; ${}^{0\frac{1}{2}}[010]$; $[100]^{00}$; $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[100]^{\frac{1}{2}0}$; $[100]^{0\frac{1}{2}}$.

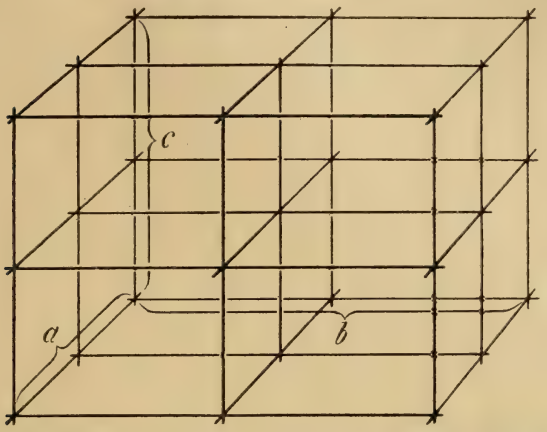


Fig. 86. $\mathfrak{B}^1$ Digonale Drehungsachsen in einem Elementarparallelepiped.

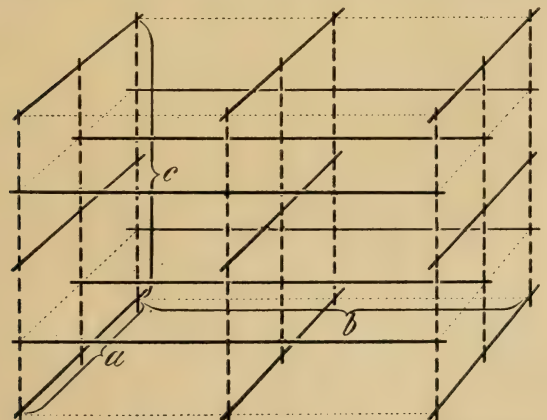


Fig. 87. $\mathfrak{B}^2$ Digonale Drehungsachsen (ausgezogene Linien) und Schraubenachsen (gestrichelt) in einem Elementarparallelepiped.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, n, \bar{p}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad. Achterlei nämlich:

$[\![0\,0\,0]\!]$; $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$; $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$; $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$; $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$; $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$; $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$; $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$.

Die Symmetrie jeder dieser einzähligen Punktlagen ist gegeben durch = V. Die Punktlagen bilden einfache Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds.

Punktlagen auf je einer digonalen Drehungsachse besitzen einen Freiheitsgrad. Sie sind zweizählig. Symmetriebedingung = C_2. Beispielsweise: [[0 0 p]] [[0 0 $\bar{p}$]] und so fort.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden vierzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{B}^2$ (Siehe Fig. 87)

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^2$. Charakteristische Untergruppen: $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^1$. ×. Diejenige Achsenschar, die nur Schraubenachsen enthält, soll der c-Achsenrichtung parallel gestellt werden. Der Koordinatenanfangspunkt wird auf eine Drehungsachse [100] in den Schnittpunkt mit der Schraubenachse [001] gelegt.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 176.

IV.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$. V.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

Digonale Drehungsachsen:

${}^0{}_4^1[010]$ ${}^0{}_4^3[010]$; ${}_2^1{}_4^1[010]$ ${}_2^1{}_4^3[010]$. $[100]^{00}$ $[100]^{0\frac{1}{2}}$; $[100]^{\frac{1}{2}0}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{00}$; $[001]_{0\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{1}{2}0}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

[[m, n, p]] [[$\bar{m}$, $\bar{n}$, p + $\frac{1}{2}$]] [[$\bar{m}$, n, $\bar{p}$ + $\frac{1}{2}$]] [[m, $\bar{n}$, $\bar{p}$]]

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad auf den digonalen Drehungsachsen. Beispielsweise: [[m, 0, 0]] dazu gehört [[$\bar{m}$, 0, $\frac{1}{2}$]] usw. Symmetriebedingung = C_2. Zähligkeit = 2.

Die übrigen Punkte sind mit drei Freiheitsgraden vierzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{B}^3$ (Siehe Fig. 88)

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^1$. Charakteristische Untergruppen: $\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^2$. +. Die ausgezeichnete Achsenrichtung, parallel welcher nur Drehungsachsen auftreten, sei c-Achse. Auf ihr liege in einer Ebene der Schraubenachsen der Koordinatenanfangspunkt.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 176.

IV.) $0, 0, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$. V.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[001]_{0\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$.

Digonale Schraubenachsen:

${}_4^1{}^0[010]$ ${}_4^3{}^0[010]$; ${}_4^1{}_2^1[010]$ ${}_4^3{}_2^1[010]$. $[100]^{\frac{1}{4}0}$ $[100]^{\frac{3}{4}0}$; $[100]^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{m} + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![m + \frac{1}{2}, \bar{n} + \frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$.

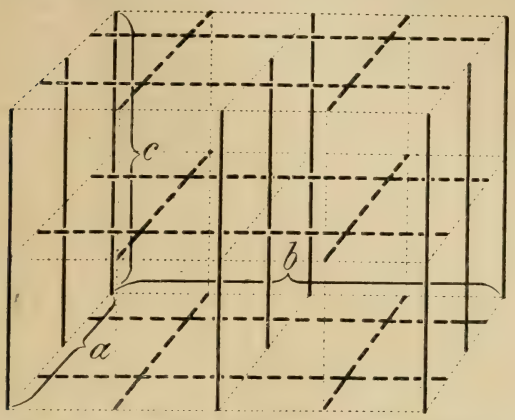


Fig. 88. $\mathfrak{B}^3$ Digonale Achsen in einem Elementarparallelepiped.

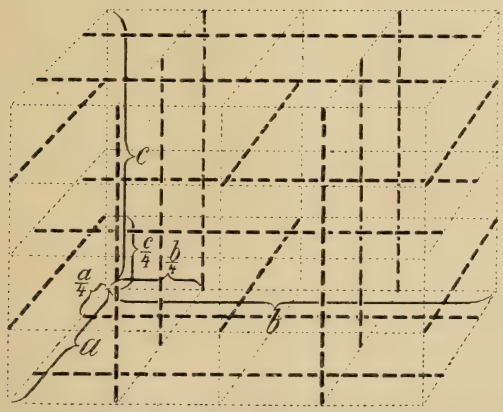


Fig. 89. $\mathfrak{B}^4$ Digonale Achsen in einem Elementarparallelepiped.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad befinden sich nur auf den digonalen Drehungsachsen [001]. Es gehören beispielsweise zusammen $[\![0, 0, p]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ einerseits, $[\![0, \frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, 0, \bar{p}]\!]$ anderseits.

Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung = C_2.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden vierzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{B}^4$ (Siehe Fig. 89)

Untergruppen: $\mathfrak{C}^1$, $\mathfrak{C}_2{}^2$, $\mathfrak{C}_2{}^2$, $\mathfrak{C}_2{}^2$. Charakteristische Untergruppen: $\mathfrak{C}_2{}^2$, $\mathfrak{C}_2{}^2$. $\times$. Alle digonalen Achsen sind Schraubenachsen.

Der Koordinatenanfangspunkt wird am besten so gewählt, daß er von je drei verschiedenartigen Schraubenachsen um $\frac{1}{4}$ Kantenlänge des Elementarparallelepipeds entfernt ist.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 176.

IV.) $0, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}; \bar{1}, 0, 0; 0, \bar{1}, 0; 0, 0, 1.$ V.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0; \bar{1}, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, \bar{1}.$

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{0\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$; $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$ $[001]_{0\frac{3}{4}}$. $\frac{1}{4}{}^0[010]$ $\frac{3}{4}{}^{\frac{1}{2}}[010]$; $\frac{3}{4}{}^0[010]$ $\frac{1}{4}{}^{\frac{1}{2}}[010]$. $[100]^{0\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$; $[100]^{0\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$.

Alle übrigen Punkte sind ohne Symmetriebedingung mit drei Freiheitsgraden vierzählig.

Die Raumgruppen $\mathfrak{B}^5$ und $\mathfrak{B}^6$ besitzen als Translationsgruppe das Elementarparallelepiped, dessen ein Flächenpaar zentriert ist. Dieses Flächenpaar wird zu Basisflächen gewählt, so daß die ausgezeichnete Achsenschar parallel der c-Achse liegt. Ein primitives Tripel ist dann von der Form $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}, \frac{a}{2}-\frac{b}{2}$, c, so daß die beiden Gruppen gemeinsamen Decktransformationsbedingungen lauten:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.$ II.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.$

III.) $0, 0, c; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.$

Raumgruppe $\mathfrak{B}^5$ (Siehe Fig. 90)

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2{}^3$, $\mathfrak{C}_2{}^3$, $\mathfrak{C}_2{}^2$. Charakteristische Untergruppen: $\mathfrak{C}_2{}^3$, $\mathfrak{C}_2{}^2$. Koordinatenanfangspunkt auf einer Drehungsachse [100] im Schnittpunkt mit einer Schraubenachse [001].

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe oben.

IV.) $0, 0, \frac{c}{2}; \bar{1}, 0, 0; 0, \bar{1}, 0; 0, 0, 1.$ V.) $0, 0, \frac{c}{2}; \bar{1}, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, \bar{1}.$

Digonale Drehungsachsen:

$[100]^{00}$ $[100]^{\frac{1}{2}0}$ $[100]^{0\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$. $^0\frac{1}{4}[010]$ $^0\frac{3}{4}[010]$ $^{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}[010]$ $^{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}[010]$.

Digonale Schraubenachsen:

$[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[001]_{0\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$. $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$.

$[100]^{\frac{1}{4}0}$ $[100]^{\frac{3}{4}0}$ $[100]^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}$. $^{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}[010]$ $^{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}[010]$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[m, n, p]$, $[m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]$, $[\bar{m}, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]$ $[\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$
$[\bar{m}, n, \bar{p}+\frac{1}{2}]$ $[\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]$ $[m, \bar{n}, \bar{p}]$ $[m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]$

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad auf den digonalen Drehungsachsen. Es gehören zusammen: $[m, 0, 0]$ $[m+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0]$ $[\bar{m}, 0, \frac{1}{2}]$ $[\bar{m}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ einerseits, $[0, n, \frac{1}{4}]$ $[\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$ $[0, \bar{n}, \frac{3}{4}]$ $[\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ anderseits. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_2. Alle übrigen Punkte sind mit drei Freiheitsgraden achtzählig.

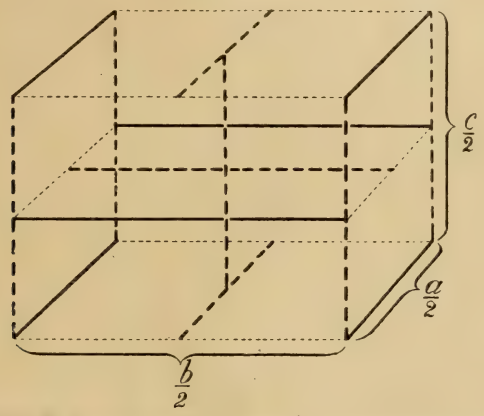


Fig. 90. $\mathfrak{B}^5$ Digonale Achsen in einem $\frac{1}{8}$-Elementarparallelepiped.

Raumgruppe $\mathfrak{B}^6$ (Fig. 91)

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^1$. Charakteristische Untergruppen: $\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^1$. Die Achsenschar, die nur Drehungsachsen enthält, soll die c-Richtung angeben. Koordinatenanfangspunkt im Schnittpunkt dreier Drehungsachsen.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe oben.

IV.) $0, 0, 0; \bar{1}, 0, 0; 0, \bar{1}, 0; 0, 0, 1$. V.) $0, 0, 0; \bar{1}, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, \bar{1}$.

Digonale Drehungsachsen:

$[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[001]_{0\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$. $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$.

$^{00}[010]$ $^{\frac{1}{2}0}[010]$; $^{0\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[010]$. $[100]^{00}$ $[100]^{\frac{1}{2}0}$; $[100]^{0\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen:

$^{\frac{1}{4}0}[010]$ $^{\frac{3}{4}0}[010]$; $^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}[010]$. $[100]^{\frac{1}{4}0}$ $[100]^{\frac{3}{4}0}$; $[100]^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$
$[\![\bar{m}, n, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$, $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad: $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$, ferner $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$, ferner $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$, ferner $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$. Somit viererlei Punkte ohne Freiheitsgrad mit der Zähligkeit 2 und der Symmetriebedingung V.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad: Beliebige Lage auf einer der digonalen Drehungsachsen.

Beispielsweise: $[\![0, 0, p]\!]$ zusammengehörig mit $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![0, 0, \bar{p}]\!]$;
$[\![m, 0, 0]\!]$ zusammengehörig mit $[\![m+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0]\!]$ $[\![\bar{m}, 0, 0]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0]\!]$
$[\![\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, p]\!]$ zusammengehörig mit $[\![\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, p]\!]$ $[\![\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \bar{p}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \bar{p}]\!]$ und so fort. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_2. Die übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden achtzählig.

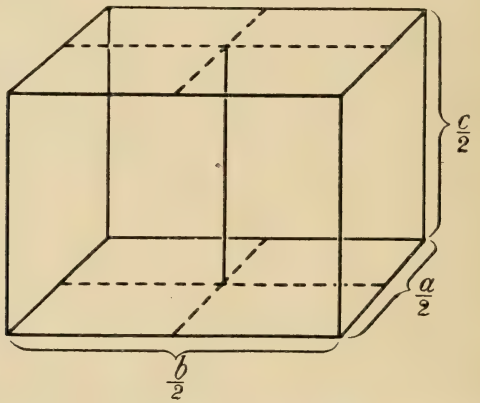


Fig. 91. $\mathfrak{B}^6$ Digonale Achsen in einem $\frac{1}{8}$-Elementarparallelepiped.

Raumgruppe $\mathfrak{B}^7$ (Siehe Fig. 92)

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2{}^3$, $\mathfrak{C}_2{}^3$, $\mathfrak{C}_2{}^3$. Charakteristische Untergruppen[1]): $\mathfrak{C}_2{}^3$, $\mathfrak{C}_2{}^3$. $+$ $\dot{+}$. Ein primitives Tripel von Translationen ist hier gegeben durch $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$, $\frac{a}{2}+\frac{c}{2}$, $\frac{b}{2}+\frac{c}{2}$. Das Elementarparallelepiped ist also vierfachprimitiv, allseitig flächenzentriert. Koordinatenanfangspunkt ist Schnittpunkt dreier digonaler Drehungsachsen.

[1]) Das senkrecht stehende Kreuz bezeichnet Schneiden der Achsen. Es schneiden sich Drehungsachsen ($+$) und Drehungsachsen mit Schraubenachsen ($\dot{+}$).

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) $\frac{a}{2}, 0, \frac{c}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

III.) $0, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. IV.) 0, 0, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, $\bar{1}$, 0; 0, 0, 1.

V.) 0, 0, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

Digonale Drehungsachsen:

$[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$;

$[100]^{00}$ $[100]^{\frac{1}{2}0}$ $[100]^{0\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[100]^{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$;

${}^{00}[010]$ ${}^{\frac{1}{2}0}[010]$ ${}^{0\frac{1}{2}}[010]$ ${}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[010]$; ${}^{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}[010]$ ${}^{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}[010]$ ${}^{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}[010]$ ${}^{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}[010]$.

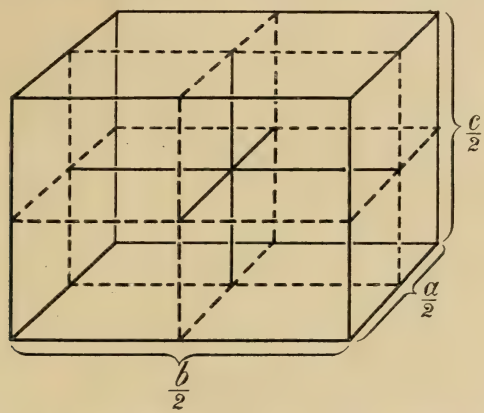


Fig. 92. $\mathfrak{B}^7$ Digonale Achsen in einem $\frac{1}{8}$-Elementarparallelepiped.

Digonale Schraubenachsen:

$[001]_{\frac{1}{4}0}$ $[001]_{\frac{3}{4}0}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}$; $[001]_{0\frac{1}{4}}$ $[001]_{0\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$;

$[100]^{\frac{1}{4}0}$ $[100]^{\frac{3}{4}0}$ $[100]^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}$; $[100]^{0\frac{1}{4}}$ $[100]^{0\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$;

${}^{0\frac{1}{4}}[010]$ ${}^{0\frac{3}{4}}[010]$ ${}^{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}[010]$ ${}^{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}[010]$; ${}^{\frac{1}{4}0}[010]$ ${}^{\frac{3}{4}0}[010]$ ${}^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}[010]$ ${}^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}[010]$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![\bar{m}, n, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

Viererlei nämlich: $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ einerseits,

$[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ anderseits;

ferner $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ einerseits,
$[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ anderseits.

Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = V. Die Punktlagen bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Flächen.

Einen Freiheitsgrad besitzen beliebige Punktlagen auf einer der 24 digonalen Achsen. Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = C_2. Die übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden 16zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{B}^8$ (Siehe Fig. 93)

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2{}^3$, $\mathfrak{C}_2{}^3$, $\mathfrak{C}_2{}^3$. Charakteristische Untergruppen: $\mathfrak{C}_2{}^3$, $\mathfrak{C}_2{}^3$. $+\ +$. Ein primitives Translationstripel ist für die Raumgruppen $\mathfrak{B}^8$ und $\mathfrak{B}^9$ gegeben in $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}$, $\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+\frac{c}{2}$, c. Das

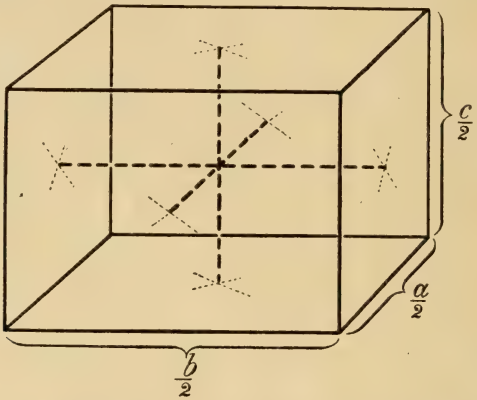


Fig. 93. $\mathfrak{B}^8$ Digonale Achsen in einem $\frac{1}{8}$-Elementarparallelepiped.

Elementarparallelepiped ist doppeltprimitiv und innenzentriert. Koordinatenanfangspunkt im Schnittpunkt dreier digonaler Drehungsachsen.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) $\frac{a}{2}, \frac{\bar{b}}{2}, \frac{c}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

III.) 0, 0, c; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. IV.) 0, 0, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, $\bar{1}$, 0; 0, 0, 1.

V.) 0, 0, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.
$[100]^{00}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[100]^{\frac{1}{2}0}$ $[100]^{0\frac{1}{2}}$. $^{00}[010]$ $^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[010]$; $^{\frac{1}{2}0}[010]$ $^{0\frac{1}{2}}[010]$.

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$.
$[100]^{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$. $^{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}[010]$ $^{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}[010]$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{m}, n, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrade.

Viererlei, nämlich: $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$, ferner $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$,
ferner $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$, ferner $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$.

Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung = V. Sie bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad finden sich bei beliebiger Lage auf irgend einer der 12 digonalen Drehungsachsen. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_2.

Die übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden achtzählig.

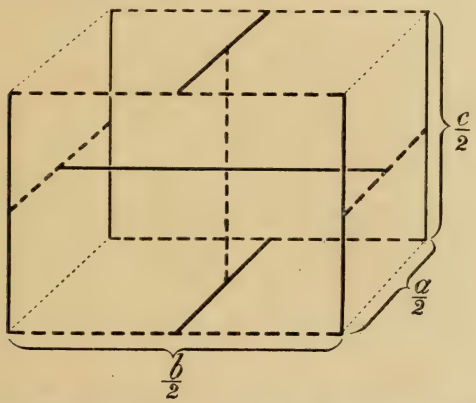


Fig. 94. $\mathfrak{B}^9$ Digonale Achsen in einem $\frac{1}{8}$-Elementarparallelepiped.

Raumgruppe $\mathfrak{B}^9$ (Siehe Fig. 94)

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2{}^3$, $\mathfrak{C}_2{}^3$, $\mathfrak{C}_2{}^3$. Charakteristische Untergruppen: $\mathfrak{C}_2{}^3$, $\mathfrak{C}_2{}^3$. $\times\times+$. Gleiches primitives Tripel der Translationen wie $\mathfrak{B}^8$. Koordinatenanfangspunkt in einer Drehungsachse $\parallel$ c im Schnittpunkt mit einer Schraubenachse $\parallel$ b.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) wie $\mathfrak{B}^8$.

IV.) $0, 0, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$. V.) $0, \frac{b}{2}, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$;
$[100]^{\frac{1}{4}0}$ $[100]^{\frac{3}{4}0}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}$; $\frac{1}{4}\frac{1}{4}[010]$ $\frac{3}{4}\frac{1}{4}[010]$ $\frac{3}{4}\frac{3}{4}[010]$ $\frac{1}{4}\frac{3}{4}[010]$.

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$; $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$;
$[100]^{0\,\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}}$; $[100]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}}$ $[100]^{0\,\frac{3}{4}}$; $^{00}[010]$ $^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}[010]$; $^{0\,\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{1}{2}\,0}[010]$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{m}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad bei beliebiger Lage auf einer der 12 digonalen Achsen. Es gehören beispielsweise zusammen:

$[\![0, 0, p]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0, \frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, 0, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$,

ferner $[\![m, \frac{1}{4}, 0]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, \frac{3}{4}, 0]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}]\!]$,

oder anderseits $[\![\frac{1}{4}, n, \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}, n+\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}, \bar{n}, \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]\!]$.

Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_2.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden achtzählig.

In dieser Gruppe ergibt auch eine Koordinatenverschiebung um $\frac{a}{4}$ relativ einfache Werte. Der Nullpunkt besitzt dann selbst kein Symmetrieelement, ist aber von Drehungsachsen aller drei Richtungen um $\frac{a}{4}$ bezw. $\frac{b}{4}$ oder $\frac{c}{4}$ entfernt. Von Bedeutung wird eine derartige Nullpunktswahl für das reguläre System, weil durch diesen Punkt dann trigonale Achsen gehen. Die Koordinatenverschiebung ist leicht durchzuführen.

$\mathfrak{V}_h$. Rhombisch holoedrische Klasse (Rhombisch bipyramidale Klasse)

Sie enthält die Symmetrieelemente der rhombisch hemimorphen und rhombisch hemiedrischen Klasse gleichzeitig.

Zur Charakterisierung und Ableitung genügen als unabhängige Elemente zwei aufeinander senkrecht stehende Achsenscharen und eine Symmetrieebenenschar, oder zwei aufeinander senkrecht stehende Symmetrieebenenscharen und eine der Schnittlinie nicht parallele Achsenschar oder zwei aufeinander senkrecht stehende Achsen- bezw. Symmetrieebenenscharen mit einer Symmetriezentrumsschar.

Es sind immer drei einfache Translationen a, b, c vorhanden, die aufeinander senkrecht stehen, Achsenrichtungen bezeichnen und ein einfach-, doppelt- oder vierfachprimitives Parallelepiped bestimmen. Dieses Parallelepiped ist unser Elementarparallelepiped; a, b, c werden zu Einheitsmaßstäben. $\alpha = \beta = \gamma = 90^0$.

Für die Gruppen $\mathfrak{V}_h^1$—$\mathfrak{V}_h^{16}$ ist das Elementarparallelepiped einfachprimitiv. a, b, c bilden ein primitives Translationentripel.

Die drei ersten Decktransformationsbedingungen lauten daher gemeinsam:

I.) a, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) 0, b, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.
III.) 0, 0, c; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Raumgruppe $\mathfrak{B}_h^1$ (Siehe Fig. 95)

Sie enthält als Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^1$. Ferner $\mathfrak{B}^1$, $\mathfrak{C}_{2v}^1$, $\mathfrak{C}_{2v}^1$, $\mathfrak{C}_{2v}^1$, $\mathfrak{C}_{2h}^1$, $\mathfrak{C}_{2h}^1$, $\mathfrak{C}_{2h}^1$. Charakteristische Untergruppen z. B. $\mathfrak{B}^1$ und $\mathfrak{C}_s^1$ (in Lage 0) (siehe Seite 90). Koordinatenanfangspunkt: ein Symmetriezentrum.

Einfachste Decktransformationsbedingungen[1]):

I.)—III.) siehe oben. IV.) 0, 0, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, $\bar{1}$, 0; 0, 0, 1.

V.) 0, 0, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, $\bar{1}$. VI.) 0, 0, 0; 1, 0, 0; 0, $\bar{1}$, 0; 0, 0, 1.

Symmetriezentren:

$[\![0\,0\,0]\!]$; $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$; $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$; $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$; $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$; $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$; $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$; $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$; $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{1}{2}0}$; $[001]_{0\frac{1}{2}}$.
$^{00}[010]$; $^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[010]$; $^{\frac{1}{2}0}[010]$; $^{0\frac{1}{2}}[010]$. $[100]^{00}$; $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[100]^{\frac{1}{2}0}$; $[100]^{0\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(001)_0$; $(001)_{\frac{1}{2}}$; $(010)_0$; $(010)_{\frac{1}{2}}$; $(100)_0$; $(100)_{\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, n, \bar{p}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![m, n, \bar{p}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p]\!]$ $[\![m, n, p]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad: Es gibt achterlei derartige Punktlagen. Jede entspricht einem der oben hingeschriebenen Symmetriezentren. Zähligkeit = 1. Symmetriebedingung = V_h. Diese Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad: Sie liegen auf irgend einer der digonalen Drehungsachsen. Zu $[\![0\,0\,p]\!]$ gehört beispielsweise $[\![0\,0\,\bar{p}]\!]$. Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung = C_{2v}.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden: Sie liegen auf irgend einer der Spiegelebenen. Es gehören zu $[\![m\,0\,p]\!]$ beispielsweise $[\![\bar{m}\,0\,p]\!]$ $[\![m\,0\,\bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}\,0\,\bar{p}]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_s.

Alle übrigen Punktlagen sind ohne Symmetriebedingung mit drei Freiheitsgraden achtzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{B}_h^2$ (Siehe Fig. 96)

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^1$. Ferner $\mathfrak{B}^1$, $\mathfrak{C}_{2v}^{10}$ $\mathfrak{C}_{2v}^{10}$ $\mathfrak{C}_{2v}^{10}$, $\mathfrak{C}_{2h}^4$ $\mathfrak{C}_{2h}^4$ $\mathfrak{C}_{2h}^4$ $\mathfrak{C}_{2h}^4$. Charakteristische Untergruppen:

[1]) Es werden hier die voneinander unabhängigen Bedingungen hingeschrieben, die zugleich Untergruppen der Hemimorphie und Hemiedrie bestimmen. Die Symmetriezentrumsbedingung, sowie die anderen Decktransformationsbedingungen ergeben sich stets leicht durch Kombination.

$\mathfrak{V}^1$, $\mathfrak{C}_s^2$ in Lage M. Der Koordinatenanfangspunkt falle in den Schnittpunkt dreier digonaler Drehungsachsen.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 187. IV.) 0, 0, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, $\bar{1}$, 0; 0, 0, 1.

V.) 0, 0, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, $\bar{1}$. VI.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$; 1, 0, 0; 0, $\bar{1}$, 0; 0, 0, 1.

Symmetriezentren: einerseits $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$,
anderseits $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$.

Digonale Drehungsachsen: wie $\mathfrak{V}_h^1$, doch je zwei zusammengehörig.

Gleitspiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$;

$(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}+\frac{c}{2}$; $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{2}+\frac{c}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, n, \bar{p}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$

$[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

I.) $[\![0\ 0\ 0]\!]$ mit $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$; $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ mit $[\![0\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$; $[\![\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$ mit $[\![0\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$; $[\![0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$ mit $[\![\frac{1}{2}\ 0\ 0]\!]$. Viererlei Punktlagen. Zähligkeit jeweilen = 2. Symmetriebedingung = V. Sie bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung.

II.) Zweierlei Punktlagen entsprechend den oben hingeschriebenen Symmetriezentren (einerseits und anderseits). Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_i. Sie bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit allseitiger Flächenzentrierung.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad: Beliebige Lage auf einer der 12 digonalen Drehungsachsen. Beispielsweise gehört zu $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![0, 0, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0, 0, p+\frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_2.

Alle übrigen Punktlagen besitzen mit drei Freiheitsgraden keinerlei Symmetriebedingung. Sie sind achtzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{V}_h^3$ (Siehe Fig. 97)

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^1$. Ferner $\mathfrak{V}^1$, $\mathfrak{C}_{2v}^3$ $\mathfrak{C}_{2v}^4$ $\mathfrak{C}_{2v}^4$, $\mathfrak{C}_{2h}^1$ $\mathfrak{C}_{2h}^4$ $\mathfrak{C}_{2h}^4$. Charakteristische Untergruppen beispielsweise $\mathfrak{V}^1$, $\mathfrak{C}_s$ in Lage M. Die Spiegelebenen mögen parallel (001) liegen. Koordinatenanfangspunkt im Schnittpunkt dreier digonaler Drehungsachsen.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 187.

IV.) und V.) wie $\mathfrak{V}_h^1$ und $\mathfrak{V}_h^2$. VI.) 0, 0, $\frac{c}{2}$; 1, 0, 0; 0, $\bar{1}$, 0; 0, 0, 1.

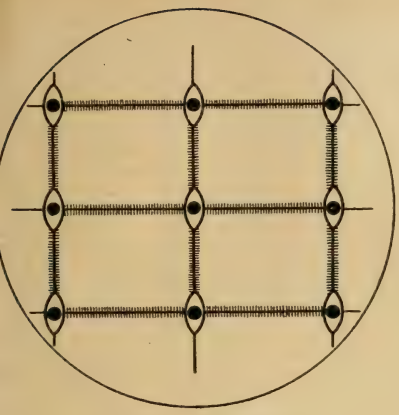


Fig. 95. $\mathfrak{B}_h^1$. Ebene $(001)_0$
(als Spiegelebene durch den großen ausgezogenen Kreis markiert) mit den darin liegenden und darauf senkrecht stehenden Symmetrieelementen.
(Ausgefüllte kleine schwarze Kreise = Symmetriezentren in der Ebene.)

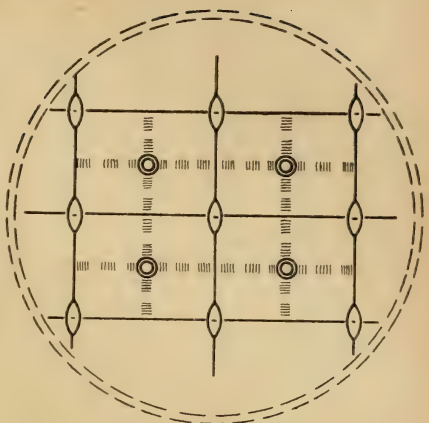


Fig. 96. $\mathfrak{B}_h^2$. Ebene $(001)_0$
mit den darin liegenden und darauf senkrecht stehenden Symmetrieelementen.
Die zwei großen durchbrochenen Kreise stellen die Gleitspiegelebenen parallel $(001)_0$ in $+\frac{1}{4}$ bezw. $-\frac{1}{4}$ Höhenabstand dar, die kleinen Doppelkreise in denselben Abständen befindliche Symmetriezentren.

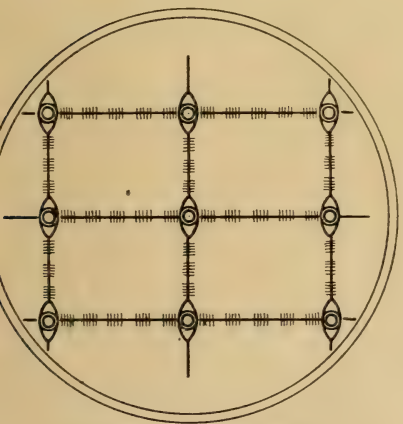


Fig. 97. $\mathfrak{B}_h^3$. Ebene $(001)_0$.
Die großen ausgezogenen Doppelkreise stellen zwei Spiegelebenen (001) in $+\frac{1}{4}$ bezw. $-\frac{1}{4}$ Höhenabstand dar. Die Symmetriezentren liegen auf digonalen Drehungsachsen in diesen Spiegelebenen.

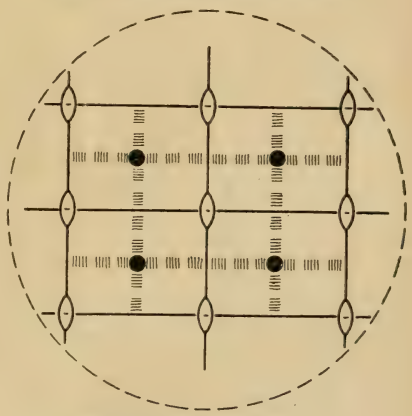


Fig. 98. $\mathfrak{B}_h^4$. Ebene $(001)_0$.
Der große durchbrochene Kreis gibt an, daß $(001)_0$ Gleitspiegelebene ist.
Im übrigen gleiche Symbolik wie in den vorhergehenden Figuren.

Symmetriezentren:

$[\![0\,0\,\tfrac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,0\,\tfrac{3}{4}]\!]$; $[\![\tfrac{1}{2}\,0\,\tfrac{1}{4}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}\,0\,\tfrac{3}{4}]\!]$; $[\![0\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{4}]\!]$; $[\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{4}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{4}]\!]$.

Digonale Drehungsachsen wie $\mathfrak{B}_h^1$, doch zum Teil je zwei zusammengehörig.

Spiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$, $(001)_{\frac{3}{4}}$.

Gleitspiegelebenen: $(100)_0$, $(100)_{\frac{1}{2}}$; $(010)_0$, $(010)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{c}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![m, n, \bar{p}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$

$[\![\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![m, n, \bar{p}+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, n, p+\tfrac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

I.) $[\![000]\!]$ mit $[\![00\tfrac{1}{2}]\!]$; $[\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,0]\!]$ mit $[\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}]\!]$; $[\![\tfrac{1}{2}\,0\,\tfrac{1}{2}]\!]$ mit $[\![\tfrac{1}{2}\,00]\!]$; $[\![0\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}]\!]$ mit $[\![0\,\tfrac{1}{2}\,0]\!]$. Viererlei Punktlagen. Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung = V. Diese Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Kanten [001].

II.) Viererlei Punktlagen, entsprechend den viererlei Kombinationen von je zwei Symmetriezentren, wie sie oben hingeschrieben sind. Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung = C_{2h}. Gitter konform denen von I.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad: Beliebige Lage auf irgend einer der 12 digonalen Drehungsachsen. Beispielsweise gehören zusammen: $[\![0, 0, p]\!]$ $[\![0, 0, \bar{p}]\!]$ $[\![0, 0, \bar{p}+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![0, 0, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ einerseits, oder $[\![m, 0, 0]\!]$ $[\![\bar{m}, 0, 0]\!]$ $[\![\bar{m}, 0, \tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![m, 0, \tfrac{1}{2}]\!]$ anderseits. Daraus ist auch die Achsenvertauschung erkennbar. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_2.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden: $[\![m, n, \tfrac{1}{4}]\!]$ oder $[\![m, n, \tfrac{3}{4}]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_s.

Die übrigen Punktlagen sind ohne Symmetriebedingung (mit drei Freiheitsgraden) achtzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{B}_h^4$ (Siehe Fig. 98)

Untergruppen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^1$. Ferner $\mathfrak{B}^1$, $\mathfrak{C}_{2v}^8$ $\mathfrak{C}_{2v}^6$ $\mathfrak{C}_{2v}^6$, $\mathfrak{C}_{2h}^4$ $\mathfrak{C}_{2h}^4$ $\mathfrak{C}_{2h}^4$. Charakteristische Untergruppen zum Beispiel $\mathfrak{B}^1$ $\mathfrak{C}_s^2$ in Lage 0. Der Koordinatenanfangspunkt liege im Schnittpunkt dreier digonaler Drehungsachsen. Die Untergruppe $\mathfrak{C}_{2v}^8$ der c-Achse zugehörig.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 187.

IV.) und V.) wie $\mathfrak{B}_h^1$. VI.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0$; $1, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$.

Symmetriezentren: $[\![\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\tfrac{1}{4}\,\tfrac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\tfrac{3}{4}\,\tfrac{3}{4}\,0]\!]$ einerseits,

$[\![\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{4}\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\tfrac{3}{4}\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{2}]\!]$ anderseits.

Digonale Drehungsachsen: wie $\mathfrak{B}_h^1$, doch in besonderer Weise zusammengehörig.

Gleitspiegelebenen: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$;

$(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}$; $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, n, \bar{p}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$

$[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

I.) Viererlei Punktlagen, wie $[\![000]\!]$ mit $[\![\frac{1}{2}\frac{1}{2}0]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}00]\!]$ mit $[\![0\frac{1}{2}0]\!]$ oder $[\![00\frac{1}{2}]\!]$ mit $[\![\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}]\!]$ oder $[\![0\frac{1}{2}\frac{1}{2}]\!]$ mit $[\![\frac{1}{2}0\frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit jeweilen $= 4$. Symmetriebedingung $=$ V. Die Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Basisflächen.

II.) Zweierlei vierzählige Punkltlagen, entsprechend den zweierlei Arten von Symmetriezentren. Symmetriebedingung $= C_i$. Sie bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Basisflächen und zentrierten Kanten des Basisrechteckes. Koordinatenwerte siehe oben.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Bei beliebiger Lage auf je einer der 12 digonalen Drehungsachsen ist die Zähligkeit $= 4$. Symmetriebedingung $= C_2$. Es gehören beispielsweise zusammen: $[\![0, 0, p]\!]$ $[\![0, 0, \bar{p}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $]\!]\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p]\!]$ oder anderseits $[\![0, n, 0]\!]$ $[\![0, \bar{n}, 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, 0]\!]$. Daraus läßt sich wiederum die Achsenzusammengehörigkeit erkennen.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden ohne Symmetriebedingung achtzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{B}_h^5$

Untergruppen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^1$. Ferner $\mathfrak{V}^2$, $\mathfrak{C}_{2v}^2$ $\mathfrak{C}_{2v}^1$ $\mathfrak{C}_{2v}^4$, $\mathfrak{C}_{2h}^2$ $\mathfrak{C}_{2h}^4$ $\mathfrak{C}_{2h}^1$. Charakteristische Untergruppen beispielsweise $\mathfrak{V}^2$, $\mathfrak{C}_s^1$ ($\mathfrak{C}_s^1$ senkrecht zu $\mathfrak{C}_2^2$). Die Schraubenachsenschar liege parallel der c-Achse. Die vertikale Spiegelebene sei (100). Der Koordinatenanfangspunkt liege in einem Symmetriezentrum.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III). Siehe Seite 187.

IV.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$. V.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

VI.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $1, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$.

Symmetriezentren: Viererlei nämlich: $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ und $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ und $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ und $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$.

Digonale Drehungsachsen.

$^{0}\frac{1}{4}[010]$ $^{0}\frac{3}{4}[010]$; $\frac{1}{2}\frac{1}{4}[010]$ $\frac{1}{2}\frac{3}{4}[010]$. $[100]^{00}$ $[100]^{0\frac{1}{2}}$; $[100]^{\frac{1}{2}0}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{00}$; $[001]_{0\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{1}{2}0}$; $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$, $(001)_{\frac{3}{4}}$; $(100)_0$, $(100)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(010)_0$, $(010)_{\frac{1}{2}}$. Gleitkomponente $\frac{c}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, n, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$
$[\![\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![m, n, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, n, p]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad: Viererlei verschiedene Punktlagen entsprechend den viererlei Symmetriezentren. Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung = C_{2h}. Diese Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Kanten [001].

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad:

I.) Zunächst sind Punkte wie $[\![0\ n\ \frac{1}{4}]\!]$ oder $[\![0\ n\ \frac{3}{4}]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}\ n\ \frac{1}{4}]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}\ n\ \frac{3}{4}]\!]$ zweizählig. Es gehören beispielsweise zusammen: $[\![0\ n\ \frac{1}{4}]\!]$ mit $[\![0\ \bar{n}\ \frac{3}{4}]\!]$. Symmetriebedingung = C_{2v}.

II.) Punkte wie $[\![m\ 0\ 0]\!]$ oder $[\![m\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$ oder $[\![m\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ oder $[\![m\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$ sind vierzählig. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_2.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden: Beliebige Lage auf einer der vier Spiegelebenen.

Zu $[\![m, n, \frac{1}{4}]\!]$ gehören beispielsweise $[\![\bar{m}, \bar{n}, \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\bar{m}, n, \frac{1}{4}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \frac{3}{4}]\!]$;
zu $[\![0, n, p]\!]$ gehören $[\![0, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0, n, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0, \bar{n}, \bar{p}]\!]$.
Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_s.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden achtzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{B}_h^6$

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^1$. Ferner sind in ihr enthalten $\mathfrak{B}^2$, $\mathfrak{C}_{2v}^9$, $\mathfrak{C}_{2v}^6$, $\mathfrak{C}_{2v}^{10}$, $\mathfrak{C}_{2h}^5$, $\mathfrak{C}_{2h}^4$, $\mathfrak{C}_{2h}^4$. Charakteristische Untergruppen beispielsweise: $\mathfrak{B}^2$ mit $\mathfrak{C}_s^2$ senkrecht zu $\mathfrak{C}_2^2$ und mit der Gleitkomponente $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$. $\mathfrak{C}_2^2$ ist wieder der c-Achse parallel. Der Koordinatenanfangspunkt wird zweckmäßig in ein Symmetriezentrum verlegt, so daß die Koordinatenachsenverschiebung gegenüber der gleichen Untergruppe $\mathfrak{B}^2$ in $\mathfrak{B}_h^5 = \frac{a}{4}+\frac{b}{4}$ ist.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 187.

IV.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$. V.) $\frac{a}{2}, 0, \frac{c}{2}$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

VI.) $\frac{a}{2}, 0, \frac{c}{2}$; $1, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$.

Symmetriezentren: $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ einerseits,
$[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ anderseits.

Digonale Drehungsachsen:
$\frac{1}{4}\frac{1}{4}[010]$ $\frac{3}{4}\frac{3}{4}[010]$ $\frac{1}{4}\frac{3}{4}[010]$ $\frac{3}{4}\frac{1}{4}[010]$. $[100]^{\frac{1}{4}\,0}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,0}$ $[100]^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}}$; $[001]_{\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}}$.

Gleitspiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$;
$(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}+\frac{c}{2}$; $(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:
$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$
$[\![\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad: Es gibt zweierlei derartige Punktlagen. Sie entsprechen den zweierlei Symmetriezentren. Die Zähligkeit ist 4, die Symmetriebedingung $= C_i$. Die Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung, zentrierten Flächen (010) und zentrierten Kanten [010].

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad: Beliebige Lagen auf irgend einer der acht digonalen Drehungsachsen sind mit einem Freiheitsgrad vierzählig. Es gehören beispielsweise zusammen:
$[\![\frac{1}{4}, n, \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}, \bar{n}, \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}, n+\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]\!]$ oder
$[\![m, \frac{1}{4}, 0]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, \frac{3}{4}, 0]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}]\!]$.

Die übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden, ohne Symmetriebedingung, achtzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{B}_h^7$

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^1$. Ferner gehören ihr an $\mathfrak{V}^2$, $\mathfrak{C}_{2v}^7$, $\mathfrak{C}_{2v}^6$, $\mathfrak{C}_{2v}^4$, $\mathfrak{C}_{2h}^5$, $\mathfrak{C}_{2h}^4$, $\mathfrak{C}_{2h}^1$. Charakteristische Untergruppen sind beispielsweise $\mathfrak{V}^2$ mit $\mathfrak{C}_s^2 \perp \mathfrak{C}_2^2$ und mit Gleitkomponente $\frac{a}{2}$. Den Koordinatenanfangspunkt verlegt man zweckmäßig ins Symmetriezentrum. Die Spiegelebenen sollen parallel (100) stehen. Gegenüber $\mathfrak{V}^2$ von $\mathfrak{B}_h^5$ findet eine Koordinatenverschiebung um $\frac{a}{4}$ statt.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 187.

IV.) $\frac{a}{2}, 0, \frac{c}{2}$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$. V.) $\frac{a}{2}, 0, \frac{c}{2}$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

VI.) $\frac{a}{2}, 0, \frac{c}{2}$; $1, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$.

Symmetriezentren: $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$, ferner $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$, ferner $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$, ferner $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$.

Digonale Drehungsachsen:

$\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}[010]$ $\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}[010]$ $\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}[010]$ $\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}[010]$. $[100]^{00}$ $[100]^{0\,\frac{1}{2}}$; $[100]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\,0}$.

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{\frac{1}{4}\,0}$ $[001]_{\frac{3}{4}\,0}$; $[001]_{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen:

$(010)_0$ $(0\,1\,0)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}+\frac{c}{2}$; $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$

$[\![\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, n, p]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad: Es gibt viererlei derartige Punktlagen, die jeweilen zweizählig sind und den viererlei Symmetriezentren entsprechen. Die Symmetriebedingung $= C_{2h}$. Die Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Flächen (010).

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad: Bei beliebiger Lage auf einer der acht digonalen Drehungsachsen sind die Punkte vierzählig. Es gehören beispielsweise zusammen: $[\![m, 0, 0]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, 0, 0]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}]\!]$, oder $[\![\frac{1}{4}, n, \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}, \bar{n}, \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}, \bar{n}, \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}, n, \frac{1}{4}]\!]$. Die Symmetriebedingung lautet $= C_2$.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden: Derartige Punkte haben das allgemeine Symbol $[\![0, n, p]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}, n, p]\!]$. Sie sind ebenfalls vierzählig. Symmetriebedingung $= C_s$.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden achtzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{B}_h^8$

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^1$. Außerdem sind in ihr enthalten: $\mathfrak{B}^2$, $\mathfrak{C}_{2v}^5$, $\mathfrak{C}_{2v}^8$, $\mathfrak{C}_{2v}^3$, $\mathfrak{C}_{2h}^5$, $\mathfrak{C}_{2h}^4$, $\mathfrak{C}_{2h}^4$. Charakteristische Untergruppen wie vorhin, doch mit der Gleitkomponente $\frac{b}{2}$. Ein Symmetriezentrum wird zum Koordinatenanfangspunkt gewählt.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 187.

IV.) $0, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$. V.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

VI.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $1, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$.

Symmetriezentren: $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ einerseits,

$[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ anderseits.

Digonale Drehungsachsen:

$^0\frac{1}{4}[010]$ $^0\frac{3}{4}[010]$; $\frac{1}{2}\frac{1}{4}[010]$ $\frac{1}{2}\frac{3}{4}[010]$. $[100]^{\frac{1}{4}0}$ $[100]^{\frac{3}{4}0}$ $[100]^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{0\frac{1}{4}}$ $[001]_{0\frac{3}{4}}$, $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$.

Gleitspiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{2}$;

$(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{c}{2}$; $(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, n, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$

$[\![\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![m, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad: Zweierlei derartige Punktlagen, entsprechend den zweierlei Symmetriezentren, sind vorhanden. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_i. Sie bilden Gitter von der Form des Elementarpallelepipeds mit zentrierten Flächen (100) und zentrierten Kanten [010] und [001].

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad: Sie haben beliebige Lage auf irgend einer der acht digonalen Drehungsachsen. Es gehören beispielsweise zusammen: $[\![0, n, \frac{1}{4}]\!]$ $[\![0, \bar{n}+\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]\!]$ $[\![0, \bar{n}, \frac{3}{4}]\!]$ $[\![0, n+\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]\!]$ oder $[\![m, \frac{1}{4}, 0]\!]$ $[\![\bar{m}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \frac{3}{4}, 0]\!]$ $[\![m, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_2.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden achtzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{B}_h^9$

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^3$. Ferner sind darin enthalten: $\mathfrak{B}^3$, $\mathfrak{C}_{2v}^8$, $\mathfrak{C}_{2v}^9$, $\mathfrak{C}_{2v}^{12}$, $\mathfrak{C}_{2h}^1$, $\mathfrak{C}_{2h}^5$, $\mathfrak{C}_{2h}^5$. Charakteristische Untergruppen sind z. B. $\mathfrak{B}^3$ mit $\mathfrak{C}_s^1 \perp \mathfrak{C}_2^1$ in Lage O. Der Koordinatenanfangspunkt wird zweckmäßig in das Symmetriezentrum gelegt.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 187.

IV.) $0, 0, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1$. V.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, \bar{1}$.

VI.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0;\ 1, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1$.

Symmetriezentren: $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$, ferner $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$, ferner $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$, ferner $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen:

$\frac{1}{4}^0[010]$ $\frac{3}{4}^0[010]$; $\frac{1}{4}\frac{1}{2}[010]$ $\frac{3}{4}\frac{1}{2}[010]$. $[100]^{\frac{1}{4}0}$ $[100]^{\frac{3}{4}0}$; $[100]^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(001)_0$, $(001)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen:

$(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}$; $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[m, n, p]$ $[\bar{m}, \bar{n}, p]$ $[\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]$ $[m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]$
$[\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}]$ $[m, n, \bar{p}]$ $[m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]$ $[\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad. Es sind viererlei derartige Punktlagen vorhanden gemäß den vier Arten von Symmetriezentren. Jede Punktlage ist zweizählig. Die Symmetriebedingung lautet: $= C_{2h}$. Die Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Basisflächen.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Sie besitzen eine beliebige Lage auf einer der 4 zweizähligen Achsen. Es gehören zusammen: $[0\,0\,p]$ $[\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\bar{p}]$ $[\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,p]$ $[0\,0\,\bar{p}]$ oder $[\frac{1}{2}\,0\,p]$ $[0\,\frac{1}{2}\,\bar{p}]$ $[0\,\frac{1}{2}\,p]$ $[\frac{1}{2}\,0\,\bar{p}]$. Zähligkeit $= 4$. Symmetriebedingung $= C_2$.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Sie besitzen die allgemeinen Symbole $[m, n, 0]$ oder $[m, n, \frac{1}{2}]$. Ihre Zähligkeit ist 4, ihre Symmetriebedingung ist C_s.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden achtzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{V}_h^{10}$

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^2$. Außerdem sind in ihr enthalten: $\mathfrak{V}^3$, $\mathfrak{C}_{2v}^3$, $\mathfrak{C}_{2v}^9$, $\mathfrak{C}_{2v}^9$, $\mathfrak{C}_{2h}^4$, $\mathfrak{C}_{2h}^5$, $\mathfrak{C}_{2h}^5$. Als charakteristische Raumgruppen kann man $\mathfrak{V}^3$ mit $\mathfrak{C}_s^2 \perp \mathfrak{C}_2^1$ bezeichnen, wobei zu $\mathfrak{C}_s^2$ die Gleitkomponente $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$ gehört (Stellung M). Der Koordinatenanfangspunkt besitze die Lage eines Symmetriezentrums.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 187.

IV.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$. V.) $0, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$:

VI.) $0, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$; $1, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$.

Symmetriezentren: $[0\,0\,0]$ $[\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]$ $[0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]$ einerseits,
$[\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]$ $[0\,0\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{2}\,0\,0]$ $[0\,\frac{1}{2}\,0]$ anderseits.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}}$; $[001]_{\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}}$.

Digonale Schraubenachsen:

${}^{0}{}_{\frac{1}{4}}[010]$ ${}^{0}{}_{\frac{3}{4}}[010]$ ${}^{\frac{1}{2}}{}_{\frac{1}{4}}[010]$ ${}^{\frac{1}{2}}{}_{\frac{3}{4}}[010]$. $[100]^{0}{}_{\frac{1}{4}}$ $[100]^{0}{}_{\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{2}}{}_{\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{2}}{}_{\frac{3}{4}}$.

Gleitspiegelebenen: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$;

$(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{c}{2}$; $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{c}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![m, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![m, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n, p+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad. Zweierlei Symmetriezentrumsarten sind vorhanden. Zähligkeit jeweilen = 4. Symmetriebedingung = C_i. Diese Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit allseitiger Flächenzentrierung.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Sie liegen auf irgend einer der 4 digonalen Drehungsachsen. Beispielsweise gehören zusammen: $[\![\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, p]\!]$ $[\![\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \bar{p}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, p+\frac{1}{2}]\!]$. Die Zähligkeit ist 4, die Symmetriebedingung C_2.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden achtzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{B}_h^{11}$

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^3$. Ihr gehören ferner an: $\mathfrak{B}^3$, $\mathfrak{C}_{2v}^4$, $\mathfrak{C}_{2v}^2$, $\mathfrak{C}_{2v}^5$, $\mathfrak{C}_{2h}^4$, $\mathfrak{C}_{2h}^5$, $\mathfrak{C}_{2h}^2$. Als charakteristische Untergruppen kann man $\mathfrak{B}^3$ mit $\mathfrak{C}_s^2 \perp \mathfrak{C}_2^1$ in Lage O $\left(\text{Gleitkomponente } \frac{b}{2}\right)$ bezeichnen. Koordinatenanfangspunkt ist zweckmäßigerweise ein Symmetriezentrum.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 187.

IV.) $0, \frac{b}{2}, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1.$ V.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, \bar{1}.$

VI.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0;\ 1, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1.$

Symmetriezentren: $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ einerseits,
$[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ anderseits.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{0\,\frac{1}{4}}$ $[001]_{0\,\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}}$.

Digonale Schraubenachsen:

$^{\frac{1}{4}\,0}[010]$ $^{\frac{3}{4}\,0}[010]$; $^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}[010]$. $[100]^{00}$ $[100]^{\frac{1}{2}\,0}$; $[100]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$ $[100]^{0\,\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$.

Gleitspiegelebenen:

$(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}$; $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}, \bar{p}]\!]$
$[\![\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![m, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n, p]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad. Die zweierlei Arten von je 4 Symmetriezentren bedingen zweierlei derartige vierzählige Punktlagen

mit der Symmetriebedingung C_i. Sie bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Basisflächen und zentrierten Kanten des Basisrechteckes.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Es gehören zusammen: $[\![0, \frac{1}{4}, p]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \bar{p}]\!]$ $[\![0, \frac{3}{4}, \bar{p}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, p]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_2.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Sie gehorchen den allgemeinen Bedingungen: $[\![\frac{1}{4}, n, p]\!]$ oder $[\![\frac{3}{4}, n, p]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_s.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden achtzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{B}_h^{12}$

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^3$. Es gehören ihr fernerhin an: $\mathfrak{B}^3$, $\mathfrak{C}_{2v}^{10}$, $\mathfrak{C}_{2v}^{7}$, $\mathfrak{C}_{2v}^{7}$, $\mathfrak{C}_{2h}^{1}$, $\mathfrak{C}_{2h}^{5}$, $\mathfrak{C}_{2h}^{5}$. Charakteristisch für die Gruppe sind beispielsweise $\mathfrak{B}^3$ mit $\mathfrak{C}_s^1$ in Lage M senkrecht zu $\mathfrak{C}_2^1$. Der Koordinatenanfangspunkt besitzt die Symmetrie C_{2h}.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 187.

IV.) $0, 0, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1.$ V.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2};\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, \bar{1}.$

VI.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2};\ 1, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1.$

Symmetriezentren: $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$, ferner $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$, ferner $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$, ferner $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen:

$\frac{1}{4}\frac{1}{4}[010]$ $\frac{3}{4}\frac{3}{4}[010]$ $\frac{1}{4}\frac{3}{4}[010]$ $\frac{3}{4}\frac{1}{4}[010]$. $[100]^{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$.

Spiegelebenen: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen:

$(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}+\frac{c}{2}$; $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{2}+\frac{c}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![m, n, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad. Von den acht Symmetriezentren gehören je zwei zusammen. Es gibt somit viererlei zweizählige Punktlagen mit der Symmetriebedingung C_{2h}. Sie bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Sie liegen auf den digonalen Drehungsachsen. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_2.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Diese Punkte gehören den Spiegelebenen an. Einander zugeordnet sind: [m, n, 0] [$\bar{m}$, $\bar{n}$, 0] [$\bar{m}+\frac{1}{2}$, $n+\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$] [$m+\frac{1}{2}$, $\bar{n}+\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$]. Zähligkeit = 4. Die Symmetriebedingung lautet C_s.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden achtzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{B}_h^{13}$

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^2$. Außerdem gehören ihr an: $\mathfrak{B}^3$, $\mathfrak{C}_{2v}^1$, $\mathfrak{C}_{2v}^7$, $\mathfrak{C}_{2v}^7$, $\mathfrak{C}_{2h}^4$, $\mathfrak{C}_{2h}^2$, $\mathfrak{C}_{2h}^2$. Als charakteristisch kann man $\mathfrak{B}^3$ mit $\mathfrak{C}_s^2 \perp \mathfrak{C}_2^1$ in Lage M $\left(\text{Gleitkomponente } \frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)$ bezeichnen. Zum Koordinatenanfangspunkt ist der Schnittpunkt der digonalen Drehungsachse mit einer Gleitspiegelebene gewählt worden.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 187.

IV.) 0, 0, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, $\bar{1}$, 0; 0, 0, 1. V.) $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

VI.) 0, 0, 0; 1, 0, 0; 0, $\bar{1}$, 0; 0, 0, 1.

Symmetriezentren: [$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ 0] [$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$ 0] [$\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$ 0] [$\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$ 0] einerseits,
[$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$] [$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$] [$\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$] [$\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$] anderseits.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen:
$\frac{1}{4}{}^{0}[010]$ $\frac{3}{4}{}^{0}[010]$; $\frac{1}{4}{}^{\frac{1}{2}}[010]$ $\frac{3}{4}{}^{\frac{1}{2}}[010]$. $[100]^{\frac{1}{4}0}$ $[100]^{\frac{3}{4}0}$; $[100]^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$; $(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

[m, n, p] [$\bar{m}$, $\bar{n}$, p] [$\bar{m}+\frac{1}{2}$, $n+\frac{1}{2}$, $\bar{p}$] [$m+\frac{1}{2}$, $\bar{n}+\frac{1}{2}$, $\bar{p}$]
[$\bar{m}+\frac{1}{2}$, $\bar{n}+\frac{1}{2}$, $\bar{p}$] [$m+\frac{1}{2}$, $n+\frac{1}{2}$, $\bar{p}$] [m, $\bar{n}$, p] [$\bar{m}$, n, p].

Die geringste Zähligkeit ist diesmal nicht Punkten ohne Freiheitsgrad eigen sondern Punkten mit einem Freiheitsgrad.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad. Je vier von den acht Symmetriezentren gehören zusammen. Die Zähligkeit einer derartigen Punktlage ist daher 4, die Symmetriebedingung $1Z = C_i$. Die Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierter Basis und zentrierten Kanten des Basisrechteckes.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Die digonale Drehungsachse ist zugleich Schnittlinie der beiden Spiegelebenen. Zu [0 0 p] gehört [$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\bar{p}$]. Ebenso ist [$\frac{1}{2}$ 0 p] [0 $\frac{1}{2}$ $\bar{p}$] zugeordnet. Die Zähligkeit ist 2. Die Symmetriebedingung = C_{2v}.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Zusammengehörig sind $[\![0, n, p]\!]$ $[\![0, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ einerseits, ferner $[\![m, 0, p]\!]$ $[\![\bar{m}, 0, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ anderseits. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_s.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden achtzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{V}_h^{14}$

Als Untergruppen stellen sich ein: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^2$. Sie bilden fernerhin: $\mathfrak{V}^3$, $\mathfrak{C}_{2v}^6$, $\mathfrak{C}_{2v}^9$, $\mathfrak{C}_{2v}^5$, $\mathfrak{C}_{2h}^4$, $\mathfrak{C}_{2h}^5$, $\mathfrak{C}_{2h}^5$. Als charakteristisch läßt sich $\mathfrak{V}^3$ mit $\mathfrak{C}_s^2$ in Lage M $\left(\text{Gleitkomponente } \frac{a}{2}\right)$ bezeichnen. Der Koordinatenanfangspunkt sei in einem Symmetriezentrum.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 187.

IV.) $\frac{a}{2}, 0, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1.$ V.) $0, \frac{b}{2}, \frac{c}{2};\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, \bar{1}.$

VI.) $0, \frac{b}{2}, \frac{c}{2};\ 1, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1.$

Symmetriezentren: $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ einerseits, $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ anderseits.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{\frac{1}{4}\,0}$ $[001]_{\frac{3}{4}\,0}$ $[001]_{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen:

${}_0{}^1_4[010]$ ${}_0{}^3_4[010]$ ${}_{\frac{1}{2}}{}^1_4[010]$ ${}_{\frac{1}{2}}{}^3_4[010]$. $[100]^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}}$.

Gleitspiegelebenen: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}$;

$(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{c}{2}$; $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{2}+\frac{c}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n, \bar{p}]\!]$ $[\![m, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad. Die dahin gehörigen Symmetriezentren zerfallen in zwei Gruppen. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_i. Die Punktlagen bilden innenzentrierte Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit gleichzeitiger Zentrierung der Kanten [100] und der Flächen (100) und Innenzentrierung.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad: Dazu gehören irgendwelche Punkte auf den digonalen Drehungsachsen. Die Zähligkeit ist 4, die Symmetriebedingung = C_2.

Im übrigen sind alle Punktlagen mit drei Freiheitsgraden achtzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{B}_h^{15}$

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^2$. In ihr sind außerdem enthalten: $\mathfrak{B}^4$, $\mathfrak{C}_{2v}^5$, $\mathfrak{C}_{2v}^5$, $\mathfrak{C}_{2v}^5$, $\mathfrak{C}_{2h}^5$, $\mathfrak{C}_{2h}^5$, $\mathfrak{C}_{2h}^5$. Charakteristisch sind $\mathfrak{B}^4$ mit $\mathfrak{C}_s^2$. Koordinatenanfangspunkt in einem Symmetriezentrum.

Einfachste Decktranformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 187.

IV.) $0, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$. V.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

VI.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0$; $1, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$.

Symmetriezentren: $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ einerseits,
$[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ anderseits.

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{0\,\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}}$ $[001]_{0\,\frac{3}{4}}$.
$^{\frac{1}{4}\,0}[010]$ $^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}[010]$ $^{0\,\frac{3}{4}}[010]$. $[100]^{0\,\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}}$ $[100]^{0\,\frac{3}{4}}$.

Gleitspiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{2}$;

$(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}$; $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{c}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![m, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n, p+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad. Je vier von den acht Symmetriezentren gehören zusammen und bestimmen derartige Punktlagen. Die Zähligkeit ist 4, die Symmetriebedingung = C_i. Die Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit allseitiger Flächenzentrierung.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden achtzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{B}_h^{16}$

Die einfachsten Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^2$. Sie bilden unter sich: $\mathfrak{B}^4$, $\mathfrak{C}_{2v}^9$, $\mathfrak{C}_{2v}^2$, $\mathfrak{C}_{2v}^7$, $\mathfrak{C}_{2h}^2$, $\mathfrak{C}_{2h}^5$, $\mathfrak{C}_{2h}^5$. Charakteristisch sind $\mathfrak{B}^4$ mit $\mathfrak{C}_s^1$. Die Spiegelebene wird horizontal gestellt. Ein Symmetriezentrum wird zum Koordinatenanfangspunkt gewählt.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe oben Seite 187.

IV.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$. V.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

VI.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$; $1, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$.

Symmetriezentren: $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ einerseits,
$[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ anderseits.

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$. $\frac{1}{4}\frac{1}{4}[010]$ $\frac{3}{4}\frac{3}{4}[010]$; $\frac{1}{4}\frac{3}{4}[010]$ $\frac{3}{4}\frac{1}{4}[010]$. $[100]^{\frac{1}{4}0}$ $[100]^{\frac{3}{4}0}$ $[100]^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$.

Gleitspiegelebenen.

$(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}+\frac{c}{2}$; $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$
$[\![\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![m, n, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad. Je vier Symmetriezentren bestimmen einen derartigen zusammengehörigen Komplex. Es gibt also zweierlei Punktlagen mit einer jeweiligen Zähligkeit von vier. Symmetriebedingung $= C_i$. Die Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierter Basis, zentrierten Kanten [001] und mit Innenzentrierung.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Sie gehören den Spiegelebenen an, beispielsweise: $[\![m, n, \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]\!]$. Die Zähligkeit ist, bei der Symmetriebedingung $= C_s$, vier. Die übrigen Punktlagen besitzen alle drei Freiheitsgrade und sind achtzählig.

Den Raumgruppen $\mathfrak{B}_h^{17}$ — $\mathfrak{B}_h^{22}$ ist wiederum das primitive Translationstripel gemeinsam. Das Elementarparallelepiped (mit $\alpha, \beta, \gamma = 90^0$ und mit a, b, c = kürzeste Perioden in der Achsenrichtung) besitzt ein zentriertes Flächenpaar. In Analogie mit früheren Festsetzungen stellen wir das Raumsystem so auf, daß dieses Flächenpaar zu Basisflächen wird. Die ausgezeichnete Achsenschar fällt dann in Richtung der c-Achse. Ein primitives Tripel ist jetzt von der Gestalt: $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$; $\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$, c, so daß die allen diesbezüglichen Gruppen gemeinsamen drei ersten Decktransformationsbedingungen lauten:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) $\frac{a}{2}, \frac{\bar{b}}{2}, 0$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

III.) 0, 0, c; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Raumgruppe $\mathfrak{B}_h^{17}$

In ihr sind enthalten erstens: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3$. Zweitens: $\mathfrak{B}^5$, $\mathfrak{C}_{2v}^{12}$, $\mathfrak{C}_{2v}^{14}$, $\mathfrak{C}_{2v}^{16}$, $\mathfrak{C}_{2h}^2$, $\mathfrak{C}_{2h}^6$, $\mathfrak{C}_{2h}^3$. Charakteristisch sind: $\mathfrak{B}^5$ und $\mathfrak{C}_s^1$. Der Koordinatenanfangspunkt liege in einem Symmetriezentrum, das zugleich Schnittpunkt einer digonalen Drehungsachse mit einer Spiegelebene ist. Im übrigen ist die Aufstellung der von $\mathfrak{B}^5$ analog.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe oben.

IV.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$. V.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

VI.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $1, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$.

Symmetriezentren:

I. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}]\!]$. II. $[\![\tfrac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}\,0\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\tfrac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}]\!]$.
III. $[\![\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\tfrac{1}{4}\,\tfrac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\tfrac{3}{4}\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\tfrac{3}{4}\,\tfrac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\tfrac{1}{4}\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{2}]\!]$.

Digonale Drehungsachsen:

${}^{0}{}_{\frac{1}{4}}[010]$ ${}^{0}{}_{\frac{3}{4}}[010]$ ${}^{\frac{1}{2}}{}_{\frac{1}{4}}[010]$ ${}^{\frac{1}{2}}{}_{\frac{3}{4}}[010]$. $[100]^{00}$ $[100]^{\frac{1}{2}0}$ $[100]^{0\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen:

$[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$. $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$.

${}^{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}[010]$ ${}^{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}[010]$ ${}^{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}[010]$ ${}^{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}[010]$. $[100]^{\frac{1}{4}0}$ $[100]^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{3}{4}0}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$; $(100)_{0}$ $(100)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(010)_{0}$, $(010)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{c}{2}$;

$(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}+\frac{c}{2}$. $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, n, \bar{p}+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$
$[\![\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![m, n, \bar{p}+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, n, p]\!]$

$[\![m+\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\tfrac{1}{2}, \bar{n}+\tfrac{1}{2}, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}, \bar{p}+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\tfrac{1}{2}, \bar{n}+\tfrac{1}{2}, \bar{p}]\!]$
$[\![\bar{m}+\tfrac{1}{2}, \bar{n}+\tfrac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}, \bar{p}+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\tfrac{1}{2}, \bar{n}+\tfrac{1}{2}, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}, p]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad. Den dreierlei Symmetriezentren entsprechen drei verschiedene Punktarten. Die Zähligkeit für die ersten zwei ist 4. Die Symmetriebedingung lautet C_{2h}. Diese Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierter Basis, zentrierten Kanten [001] und mit Innenzentrierung. Die Zähligkeit für die dritte Art von Symmetriezentren ist 8. Die Symmetriebedingung infolgedessen nur $= C_i$. Die zugehörigen Gitter sind von der Form des Elementarparallelepipeds mit vollständiger Zentrierung von Kanten, Flächen und Innenraum.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Vierzählig sind Punkte wie $[\![0, n, \tfrac{1}{4}]\!]$. Die dazugehörigen Lagen ergeben sich zu: $[\![0, \bar{n}, \tfrac{3}{4}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}, \bar{n}+\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}]\!]$. Die Symmetriebedingung lautet $= C_{2v}$. Achtzählig sind die Punktlagen auf den [100] parallelen Drehungsachsen. Ein zusammengehöriger Komplex heißt: $[\![m, 0, 0]\!]$ $[\![\bar{m}, 0, \tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![m, 0, \tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, 0, 0]\!]$ $[\![m+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0]\!]$ $[\![\bar{m}+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0]\!]$ $[\![m+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]\!]$. Die Symmetriebedingung ist C_2.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Sie gehören den Spiegelebenen an. Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = C_s.

Die übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden 16zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{B}_h^{18}$

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_s^8$, $\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3$. Weitere Untergruppen sind $\mathfrak{B}^5$, $\mathfrak{C}_{2v}^{12}$, $\mathfrak{C}_{2v}^{15}$, $\mathfrak{C}_{2v}^{17}$, $\mathfrak{C}_{2h}^5$, $\mathfrak{C}_{2h}^6$, $\mathfrak{C}_{2h}^8$. Charakteristisch sind $\mathfrak{B}^5$ und $\mathfrak{C}_s^2$. Der Koordinatenanfangspunkt liege in einem der vierzähligen Symmetriezentren. Gegenüber $\mathfrak{B}^5$ findet eine Koordinatenachsenverschiebung um $\frac{a}{4}$ statt.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 202.

IV.) $\frac{a}{2}, 0, \frac{c}{2}$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$. V.) $\frac{a}{2}, 0, \frac{c}{2}$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

VI.) $\frac{a}{2}, 0, \frac{c}{2}$; $1, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$.

Symmetriezentren:

I. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$. II. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$.

III. Genau gleich wie III. in Gruppe $\mathfrak{B}_h^{17}$.

Digonale Drehungsachsen:

$\frac{1}{4}\frac{1}{4}[010]$ $\overset{3}{\frac{3}{4}}\frac{3}{4}[010]$ $\frac{1}{4}\frac{3}{4}[010]$ $\frac{3}{4}\frac{1}{4}[010]$. $[100]^{00}$ $[100]^{\frac{1}{2}0}$ $[100]^{0\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen:

$[001]_{\frac{1}{4}0}$ $[001]_{\frac{3}{4}0}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}$. $[001]_{0\frac{1}{4}}$ $[001]_{0\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$.

${}^{0}{}_{\frac{1}{4}}[010]$ ${}^{0}{}_{\frac{3}{4}}[010]$ ${}^{\frac{1}{2}}{}_{\frac{1}{4}}[010]$ ${}^{\frac{1}{2}}{}_{\frac{3}{4}}[010]$. $[100]^{\frac{1}{4}0}$ $[100]^{\frac{3}{4}0}$ $[100]^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen:

$(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}$. $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}+\frac{c}{2}$.

$(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{c}{2}$. $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$

$[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, n, p]\!]$

$[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$

$[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![m, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad. Die Symmetriezentren I. und II. entsprechen zweierlei vierzähligen Punktlagen. Symmetriebedingung = C_{2h}. Die Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit allseitiger Flächenzentrierung. Die III. Art von Symmetriezentren ist analog der von $\mathfrak{B}_h^{17}$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Bei beliebiger Lage auf einer der 8 digonalen Drehungsachsen stellt sich die Zähligkeit 8 ein. Die Symmetriebedingung lautet C_2. Es gehören beispielsweise zusammen: $[\![m, 0, 0]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, 0, 0]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0]\!]$ $[\![\bar{m}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0]\!]$ $[\![m, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\!]$ oder $[\![\frac{1}{4}, n, \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}, \bar{n}, \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}, \bar{n}, \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}, n, \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}, n+\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}, n+\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]\!]$.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden: Zu $[\![0\ n\ p]\!]$ gehören $[\![\frac{1}{2}, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, n, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![0, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$. Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = C_s.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden 16zählig.

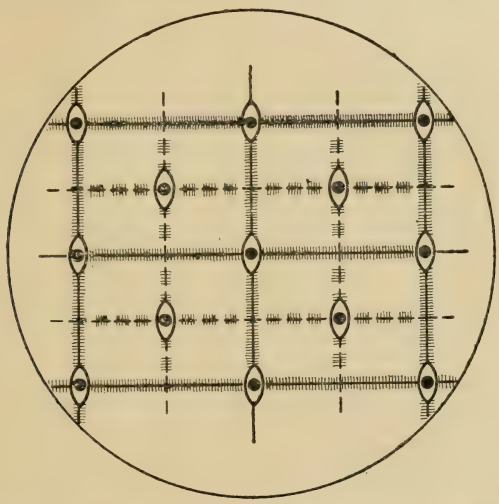


Fig. 99. $\mathfrak{B}_h^{19}$ Ebene $(001)_0$. Gleiche Symbolik wie in den vorhergehenden Figuren der rhombisch holoedrischen Klasse.

Raumgruppe $\mathfrak{B}_h^{19}$. (Siehe Fig. 99)

Ihre Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3$; ferner $\mathfrak{B}^6$, $\mathfrak{C}_{2v}^{11}$, $\mathfrak{C}_{2v}^{14}$, $\mathfrak{C}_{2v}^{14}$, $\mathfrak{C}_{2h}^1$, $\mathfrak{C}_{2h}^3$, $\mathfrak{C}_{2h}^3$. Charakteristisch sind $\mathfrak{B}^6$ mit $\mathfrak{C}_s^1$ in Lage O. Koordinatenanfangspunkt in einem zweizähligen Symmetriezentrum.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 202.

IV.) $0, 0, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1$. V.) $0, 0, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, \bar{1}$.

VI.) $0, 0, 0;\ 1, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1$.

Symmetriezentren: $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$, ferner $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$; ferner $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$, ferner $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$. Außerdem gehören zusammen: $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ einerseits, $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ anderseits.

Digonale Drehungsachsen:

$[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$; $[001]_{0\,\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\,0}$. $[001]_{\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}}$.

$^{00}[010]$ $^{\frac{1}{2}\,0}[010]$; $^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}[010]$ $^{0\,\frac{1}{2}}[010]$. $[100]^{00}$ $[100]^{\frac{1}{2}\,0}$; $[100]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$ $[100]^{0\,\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen:

$^{\frac{1}{4}\,0}[010]$ $^{\frac{3}{4}\,0}[010]$; $^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}[010]$. $[100]^{\frac{1}{4}\,0}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,0}$; $[100]^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(001)_0$; $(001)_{\frac{1}{2}}$; $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$; $(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen:

$(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}$; $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, n, \bar{p}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![m, n, \bar{p}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, n, p]\!]$

$[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$

$[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$

Punktlagen ohne Freiheitsgrad: Von den einen acht Symmetriezentren gehören je zwei zusammen. Viererlei zweizählige Punktlagen sind daher vorhanden. Ihre Zähligkeit ist 2, die Symmetriebedingung lautet V_h. Die Koordinatenwerte sind der Zusammenstellung der Symmetrieelemente zu entnehmen. Die Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierter Grundfläche.

Die acht übrigen Symmetriezentren teilen sich in je vier zusammengehörige. Die Zähligkeit einer derartigen Punktlage ist daher 4, die Symmetriebedingung $= C_{2h}$. Es werden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds gebildet mit zentrierter Basis und zentrierten Kanten des Basisrechteckes.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Vierzählig sind Punkte vom allgemeinen Symbol $[\![0\,0\,p]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,p]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}\,0\,p]\!]$ oder $[\![0\,\frac{1}{2}\,p]\!]$, ferner alle Punkte auf den zu [010] und [100] parallelen digonalen Drehungsachsen. Die Symmetriebedingung ist $= C_{2v}$. Achtzählig sind Punktlagen mit den Symbolen: $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,p]\!]$ oder $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,p]\!]$ oder $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,p]\!]$ oder $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,p]\!]$. Sie müssen lediglich die Symmetrie $= C_2$ besitzen.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Sie befinden sich auf den Spiegelebenen bei beliebiger Lage. Ihre Zähligkeit ist 8, ihre Symmetrie $= C_s$.

Im übrigen sind die Punkte bei Anwesenheit dreier Freiheitsgrade 16zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{B}_h^{20}$ (Siehe Fig. 100)

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3$. Ferner gehören ihr an: $\mathfrak{B}^6$, $\mathfrak{C}_{2v}^{13}$, $\mathfrak{C}_{2v}^{16}$, $\mathfrak{C}_{2v}^{16}$, $\mathfrak{C}_{2h}^1$, $\mathfrak{C}_{2h}^6$, $\mathfrak{C}_{2h}^6$. Als charakteristisch kann man $\mathfrak{B}^6$ mit $\mathfrak{C}_s^1$ in Lage M bezeichnen. Koordinatenanfangspunkt sei der Schnittpunkt dreier digonaler Drehungsachsen. (Auch ein Symmetriezentrum ließe sich dazu wählen.)

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 202. IV.) und V.) wie in $\mathfrak{B}_h^{19}$.

VI.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $1, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$.

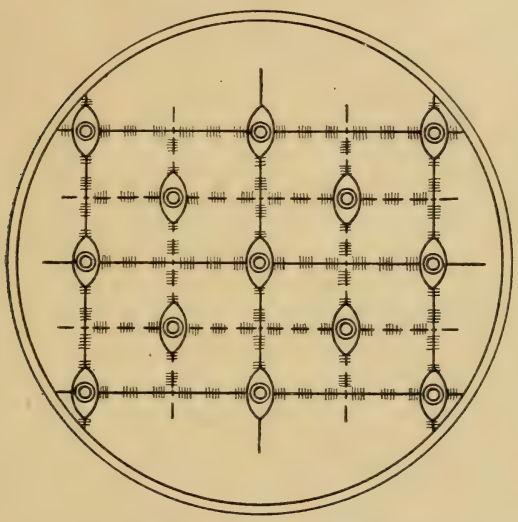


Fig. 100. $\mathfrak{B}_h^{20}$ Ebene $(001)_0$.
Gleiche Symbolik wie in den vorhergehenden Figuren.

Symmetriezentren:

I. $[\![0\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$; ferner II. $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$; ferner III. $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$; ferner IV. $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$.

Die digonalen Drehungsachsen und Schraubenachsen besitzen gleiche Lage wie in $\mathfrak{B}_h^{19}$, nur sind sie zum Teil anders zusammengehörig.

Spiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$.

Gleitspiegelebenen:

$(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{c}{2}$; $(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{c}{2}$.

$(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}+\frac{c}{2}$; $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{2}+\frac{c}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, n, \bar{p}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$

$[\![\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![m, n, \bar{p}+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, n, p+\tfrac{1}{2}]\!]$

$[\![m+\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\tfrac{1}{2}, \bar{n}+\tfrac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\tfrac{1}{2}, \bar{n}+\tfrac{1}{2}, \bar{p}]\!]$

$[\![\bar{m}+\tfrac{1}{2}, \bar{n}+\tfrac{1}{2}, \bar{p}+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}, \bar{p}+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\tfrac{1}{2}, \bar{n}+\tfrac{1}{2}, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}, p+\tfrac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

α) $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}]\!]$ Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = V.

β) $[\![\tfrac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}\,0\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\tfrac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}]\!]$ Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = V.

γ) = I der Symmetriezentren } Zähligkeit jeweilen = 4. Symmetrie-

δ) = II der Symmetriezentren } bedingung = C_{2h}.

Diese viererlei Punktlagen bilden einzelne Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierter Basisfläche, zentrierten Kanten [001] und mit Innenzentrierung.

ε) = III der Symmetriezentren } Zähligkeit jeweilen = 4. Symmetrie-

ω) = IV der Symmetriezentren } bedingung = C_{2h}.

ε und ω bilden einzelne Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit allseitiger Flächenzentrierung.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Beliebige andere Lage auf irgend einer der digonalen Drehungsachsen erzeugt sie. Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = C_2.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Es sind das Punkte $[\![m, n, \tfrac{1}{4}]\!]$ oder $[\![m, n, \tfrac{3}{4}]\!]$. Zu jeder Ausgangslage gehören 7 weitere Lagen hinzu. Die Zähligkeit ist 8, die Symmetriebedingung = C_s.

Die übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden 16zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{B}_h^{21}$ (Siehe Fig. 101)

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3$. Ihre Kombination bildet $\mathfrak{B}^6$, $\mathfrak{C}_{2v}^{11}$, $\mathfrak{C}_{2v}^{15}$, $\mathfrak{C}_{2v}^{15}$, $\mathfrak{C}_{2h}^4$, $\mathfrak{C}_{2h}^3$, $\mathfrak{C}_{2h}^3$. Charakteristisch sind $\mathfrak{B}^6$ und $\mathfrak{C}_s^2$ in Lage O. Lage des Koordinatenanfangspunktes wie in Gruppe $\mathfrak{B}_h^{20}$.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 202. IV.) und V.) wie in $\mathfrak{B}_h^{19}$.

VI.) $0, \frac{b}{2}, 0$; $1, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$.

Symmetriezentren:

I. $[\![\tfrac{1}{4}\,0\,0]\!]$ $[\![\tfrac{3}{4}\,0\,0]\!]$ $[\![\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{2}\,0]\!]$. II. $[\![\tfrac{1}{4}\,0\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\tfrac{3}{4}\,0\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}]\!]$.

III. $[\![0\,\tfrac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![0\,\tfrac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{4}\,0]\!]$. IV. $[\![0\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{2}]\!]$.

Die digonalen Drehungsachsen und Schraubenachsen sind dieselben wie in $\mathfrak{B}_h^{19}$, lediglich in teilweise neuer Vertauschung.

Spiegelebenen: $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$. $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$.

Gleitspiegelebenen: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}$ oder $\frac{b}{2}$;

$(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}$; $(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p]\!]$ $[\![m, n, \bar{p}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$

$[\![\bar{m}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![m, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![m, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$

$[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$

$[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n, p]\!]$

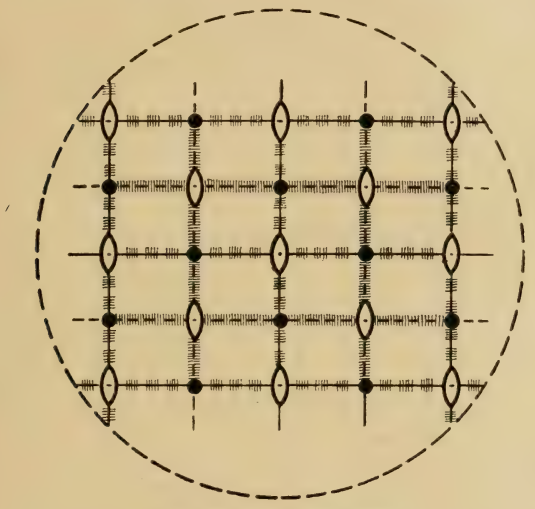


Fig. 101. $\mathfrak{B}_h^{21}$ Ebene $(001)_0$.
Gleiche Symbolik wie in den vorhergehenden Figuren.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

α) $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = V.

β) $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = V.

γ) = I
δ) = II
ω) = III
ε) = IV

der Symmetriezentren. Zähligkeit jeweilen = 4. Symmetriebedingung = C_{2h}.

Jede dieser 6 verschiedenen Punktlagen erzeugt Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierter Basis und zentrierten Kanten des Basisrechteckes.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Zu $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ p]\!]$ gehören $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ p]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \bar{p}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \bar{p}]\!]$. Die Zähligkeit ist 4. Die Symmetriebedingung lautet $= C_{2v}$. Auf den sich schneidenden digonalen Drehungsachsen ist mit der Symmetriebedingung $= C_2$ die Zähligkeit $= 8$.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Zwei Freiheitsgrade stellen sich bei beliebiger Lage auf einer der Spiegelebenen ein. Die Zähligkeit ist 8, die Symmetriebedingung $= C_s$.

Die übrigen Punktlagen sind bei Anwesenheit von drei Freiheitsgraden 16zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{B}_h^{22}$ (Siehe Fig. 102)

Ihr sind die Untergruppen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3$ eigen. Außerdem enthält sie $\mathfrak{B}^6$, $\mathfrak{C}_{2v}^{13}$, $\mathfrak{C}_{2v}^{17}$, $\mathfrak{C}_{2v}^{17}$, $\mathfrak{C}_{2h}^4$, $\mathfrak{C}_{2h}^6$, $\mathfrak{C}_{2h}^6$. Charakteristisch sind $\mathfrak{B}^6$ mit $\mathfrak{C}_s^2$ in Lage M. Wiederum wählt man den Schnittpunkt dreier Drehungsachsen zum Koordinatenanfangspunkt.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 202. IV.) und V.) wie $\mathfrak{B}_h^{19}$.

VI.) $\frac{a}{2}$, 0, $\frac{c}{2}$; 1, 0, 0; 0, $\bar{1}$, 0; 0, 0, 1.

Symmetriezentren:

I. $[\![\frac{1}{4}\ 0\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ 0\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ 0\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ 0\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{4}]\!]$.

II. $[\![0\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$.

Digonale Drehungsachsen und Schraubenachsen, abgesehen von der Vertauschbarkeit, gleich wie in $\mathfrak{B}_h^{19}$.

Gleitspiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}$ oder $\frac{b}{2}$.

$(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{2}+\frac{c}{2}$. $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}+\frac{c}{2}$.

$(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{c}{2}$. $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{c}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, n, \bar{p}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$

$[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n, p+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$

$[\![\bar{m}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

α) $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$ Zähligkeit $= 4$. Symmetriebedingung $=$ V.

β) $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$ Zähligkeit $= 4$. Symmetriebedingung $=$ V.

Diese Punktlagen bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit allseitiger Flächenzentrierung.

γ) = I der Symmetriezentren } Zähligkeit jeweilen = 8. Symmetrie-
δ) = II der Symmetriezentren } bedingung = C_i.

γ und δ bilden jedes für sich Gitter von $\frac{1}{8}$ Inhalt des Elementarparallelepipeds. (Kanten, Flächen, Innenraum zentriert.)

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Ihr geometrischer Ort ist eine beliebige Lage auf einer der digonalen Drehungsachsen. Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = C_2. Im übrigen gibt es nur noch Punktlagen mit drei Freiheitsgraden und mit der Zähligkeit = 16.

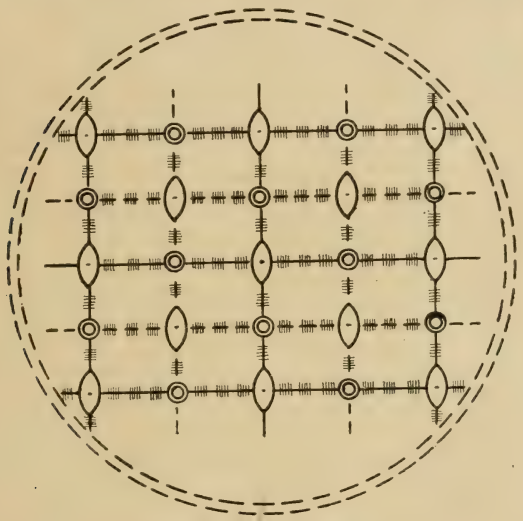


Fig. 102. $\mathfrak{B}_h^{22}$ Ebene $(001)_0$.
Gleiche Symbolik wie in den vorhergehenden Figuren.

Raumgruppe $\mathfrak{B}_h^{23}$ (Siehe Fig. 103)

Den Raumgruppen $\mathfrak{B}_h^{23}$ und $\mathfrak{B}_h^{24}$ ist das primitive Tripel der Translationen gemeinsam. Das Elementarparallelepiped ist vierfach-primitiv (allseitig flächenzentriert). $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}, \frac{a}{2}+\frac{c}{2}, \frac{b}{2}+\frac{c}{2}$ bilden ein primitives Tripel. Die drei ersten Decktransformationsbedingungen lauten daher für beide Gruppen:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0;\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1.$ II.) $\frac{a}{2}, 0, \frac{c}{2};\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1.$

III.) $0, \frac{b}{2}, \frac{c}{2};\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1.$

Die Untergruppen von $\mathfrak{B}_h^{23}$ sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3$. Fernerhin kann man erkennen: $\mathfrak{B}^7$, $\mathfrak{C}_{2v}^{18}$, $\mathfrak{C}_{2v}^{18}$, $\mathfrak{C}_{2v}^{18}$, $\mathfrak{C}_{2h}^3$, $\mathfrak{C}_{2h}^3$, $\mathfrak{C}_{2h}^3$. Charakteristisch sind $\mathfrak{B}^7$ mit $\mathfrak{C}_s^3$. Koordinatenanfangspunkt im Schnittpunkt dreier digonaler Drehungsachsen, sofern er in ein Symmetriezentrum fällt.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe oben. IV.) $0,0,0;\ \bar{1},0,0;\ 0,\bar{1},0;\ 0,0,1.$

V.) $0,0,0;\ \bar{1},0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,\bar{1}.$ VI.) $0,0,0;\ 1,0,0;\ 0,\bar{1},0;\ 0,0,1.$

Symmetriezentren:

I. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$. II. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$.

III. $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$.

IV. $[\![\frac{1}{4}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$.

V. $[\![0\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$.

Digonale Drehungsachsen:

$[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\,0}$ $[001]_{0\,\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$. $[001]_{\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}}$.

$[100]^{00}$ $[100]^{\frac{1}{2}\,0}$ $[100]^{0\,\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$. $[100]^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}}$.

$^{00}[010]$ $^{\frac{1}{2}\,0}[010]$ $^{0\,\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}[010]$. $^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}}[010]$ $^{\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}}[010]$.

Digonale Schraubenachsen:

$[001]_{\frac{1}{4}\,0}$ $[001]_{\frac{3}{4}\,0}$ $[001]_{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}$. $[001]_{0\,\frac{1}{4}}$ $[001]_{0\,\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}}$

ebenso die entsprechenden Schraubenachsen [100] und [010].

Spiegelebenen: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$; $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$; $(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}$ oder $\frac{b}{2}$;

$(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}$ oder $\frac{c}{2}$; $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{2}$ oder $\frac{c}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![\bar{m}, n, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![m, n, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![m, \bar{n}, p]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![\bar{m}, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$.

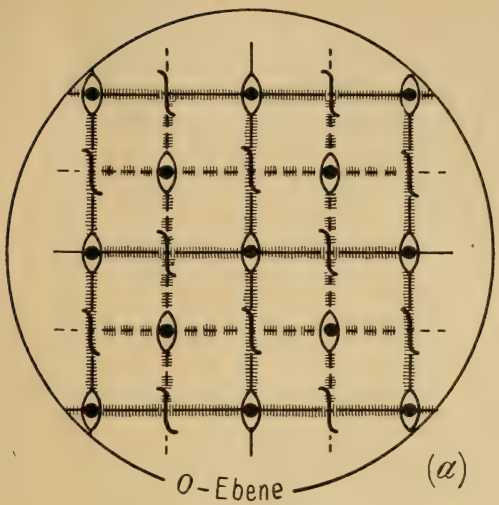


Fig. 103. $\mathfrak{B}_h^{23}$. a) Ebene $(001)_0$.
Gleiche Symbolik wie in den vorhergehenden Figuren.

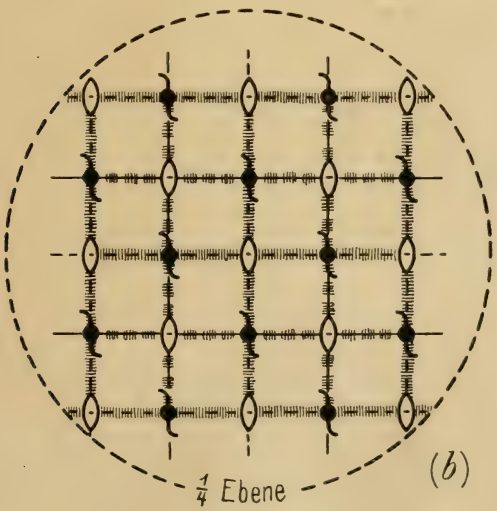


Fig. 103. $\mathfrak{B}_h^{23}$. b) Ebene $(001)_{\frac{1}{4}}$.
Gleiche Symbolik wie in den vorhergehenden Figuren.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

α) = I der Symmetriezentren, β) = II der Symmetriezentren } Zähligkeit jeweilen = 4. Symmetriebedingung = V_h.

Diese Punktlagen bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit vollständiger Flächenzentrierung.

δ) = $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$. Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = V.

γ) = III der Symmetriezentren, ω) = IV der Symmetriezentren, ε) = V der Symmetriezentren } Zähligkeit jeweilen = 8. Symmetriebedingung = C_{2h}.

Jede dieser Punktlagen bildet Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Flächenzentrierung, Kantenzentrierung und Innenzentrierung (bezw. Gitter von $\frac{1}{8}$ Inhalt des Elementarparallelepipeds).

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Die digonalen Drehungsachsen zerfallen in zwei Hauptarten. Diejenigen mit den Kennziffern $0\,0$, $\frac{1}{2}\,0$, $0\,\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}$ sind zugleich Schnittlinien zweier Spiegelebenen. Auf ihnen ist die Zähligkeit einer Punktlage daher 8, die Symmetriebedingung = C_{2v}. Die Drehungsachsen mit den Kennziffern $\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}$ besitzen keine weiteren Symmetrieeigenschaften. Die Zähligkeit beliebiger auf ihnen gelegener Punkte muß daher 16 sein.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden: Gemäß der Symmetriebedingung C_s ist die Zähligkeit 16 vorhanden. Im übrigen ist bei Anwesenheit dreier Freiheitsgrade die Zähligkeit 32 pro Elementarparallelepiped maßgebend.

Raumgruppe $\mathfrak{V}_h^{24}$

Das primitive Tripel der Translationen ist von gleicher Gestalt wie in $\mathfrak{V}_h^{23}$. Die Einzelscharen heißen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3$. Weiterhin lassen sich folgende Untergruppen erkennen: $\mathfrak{V}^7$, $\mathfrak{C}_{2v}^{19}$, $\mathfrak{C}_{2v}^{19}$, $\mathfrak{C}_{2v}^{19}$, $\mathfrak{C}_{2h}^6$, $\mathfrak{C}_{2h}^6$, $\mathfrak{C}_{2h}^6$. Als charakteristisch kann man $\mathfrak{V}^7$ mit $\mathfrak{C}_s^4$ bezeichnen. Den Koordinatenanfangspunkt legen wir wiederum in den Schnittpunkt dreier digonaler Achsen. Das Symmetriezentrum ist jetzt um $\frac{a}{8}, \frac{b}{8}, \frac{c}{8}$ davon entfernt.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 211. IV.) und V.) wie in $\mathfrak{V}_h^{23}$.

VI.) $\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, \frac{c}{4}$; $1, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$.

Symmetriezentren:

I. $[\![\frac{1}{8}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\,\frac{5}{8}\,\frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\,\frac{1}{8}\,\frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\,\frac{5}{8}\,\frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\,\frac{7}{8}\,\frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\,\frac{3}{8}\,\frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\,\frac{7}{8}\,\frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\,\frac{3}{8}\,\frac{5}{8}]\!]$
$[\![\frac{7}{8}\,\frac{1}{8}\,\frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\,\frac{5}{8}\,\frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\,\frac{1}{8}\,\frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\,\frac{5}{8}\,\frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\,\frac{7}{8}\,\frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\,\frac{3}{8}\,\frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\,\frac{7}{8}\,\frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\,\frac{3}{8}\,\frac{3}{8}]\!]$.

II. $[\![\frac{5}{8}\,\frac{5}{8}\,\frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\,\frac{1}{8}\,\frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\,\frac{5}{8}\,\frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\,\frac{3}{8}\,\frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\,\frac{7}{8}\,\frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\,\frac{3}{8}\,\frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\,\frac{7}{8}\,\frac{1}{8}]\!]$
$[\![\frac{3}{8}\,\frac{5}{8}\,\frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\,\frac{1}{8}\,\frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\,\frac{5}{8}\,\frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\,\frac{1}{8}\,\frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\,\frac{3}{8}\,\frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\,\frac{7}{8}\,\frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\,\frac{3}{8}\,\frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\,\frac{7}{8}\,\frac{7}{8}]\!]$.

Die digonalen Drehungsachsen und Schraubenachsen haben gleiche Lage wie in $\mathfrak{B}^{23}_h$ (bei anderer Vertauschbarkeit).

Gleitspiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{8}}$ $(001)_{\frac{5}{8}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{4}+\frac{b}{4}$;

$(001)_{\frac{3}{8}}$ $(001)_{\frac{7}{8}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{4}+\frac{b}{4}+\frac{a}{2}$ oder $\frac{a}{4}+\frac{b}{4}+\frac{b}{2}$ (bezw. $\frac{b}{4}-\frac{a}{4}$ oder $\frac{a}{4}-\frac{b}{4}$);

$(010)_{\frac{1}{8}}$ $(010)_{\frac{5}{8}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{4}+\frac{c}{4}$;

$(010)_{\frac{3}{8}}$ $(010)_{\frac{7}{8}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{4}+\frac{c}{4}+\frac{a}{2}$ oder $\frac{a}{4}+\frac{c}{4}+\frac{c}{2}$;

$(100)_{\frac{1}{8}}$ $(100)_{\frac{5}{8}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{4}+\frac{c}{4}$;

$(100)_{\frac{3}{8}}$ $(100)_{\frac{7}{8}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{4}+\frac{c}{4}+\frac{b}{2}$ oder $\frac{b}{4}+\frac{c}{4}+\frac{c}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

Die ersten 16 zusammengehörigen Werte genau gleich wie in $\mathfrak{B}^{23}_h$; die zweiten 16 Werte lauten jetzt aber:

$[\bar{m}+\frac{1}{4},\bar{n}+\frac{1}{4},p+\frac{1}{4}]$ $[\bar{m}+\frac{3}{4},\bar{n}+\frac{3}{4},\bar{p}+\frac{1}{4}]$ $[\bar{m}+\frac{3}{4},\bar{n}+\frac{1}{4},\bar{p}+\frac{3}{4}]$ $[\bar{m}+\frac{1}{4},\bar{n}+\frac{3}{4},\bar{p}+\frac{3}{4}]$

$[m+\frac{1}{4},n+\frac{1}{4},\bar{p}+\frac{1}{4}]$ $[m+\frac{3}{4},n+\frac{3}{4},\bar{p}+\frac{1}{4}]$ $[m+\frac{3}{4},n+\frac{1}{4},\bar{p}+\frac{3}{4}]$ $[m+\frac{1}{4},n+\frac{3}{4},\bar{p}+\frac{3}{4}]$

$[\bar{m}+\frac{1}{4},\bar{n}+\frac{1}{4},p+\frac{1}{4}]$ $[\bar{m}+\frac{3}{4},\bar{n}+\frac{3}{4},p+\frac{1}{4}]$ $[\bar{m}+\frac{3}{4},\bar{n}+\frac{1}{4},p+\frac{3}{4}]$ $[\bar{m}+\frac{1}{4},\bar{n}+\frac{3}{4},p+\frac{3}{4}]$

$[\bar{m}+\frac{1}{4},n+\frac{1}{4},p+\frac{1}{4}]$ $[\bar{m}+\frac{3}{4},n+\frac{3}{4},p+\frac{1}{4}]$ $[\bar{m}+\frac{3}{4},n+\frac{1}{4},p+\frac{3}{4}]$ $[\bar{m}+\frac{1}{4},n+\frac{3}{4},p+\frac{3}{4}]$

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

α) $[0\,0\,0]$ $[\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]$ $[\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]$ $[0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]$ $[\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]$ $[\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]$ $[\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]$.

β) $[\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]$ $[0\,0\,\frac{1}{2}]$ $[0\,\frac{1}{2}\,0]$ $[\frac{1}{2}\,0\,0]$ $[\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]$ $[\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]$ $[\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]$ $[\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]$.

Jede dieser zwei getrennten Punktlagen ist achtzählig. Die Symmetriebedingung ist = V. Zweierlei flächenzentrierte Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds kann man sich zur Veranschaulichung dieser zusammengehörigkeiten mit dem Verschiebungsvektor $\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, \frac{c}{4}$ ineinandergeschoben denken (rhombische „Diamant"gitter).

γ) = I von Symmetriezentren. } Zähligkeit = 16. Symmetriebedingung

δ) = II von Symmetriezentren. } = C_i.

Die beiden letzteren Punktlagen bilden, verglichen mit den Eckpunkten des Elementarparallelepipeds, bereits recht komplizierte Gitter.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Irgend eine konstruktive Punktlage, deren notwendiges Symmetrieelement lediglich = C_2 ist, tritt im Elementarparallelepiped 16mal auf.

Die Zusammengehörigkeit der Achsen ist durch die Zusammengehörigkeit ihrer Schnittpunkte bereits genügend gekennzeichnet.

Punktlagen mit drei Freiheitsgraden finden sich überall sonst vor. Ihre Zähligkeit ist 32.

Raumgruppe $\mathfrak{B}_h^{25}$

Für die Raumgruppen $\mathfrak{B}_h^{25} - \mathfrak{B}_h^{28}$ ist das Elementarparallelepiped innenzentriert. Ein primitives Tripel ist in $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}, \frac{a}{2}-\frac{b}{2}+\frac{c}{2}, c$ gegeben. Die drei ersten Decktransformationsbedingungen lauten für die vier Gruppen gemeinsam:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) $\frac{a}{2}, \frac{\bar{b}}{2}, \frac{c}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

III.) 0, 0, c; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Die Gruppe $\mathfrak{B}_h^{25}$ enthält: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3$. Sie bilden unter sich $\mathfrak{B}^8$, $\mathfrak{C}_{2v}^{20}$ $\mathfrak{C}_{2v}^{20}$ $\mathfrak{C}_{2v}^{20}$, $\mathfrak{C}_{2h}^3$ $\mathfrak{C}_{2h}^3$ $\mathfrak{C}_{2h}^3$. Charakteristisch sind $\mathfrak{B}^8$ mit $\mathfrak{C}_s^3$. Der Koordinatenanfangspunkt liegt im Schnittpunkt dreier digonaler Drehungsachsen.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe oben. IV.) 0, 0, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, $\bar{1}$, 0; 0, 0, 1.

V.) 0, 0, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, $\bar{1}$. VI.) 0, 0, 0; 1, 0, 0; 0, $\bar{1}$, 0; 0, 0, 1.

Symmetriezentren: $[\![0, 0, 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$, ferner $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$, ferner $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$, ferner $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$. Außerdem sind als Symmetriezentren vorhanden: $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$. $[100]^{00}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[100]^{\frac{1}{2}0}$ $[100]^{0\frac{1}{2}}$. $^{00}[010]$ $^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[010]$; $^{\frac{1}{2}0}[010]$ $^{0\frac{1}{2}}[010]$.

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$; $[100]^{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$; $^{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}[010]$ $^{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}[010]$.

Spiegelebenen: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$; $(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$; $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$.

$(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{2}+\frac{c}{2}$. $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}+\frac{c}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, n, \bar{p}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![m, n, \bar{p}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, n, p]\!]$
$[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

$[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$
$[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$
$[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$

Zähligkeit jeweilen = 2. Symmetriebedingung = V_h.

Jede dieser viererlei Punktlagen bildet Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung.

$[\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]$ sowie die 7 weiteren dazugehörigen Punktlagen (siehe unter Symmetriezentren) besitzen gleichfalls keinen Freiheitsgrad. Ihre Zähligkeit ist 8. Die Symmetriebedingung $= C_i$. Es wird ein Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds gebildet mit vollständiger Flächen- und Kantenzentrierung, sowie mit Innenzentrierung.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Alle digonalen Drehungsachsen sind zugleich Schnittlinien zweier Spiegelebenen. Die Punkte auf ihnen besitzen daher bei der Zähligkeit 4 die Symmetriebedingung C_{2v}.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Sechs Spiegelebenen stehen zur Verfügung. Zähligkeit $= 8$. Symmetriebedingung $= C_s$.

Weitere Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden 16zählig.

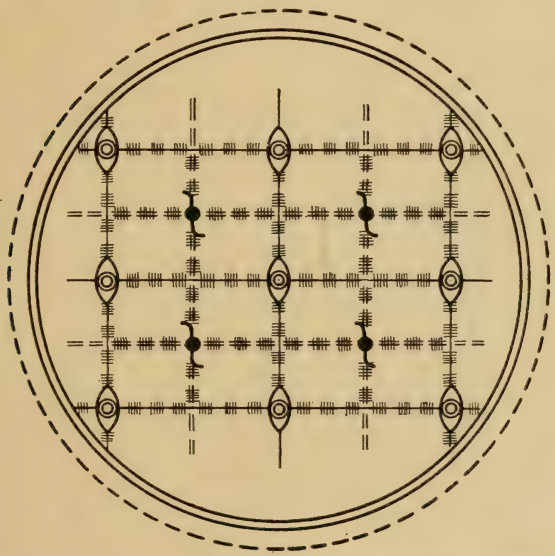


Fig. 104. $\mathfrak{B}_h^{26}$ Ebene $(001)_0$. Achsen, die in $\frac{1}{4}$ Höhe über der Grundebene dieser parallel gehen, sind durch Doppellinien (ausgezogen = Drehungsachsen, gestrichelt = Schraubenachsen) kenntlich gemacht.
Die zwei zusammengehörigen vollständigen Großkreise entsprechen Spiegelebenen $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$. Der gestrichelte Großkreis markiert die Gleitspiegelebene $(001)_0$. Symbolik im übrigen wie in den vorhergehenden Figuren.

Raumgruppe $\mathfrak{B}_h^{26}$ (Siehe Fig. 104)

Ihre einfachsten Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_s^3, \mathfrak{C}_s^4, \mathfrak{C}_s^4, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3, \mathfrak{C}_2^3$. Unter sich bilden sie: $\mathfrak{B}^8$, $\mathfrak{C}_{2v}^{21}$ $\mathfrak{C}_{2v}^{22}$ $\mathfrak{C}_{2v}^{22}$, $\mathfrak{C}_{2h}^3$ $\mathfrak{C}_{2h}^6$ $\mathfrak{C}_{2h}^6$. Charakteristisch ist $\mathfrak{B}^8$ mit $\mathfrak{C}_s^4$ (bezw. $1\,\mathfrak{C}_s^3$ durch den Schnittpunkt der Schrauben-

achsen). Hinsichtlich der Achsenscharen besitze der Koordinatenanfangspunkt gleiche Lage wie in $\mathfrak{B}_h^{25}$.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 216. IV.) und V.) wie $\mathfrak{B}_h^{25}$.

VI.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $1, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$.

Symmetriezentren:

I. $[\![0\,0\,\tfrac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,0\,\tfrac{3}{4}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{4}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{4}]\!]$. II. $[\![\tfrac{1}{2}\,0\,\tfrac{1}{4}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}\,0\,\tfrac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{4}]\!]$.

III. $[\![\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\tfrac{3}{4}\,\tfrac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\tfrac{3}{4}\,\tfrac{3}{4}\,1]\!]$ $[\![\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{4}\,\tfrac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\tfrac{1}{4}\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{4}\,\tfrac{3}{4}\,0]\!]$.

Digonale Drehungsachsen und Schraubenachsen besitzen, abgesehen von der Vertauschbarkeit, gleiche Lage wie in $\mathfrak{B}_h^{25}$.

Spiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$.

Gleitspiegelebenen:

$(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$; $\left.\begin{matrix}(100)_0 & (100)_{\frac{1}{2}}\\ (010)_0 & (010)_{\frac{1}{2}}\end{matrix}\right\}$ Gleitkomp. $\frac{c}{2}$;

$(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{2}$; $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![m, n, \bar{p}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$

$[\![\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![m, n, \bar{p}+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, n, p+\tfrac{1}{2}]\!]$

$[\![m+\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\tfrac{1}{2}, \bar{n}+\tfrac{1}{2}, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}, \bar{p}+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\tfrac{1}{2}, \bar{n}+\tfrac{1}{2}, \bar{p}+\tfrac{1}{2}]\!]$

$[\![\bar{m}+\tfrac{1}{2}, \bar{n}+\tfrac{1}{2}, p]\!]$ $[\![m+\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\tfrac{1}{2}, \bar{n}+\tfrac{1}{2}, p]\!]$ $[\![m+\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}, p]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![000]\!]$ $[\![00\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,0]\!]$ Zähligkeit $= 4$. Symmetriebedingung $= V$.
2. $[\![\tfrac{1}{2}00]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}0\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\tfrac{1}{2}\,0]\!]$ Zähligkeit $= 4$. Symmetriebedingung $= V$.

   Diese beiden Punktlagen bilden jeweilen Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierter Basisfläche, zentrierten Kanten [001] und Innenzentrierung.
3. $=$ I von Symmetriezentren } Zähligkeit jeweilen $= 4$. Symmetrie-
4. $=$ II von Symmetriezentren } bedingung $= C_{2h}$.

   Auch sie bilden Gitter von der gleichen Form wie 1 und 2.
5. $=$ III von Symmetriezentren. Zähligkeit $= 8$. Symmetriebeding. $= C_i$.

   Das von ihnen gebildete Gitter hat die Form eines Elementarparallelepipeds mit vollständig zentrierten Flächen und Kanten, sowie mit Innenzentrierung.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Sie stellen sich bei beliebiger übrigbleibender Lage auf einer der digonalen Drehungsachsen ein. Zähligkeit $= 8$. Symmetriebedingung $= C_2$.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Sie besitzen entweder ein Symbol $[\![m, n, \frac{1}{4}]\!]$ oder $[\![m, n, \frac{3}{4}]\!]$. Zähligkeit $= 8$. Die Symmetriebedingung lautet $= C_s$.

Übrigbleibende Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden (ohne Symmetriebedingung) 16zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{B}_h^{27}$ (Siehe Fig. 105)

Ihre Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3$, ferner $\mathfrak{B}^9$, $\mathfrak{C}_{2v}^{21}$, $\mathfrak{C}_{2v}^{21}$, $\mathfrak{C}_{2v}^{21}$, $\mathfrak{C}_{2h}^6$, $\mathfrak{C}_{2h}^6$, $\mathfrak{C}_{2h}^6$. Charakterisiert wird die Raumgruppe durch $\mathfrak{B}^9$ mit $\mathfrak{C}_s^4$. Koordinatenanfangspunkt in einem Symmetriezentrum.

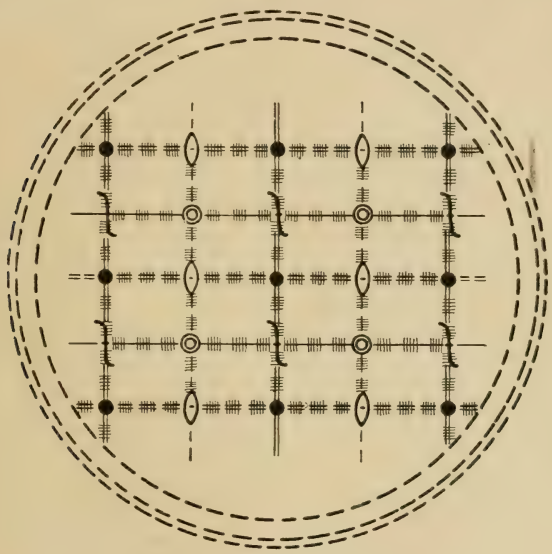


Fig. 105. $\mathfrak{B}_h^{27}$ Ebene $(001)_0$.
In prinzipieller Hinsicht gleiche Symbolik wie Fig. 104.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 216.

IV.) $0, \frac{b}{2}, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1.$ V.) $\frac{a}{2}, 0, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, \bar{1}.$

VI.) $\frac{a}{2}, 0, 0;\ 1, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1.$

Symmetriezentren:

I.) $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\tfrac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}\,0\,\tfrac{1}{2}]\!]$.

II.) $[\![\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{4}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{3}{4}]\!]$ $[\![\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{4}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{4}\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{4}]\!]$ $[\![\tfrac{3}{4}\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{3}{4}]\!]$ $[\![\tfrac{3}{4}\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{4}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{4}\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{3}{4}]\!]$ $[\![\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{3}{4}]\!]$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{0\frac{1}{4}}$ $[001]_{0\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$.

$^{\frac{1}{4}0}[010]$ $^{\frac{3}{4}0}[010]$ $^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}[010]$. $[1,00]^{0\frac{1}{4}}$ $[100]^{0\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$.

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{\frac{1}{4}\,0}$ $[001]_{\frac{3}{4}\,0}$ $[001]_{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}$.
${}^{0}{}_{\frac{1}{4}}[010]$ ${}^{0}{}_{\frac{3}{4}}[010]$ ${}^{\frac{1}{2}}{}_{\frac{1}{4}}[010]$ ${}^{\frac{1}{2}}{}_{\frac{3}{4}}[010]$. $[100]^{\frac{1}{4}\,0}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,0}$ $[100]^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen:

$(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{2}$. $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}$.

$(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}$. $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{c}{2}$.

$(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{c}{2}$. $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n, \bar{p}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![m, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, n, p+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}, p+\frac{1}{2},]\!]$ $[\![m, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$
$[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

I.) = I von Symmetriezentren. Zähligkeit = 8. Symmetriebeding. = C_i.

II.) = II von Symmetriezentren. Zähligkeit = 8. Symmetriebeding. = C_i.

Jede dieser Punktlagen bildet Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit vollständiger Flächen- und Kantenzentrierung, sowie mit Innenzentrierung.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Sie gehören den digonalen Drehungsachsen an, beispielsweise $[\![0, \frac{1}{4}, p]\!]$ oder $[\![\frac{1}{4}, n, 0]\!]$ oder $[\![m, 0, \frac{1}{4}]\!]$ usf. Zähligkeit jeweilen = 8. Symmetriebedingung = C_2.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden 16zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{B}_h^{28}$ (Siehe Fig. 106)

Sie enthält die Untergruppen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3$. Außerdem lassen sich diese Scharen zusammenfassen in $\mathfrak{B}^9$, $\mathfrak{C}_{2v}^{20}$ $\mathfrak{C}_{2v}^{22}$ $\mathfrak{C}_{2v}^{22}$, $\mathfrak{C}_{2h}^6$ $\mathfrak{C}_{2h}^3$ $\mathfrak{C}_{2h}^3$. Charakteristisch sind $\mathfrak{B}^9$ mit $\mathfrak{C}_s^3$. Zum Koordinatenanfangspunkt wählt man ein Symmetriezentrum; die ausgezeichnete Ebenenschar (nur Gleitspiegelebenen) wird senkrecht zur c-Achse angenommen. Durch das Symmetriezentrum gehe eine zu a parallele Drehungsachse.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III). Siehe Seite 216.

IV.) $0, \frac{b}{2}, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$. V.) $\frac{a}{2}, 0, \frac{c}{2}$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

VI.) $0, \frac{b}{2}, 0$; $1, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$.

Symmetriezentren:

I. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$. II. $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$.

III. $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$. IV. $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{0\,\frac{1}{4}}$ $[001]_{0\,\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}}$.

$^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}}[010]$ $^{\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}}[010]$. $[100]^{00}$ $[100]^{\frac{1}{2}\,0}$ $[100]^{0\,\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{\frac{1}{4}\,0}$ $[001]_{\frac{3}{4}\,0}$ $[001]_{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}$.

$^{00}[010]$ $^{0\,\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{1}{2}\,0}[010]$ $^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}[010]$. $[100]^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}}$.

Spiegelebenen: $(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$; $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$.

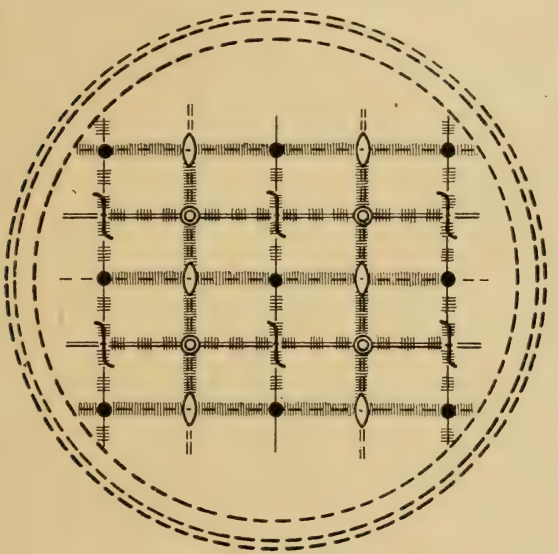


Fig. 106. $\mathfrak{B}_h^{28}$ Ebene $(001)_0$.
In prinzipieller Hinsicht gleiche Symbolik wie in Fig. 104.

Gleitspiegelebenen:

$(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{2}$. $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}$.

$(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{2}+\frac{c}{2}$. $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}+\frac{c}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$

$[\![\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![m, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, n, p]\!]$

$[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad. Jede der viererlei Arten von Symmetriezentren ist eine vierzählige Punktlage ohne Freiheitsgrad. Symmetriebedingung $= C_{2h}$.

I und II bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Flächen (010), zentrierten Kanten [010] und mit Innenzentrierung. III und IV ergeben Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Flächen (100), zentrierten Kanten [100] und mit Innenzentrierung.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Die [001] parallelen digonalen Drehungsachsen sind zugleich Schnittlinien zweier Spiegelebenen. So gehören zum Punkte $[\![0, \frac{1}{4}, p]\!]$ die Punkte $[\![0, \frac{3}{4}, \bar{p}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, p+\frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit $= 4$. Symmetriebedingung $= C_{2v}$. Auf den übrigen digonalen Drehungsachsen ist die Zähligkeit einer Punktlage $= 8$, die Symmetriebedingung $= C_2$.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Sie finden sich auf den Spiegelebenen. Die Zähligkeit ist 8, die Symmetriebedingung lautet C_s.

Die übrigbleibenden Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden 16zählig.

Die rhomboedrische Abteilung

Allgemeine Bemerkungen

Eine trigonale Achsenschar ohne senkrecht darauf stehende Symmetrieebenenschar ist in allen Klassen des Systems vorhanden. Das hinsichtlich der Achsenschar einfachste primitive Tripel kann zwei verschiedene Formen annehmen. Es bildet entweder die Periode in der Achsenrichtung mit den kürzesten Perioden in einer dazu senkrechten Ebene ein primitives Tripel, oder aber die drei ein primitives Tripel bildenden Translationen sind alle gleich lang und gleichmäßig gegen die trigonale Achse geneigt. Im ersteren Falle ist die Translationsgruppe von hexagonalem Habitus, im zweiten Falle wird sie als rhomboedrisch bezeichnet. (Siehe Seite 113/114).

Besonderer Bemerkungen bedarf es nun hinsichtlich der Wahl eines Elementarparallelepipeds.

I. Translationsgruppe vom hexagonalen Habitus

Man wird zweckmäßig das Elementarparallelepiped so wählen, daß Strukturen pseudohexagonaler Kristalle mit Leichtigkeit darauf bezogen werden können. Die trigonale Achsenschar wird vertikal gestellt, die Periode in ihrer Richtung liefert die Einheit des c-Maßstabes. Senkrecht dazu kann man AA_5 und AA_1 (siehe Fig. 107) als a und b wählen.

Beide sind gleich lang und bilden ein primitives Paar. Der Winkel, den sie einschließen, ist 120°. Ein derartig gebildetes Elementarparallelepiped ist einfachprimitiv. Es enthält von allen einander gleichwertigen Punktscharen je einen Punkt. Die durch Drehung um 120° auseinander hervorgehenden Punkte besitzen folgende Koordinaten:

I.) $[\![m', n', p']\!]$. II.) $[\![n' - m', \bar{m}', p']\!]$. III.) $[\![\bar{n}', m' - n', p']\!]$.

Der Beweis ergibt sich aus Fig. 107.

Es ist $AE = AF - FE = n' - m'$; $AH = GA = m'$

$OA = OL - AL = n' - m'$; $AP = n'$.

Wird eine Fläche mit Bravaisschen Symbolen (h k ī l) bezeichnet, wobei $i = h + k$ ist, so würde sie, bezogen auf das beschriebene Koordinatensystem, die Indizes (h′k′l′) bekommen, wo $h = h'$; $k = k'$; $l = l'$.

Ein derartiges Elementarparallelepiped würde den Spezialfall einer rhombischen Säule darstellen, wie sie als Gitterfundamentalbereich im rhombischen System bei Basisflächenzentrierung vorkommt. Zum sofortigen Vergleich müßten daher auch alle diesbezüglichen rhombischen Gruppen auf ein primitives Parallelepiped berechnet werden. Da aber für Vergleichzwecke mit kubischen Gruppen die Darstellungsart, die im Vorhergehenden gewählt wurde, ebenfalls notwendig ist, entstünde eine Komplikation, die man am besten durch Einführung eines orthohexagonalen Elementarparallelepipeds umgeht. Von Schrauf sind früher auch die Flächenkomplexe auf ein derartiges Achsensystem bezogen worden. A_3A_1 und A_3A_4 werden neben c als Kanten des Parallelepipeds gewählt (Fig. 107). (Siehe auch Fig. 56 und Seite 113.) $a = A_3A_1$ $b = A_3A_4$. b entspricht der a-Achsenlänge bei Anwendung Bravaisscher Koordinaten, so daß also b : c das maßgebende Achsenverhältnis wäre. $a = b\sqrt{3}$. Ein basiszentriertes, rechtwinkliges Elementarparallelepiped mit dem konstanten Verhältnis $a : b = \sqrt{3} : 1$ ist für eine hexagonale Translationsgruppe charakteristisch.

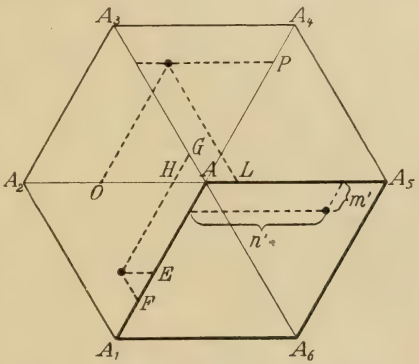


Fig. 107. Trigonale Koordinatenvertauschung bei gewöhnlich hexagonalem Elementarparallelepiped.

Die neuen (nichthomogenen) Koordinaten eines Punktes mögen mit m_1, n_1, p_1 bezeichnet werden, dann bestehen zwischen m′, n′, p′ und

m_1, n_1, p_1 folgende Transformationsgleichungen (NB. bei gleichem Anfangspunkt):

$$m_1 = \tfrac{1}{2}m'; \quad n_1 = n' - \tfrac{1}{2}m'; \quad p_1 = p'$$

dabei ist m_1 auf Einheiten bezogen, die sich zu denen von n_1 verhalten wie $\sqrt{3} : 1$. Die Parameter der Koordinatenachsen liefern die Einheitsmaßstäbe. Eine durch den Koordinatenanfangspunkt gehende trigonale Drehungsachse ergibt als gleichwertige Punkte:

I.) $[\![m_1;\ n_1;\ p_1]\!]$. II.) $[\![\tfrac{1}{2}n_1 - \tfrac{1}{2}m_1;\ -\tfrac{1}{2}n_1 - \tfrac{3}{2}m_1;\ p_1]\!]$.

III.) $[\![-\tfrac{1}{2}n_1 - \tfrac{1}{2}m_1;\ -\tfrac{1}{2}n_1 + \tfrac{3}{2}m_1;\ p_1]\!]$.

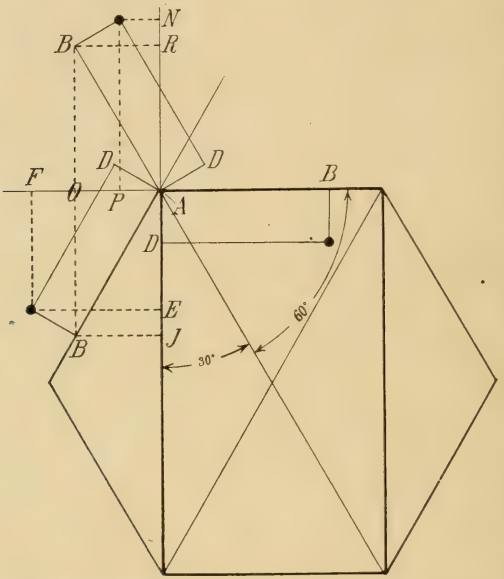


Fig. 108. Trigonale Koordinatenzusammengehörigkeit bei orthohexagonalem Elementarparallelepiped.

Außerdem gehört zu jedem Punkt derjenige Punkt, welcher infolge der Zusatztranslationen $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$ aus ihm hervorgeht.

Zum Beweis möge die Figur 108 betrachtet werden. Es ist

$$AE = AJ - EJ; \quad AF = AO + FO; \quad AN = AR + RN; \quad AP = AO - PO.$$

Nun ist $AJ = AR = AB \cos 30^0$; $EJ = RN = AD \sin 30^0$

$$AO = AB \sin 30^0; \quad FO = PO = AD \cos 30^0$$

AB ist aber $= n_1$ $\quad AD = m_1\sqrt{3}$.

Daraus erhält man:

$$AE = n_1 \cos 30 - m_1\sqrt{3} \sin 30^0 = \tfrac{1}{2}n_1\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}m_1\sqrt{3} = m_x$$
$$AF = n_1 \sin 30 + m_1\sqrt{3} \cos 30^0 = \tfrac{1}{2}n_1 + \tfrac{3}{2}m_1 = -n_2$$
$$m_2 = \frac{m_x}{\sqrt{3}} = \tfrac{1}{2}n_1 - \tfrac{1}{2}m_1 \quad \text{usw.}$$

Wir werden der Kürze halber die Punkte I, II, III wie folgt bezeichnen $[\![m_1, n_1, p]\!]$ $[\![m_2, n_2, p]\!]$ $[\![m_3, n_3, p]\!]$. Die Substitution kann für jeden Spezialfall sofort vorgenommen werden. Das Elementarparallelepiped ist doppeltprimitiv. Eine Flächenschar, die die Bravaisschen Indizes $(h\,k\,\bar{1}\,l)$ besitzt, hat nun die Indizes $(h_1\,k_1\,l_1)$, mit den Beziehungen $h_1 = k + 2h$; $k_1 = k$; $l_1 = l$. Die mittels der trigonalen Drehungsachse daraus ableitbaren Flächen besitzen hinsichtlich des orthohexagonalen Koordinatensystems die Indizes:

$h_2 = k - h$; $k_2 = \bar{h} + \bar{k} = \bar{i}$

$h_3 = \bar{h} - 2k$; $k_3 = h$, der dritte Index l bleibt unverändert.

Es sind also $h_2 = \dfrac{3k_1}{2} - \dfrac{h_1}{2}$; $\quad k_2 = -\dfrac{h_1}{2} - \dfrac{k_1}{2}$

$$h_3 = -\frac{3k_1}{2} - \frac{h_1}{2}; \quad k_3 = \frac{h_1}{2} - \frac{k_1}{2}.$$

Bei Ausführung der Berechnung ist zu bedenken, daß $(h\,k\,l)$ und $(\bar{h}\,\bar{k}\,\bar{l})$ einander parallel sind. Die Multiplikation aller Indizes mit $\bar{1}$ ist daher statthaft.

Die Ableitung der oben hingeschriebenen Bedingungen ergibt sich sofort, wenn die Achsenabschnitte einer Fläche auch für die Zwischenachsen (bei hexagonaler Auffassung) hingeschrieben werden. Ohne Rücksicht auf das Vorzeichen erhält man von rechts nach links:

$$\frac{b}{k}, \quad \frac{a}{h+2k}, \quad \frac{b}{h+k}, \quad \frac{a}{2h+k}; \quad \frac{b}{h}; \quad \frac{a}{h-k},$$

wo $a = b\sqrt{3}$. Es ist nun nur nachzusehen, mit welcher Zwischenachse (a) die Koordinatenachse (a) nach einer Drehung zusammenfällt.

Einige häufige Flächen sind in der nachfolgenden Vergleichstabelle zusammengestellt:

Bravais	Orthohexagonal	
	Stammform	Hinsichtlich der trigonalen Achse mit der Stammform gleichwertig.
(0001)	(001)	— —
$(10\bar{1}0)$	(100)	$(\bar{1}\bar{1}0)$ und $(\bar{1}10)$
$(10\bar{1}1)$	(201)	$(\bar{1}\bar{1}1)$ und $(\bar{1}11)$
$(11\bar{2}0)$	(310)	$(0\bar{1}0)$ und $(\bar{3}10)$
$(11\bar{2}1)$	(311)	$(0\bar{2}1)$ und $(\bar{3}11)$

Bezogen auf das orthohexagonale Elementarparallelepiped a, b, c lautet ein primitives Tripel von Translationen: $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}, \frac{a}{2}-\frac{b}{2}$, c. Der Drehung von 120° um eine durch den Nullpunkt gehende Achse parallel c genügt die Decktransformationsbedingung:

$$0,\ 0,\ 0;\quad \frac{\bar{1}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0;\quad \frac{\bar{\sqrt{3}}}{2}, \frac{\bar{1}}{2}, 0;\quad 0,\ 0,\ 1.$$

II. Translationsgruppe von rhomboedrischem Habitus

Trigonale Kristalle mit rhomboedrischer Translationsgruppe stehen oft in nahen Beziehungen zu Kristallen mit kubischer Raumgruppe. Zweckmäßig ist daher die Wahl desjenigen Rhomboeders zum Elementarparallelepiped, dessen Kanten ein primitives Tripel bilden. Die trigonale Achse liegt dann symmetrisch zu den drei Koordinatenachsen. Diese als a, a, a werden zu Einheitsmaßstäben. Die Winkel α, β, γ, die sie miteinander bilden, sind alle gleich groß (α, α, α). Sie stehen mit den Rhomboederwinkeln ϱ in der Beziehung:

$$\cos\alpha = \frac{-\cos\varrho}{1+\cos\varrho}.$$

Die Flächen erhalten die üblichen Millerschen Symbole, die mit denen von Bravais in der bekannten Beziehung stehen[1]). Uns interessiert besonders der Zusammenhang mit den Flächensymbolen bei Benutzung des orthohexagonalen Koordinatensystems.

Es werden:

Orthohexagonal		Millersche Bezeichnungsweise, bezogen auf Rhomboedersysteme
(001)	zu	(111)
(201)	zu	(100)
($\bar{1}$11)	zu	(010)
($\bar{1}\bar{1}$1)	zu	(001)
allgemein		
($h_1 k_1 l_1$)	zu	$(2h_1+2l_1;\ -h_1+3k_1+2l_1;\ -h_1-3k_1+2l_1) = (h^* k^* l^*)$
oder		
$(2h^*-k^*-l^*;\ k^*-l^*;\ h^*+k^*+l^*)$		
$= (h_1 k_1 l_1)$	zu	$(h^* k^* l^*)$

Die durch den Nullpunkt gehende trigonale Drehungsachse ordnet dem Punkt xyz die Punkte zxy und yzx zu. Zu der Fläche ($h^* k^* l^*$)

[1]) Sind ($h k \bar{i} l$) die Bravaisschen Indizes einer Fläche, ($h^* k^* l^*$) die Millerschen, so bestehen die Beziehungen:

$$h^* = 2h+k+l;\ k^* = k-h+l;\ l^* = -2k-h+l$$

$$h = \frac{h^*-k^*}{3};\ k = \frac{k^*-l^*}{3};\ \bar{i} = \bar{h}+\bar{k};\ l = \frac{h^*+k^*+l^*}{3}.$$

gehören die Flächen (k*l*h*) und (l*h*k*). Der Drehung von 120° um eine durch den Nullpunkt gehende trigonale Achse genügt die Decktransformationsbedingung:

$$0, 0, 0;\ \cos\alpha, \cos\alpha, 1;\ 1, \cos\alpha, \cos\alpha;\ \cos\alpha, 1, \cos\alpha.$$

Manchmal wird es auch erwünscht sein, eine rhomboedrische Struktur mit einer hexagonalen Struktur zu vergleichen, indem man beide auf ein orthohexagonales Elementarparallelepiped bezieht. b : c des Elementarparallelepipeds kann dann dem Achsenverhältnis gleich sein, das wir der rhomboedrisch kristallisierenden Substanz zugrunde legen. Weiterhin ergibt sich, daß drei basiszentrierte Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds ineinandergestellt sind mit den Verschiebungsvektoren: $[\![0, 0, 0]\!]$ (als Grundform), $[\![\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}]\!]$ und $[\![\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}]\!]$. Das derart konstruierte orthohexagonale Elementarparallelepiped ist sechsfachprimitiv. Zu jeder Punktlage, die bei hexagonaler Translationsgruppe vorhanden wäre, gehören $[\![m_1 + \frac{1}{3}, n_2, p + \frac{1}{3}]\!]$ und $[\![m_1 + \frac{2}{3}, n_2, p + \frac{2}{3}]\!]$, sowie infolge der Basiszentrierung, die $[\![m_1, n_1, p]\!]$ $[\![m_1 + \frac{1}{2}, n_2 + \frac{1}{2}, p]\!]$ zuordnet, weiterhin $[\![m_1 + \frac{5}{6}, n_2 + \frac{1}{2}, p + \frac{1}{3}]\!]$ und $[\![m_1 + \frac{1}{6}, n_2 + \frac{1}{2}, p + \frac{2}{3}]\!]$.

$\mathfrak{C}_3$. Klasse der rhomboedrischen Tetartoedrie (Trigonal pyramidale Klasse)

Die Raumgruppen $\mathfrak{C}_3^1 - \mathfrak{C}_3^3$ besitzen die hexagonale Translationsgruppe. Das orthohexagonale Elementarparallelepiped mit $b\sqrt{3} = a$, b, c ist doppeltprimitiv. $\alpha, \beta, \gamma = 90°$. Ein primitives Tripel heißt $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}, \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$, c. Der Koordinatenanfangspunkt liegt immer auf einer trigonalen Achse. Die drei ersten Decktransformationsbedingungen sind gemeinsam:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0;\ 1, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, 1.$ II.) $\frac{a}{2}, \frac{\overline{b}}{2}, 0;\ 1, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, 1.$

III.) $0, 0, c;\ 1, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, 1.$

Raumgruppe $\mathfrak{C}_3^1$

Alle trigonalen Achsen sind Drehungsachsen. Einzige Untergruppe ist $\mathfrak{C}_1$.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe oben. IV.) $0, 0, 0;\ \frac{\overline{1}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0;\ \frac{\overline{\sqrt{3}}}{2}, \frac{\overline{1}}{2}, 0;\ 0, 0, 1.$

Trigonale Drehungsachsen:

$[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$. $[001]_{\frac{2}{3}0}$ $[001]_{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}$. $[001]_{\frac{1}{3}0}$ $[001]_{\frac{5}{6}\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m_1, n_1, p]\!]$ $[\![m_2, n_2, p]\!]$ $[\![m_3, n_3, p]\!]$ $[\![m_1 + \frac{1}{2}, n_1 + \frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![m_2 + \frac{1}{2}, n_2 + \frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![m_3 + \frac{1}{2}, n_3 + \frac{1}{2}, p]\!]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Auf einer der trigonalen Achsen. Es gehören zusammen: $[\![0\,0\,p]\!]$ und $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,p]\!]$ oder $[\![\frac{2}{3}\,0\,p]\!]$ und $[\![\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,p]\!]$ oder $[\![\frac{1}{3}\,0\,p]\!]$ und $[\![\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,p]\!]$. Zähligkeit $= 2$. Symmetriebedingung $= C_3$. Die Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierter Basis. (Die Achsenverteilung ist aus Figur 110 auf Seite 233 ersichtlich.)

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden sechszählig.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_3^2$

Vorhandene Untergruppe $\mathfrak{C}_1$. Alle trigonalen Achsen sind links gewundene Schraubenachsen.

Die einfachste Decktransformationsbedingung IV. lautet:

IV.) $0, 0, \frac{c}{3}$; $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0$; $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0$; $0, 0, 1$.

Trigonale Schraubenachsen von gleicher Lage wie die trigonalen Drehungsachsen der Gruppe $\mathfrak{C}_3^1$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m_1, n_1, p]\!]$ $[\![m_2, n_2, p+\frac{1}{3}]\!]$ $[\![m_3, n_3, p+\frac{2}{3}]\!]$ $[\![m_1+\frac{1}{2}, n_1+\frac{1}{2}, p]\!]$
$[\![m_2+\frac{1}{2}, n_2+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{3}]\!]$ $[\![m_3+\frac{1}{2}, n_3+\frac{1}{2}, p+\frac{2}{3}]\!]$.

Alle Punkte sind mit drei Freiheitsgraden, ohne Symmetriebedingung, sechszählig.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_3^3$

Sie ist ganz analog wie $\mathfrak{C}_3^2$ gebaut, die Schraubenachsen besitzen nur umgekehrten Windungssinn. Die Decktransformationsbedingung IV.) heißt:

$0, 0, \frac{2c}{3}$; $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0$; $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0$; $0, 0, 1$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m_1, n_1, p]\!]$ $[\![m_2, n_2, p+\frac{2}{3}]\!]$ $[\![m_3, n_3, p+\frac{1}{3}]\!]$ $[\![m_1+\frac{1}{2}, n_1+\frac{1}{2}, p]\!]$
$[\![m_2+\frac{1}{2}, n_2+\frac{1}{2}, p+\frac{2}{3}]\!]$ $[\![m_3+\frac{1}{2}, n_3+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{3}]\!]$.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_3^4$

Die Raumgruppe $\mathfrak{C}_3^4$ besitzt als primitives Tripel drei gleichmäßig gegen die trigonale Achse geneigte Strecken. Sie bilden die Kanten eines Rhomboeders, das zugleich Elementarparallelepiped ist. (a, a, a) (α, α, α). (Fig. 57 auf Seite 114).

Die Decktransformationsbedingungen lauten:

I.) $a, 0, 0$; $1, \cos\alpha, \cos\alpha$; $\cos\alpha, 1, \cos\alpha$; $\cos\alpha, \cos\alpha, 1$.
II.) $0, a, 0$; $1, \cos\alpha, \cos\alpha$; $\cos\alpha, 1, \cos\alpha$; $\cos\alpha, \cos\alpha, 1$.
III.) $0, 0, a$; $1, \cos\alpha, \cos\alpha$; $\cos\alpha, 1, \cos\alpha$; $\cos\alpha, \cos\alpha, 1$.
IV.) $0, 0, 0$; $\cos\alpha, \cos\alpha, 1$; $1, \cos\alpha, \cos\alpha$; $\cos\alpha, 1, \cos\alpha$.

Trigonale Drehungsachse. $[111]^{00}$.

Trigonale Schraubenachsen: $[111]^{\frac{1}{3}\frac{2}{3}}$ und $[111]^{\frac{2}{3}\frac{1}{3}}$ von verschiedenem Windungssinn.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![p, m, n]\!]$ $[\![n, p, m]\!]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad: Auf [111] also gemäß der Bedingung $[\![m, m, m]\!]$. Symmetrie = C_3. Zähligkeit = 1. Das gebildete Gitter ist von der Form des Elementarrhomboeders.

Die orthohexagonale Darstellung (Fig. 109) ergibt folgende Beziehungen. $a = b\sqrt{3}$.

Primitives Tripel: $\frac{a}{6} + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$;

$\frac{a}{6} + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$; $\frac{a}{3} + \frac{c}{3}$.

Das Elementarparallelepiped ist 6fachprimitiv.

Die trigonalen Drehungsachsen heißen nun:

$[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{2}{3}0}$

$[001]_{\frac{5}{6}\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{3}0}$.

Die trigonalen Schraubenachsen haben die Lage:

$[001]_{\frac{1}{6}\frac{1}{6}}$ $[001]_{0\frac{2}{3}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{6}}$ $[001]_{\frac{5}{6}\frac{1}{6}}$

$[001]_{\frac{2}{3}\frac{2}{3}}$ $[001]_{\frac{1}{3}\frac{2}{3}}$ $[001]_{0\frac{1}{3}}$ $[001]_{\frac{1}{3}\frac{1}{3}}$

$[001]_{\frac{2}{3}\frac{1}{3}}$ $[001]_{\frac{5}{6}\frac{5}{6}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{5}{6}}$ $[001]_{\frac{1}{6}\frac{5}{6}}$.

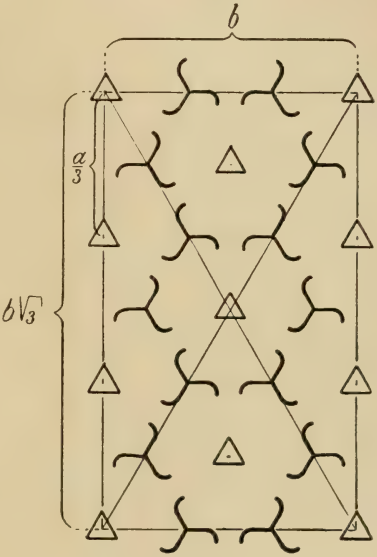


Fig. 109.

$\mathfrak{C}_3^4$ Orthohexagonales Elementarparallelepiped. Ebene (001) mit den darauf senkrecht stehenden trigonalen Achsen.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\frac{1}{3}n - \frac{1}{2}m, -\frac{1}{2}n - \frac{3}{2}m, p]\!]$ $[\![-\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}m, -\frac{1}{2}n + \frac{3}{2}m, p]\!]$,

ferner zu jedem dieser drei Werte und zu allen daraus entstehenden

$[\![x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![x + \frac{1}{3}, y, z + \frac{1}{3}]\!]$ $[\![x + \frac{2}{3}, y, z + \frac{2}{3}]\!]$,

so daß schließlich 18 einander zugeordnete Koordinatenwerte resultieren.

$\mathfrak{C}_{3i}$. Paramorph hemiedrische Klasse der rhomboedrischen Abteilung (Trigonal rhomboedrische Klasse)

Die trigonale Drehungsachse ist zugleich sechszählige Drehspiegelachse.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{3i}^1$

Die Translationsgruppe ist von hexagonalem Habitus. Das Elementarparallelepiped ist orthohexagonal. $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}, \frac{a}{2}-\frac{b}{2}$, c bilden ein primitives Tripel; der Größe nach ist $a = b\sqrt{3}$.

Die Untergruppen lauten: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_3^1$, $\mathfrak{C}_i$.

Einfachste Decktransformationsbedingungen: (Koordinatenanfangspunkt im Schnittpunkt einer trigonalen Drehungsachse mit einem Symmetriezentrum).

I.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0$; $1,0,0$; $0,1,0$; $0,0,1$. II.) $\frac{a}{2}, \frac{\bar{b}}{2}, 0$; $1,0,0$; $0,1,0$; $0,0,1$.

III.) $0,0,c$; $1,0,0$; $0,1,0$; $0,0,1$. IV.) $0,0,0$; $\frac{\bar{1}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0$; $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\bar{1}}{2}, 0$; $0,0,1$.

V.) $0,0,0$; $\bar{1},0,0$; $0,\bar{1},0$; $0,0,\bar{1}$.

Symmetrieelemente:

Symmetriezentren: I.) $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$. — II.) $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$.

III.) $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$.

IV.) $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$.

Trigonale Drehungsachsen:

$[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; ferner $[001]_{\frac{2}{3}0}$ $[001]_{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{1}{3}0}$ $[001]_{\frac{5}{6}\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m_1, n_1, p]\!]$ $[\![m_2, n_2, p]\!]$ $[\![m_3, n_3, p]\!]$ $[\![\bar{m}_1, \bar{n}_1, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}_2, \bar{n}_2, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}_3, \bar{n}_3, \bar{p}]\!]$

$[\![m_1+\frac{1}{2}, n_1+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![m_2+\frac{1}{2}, n_2+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![m_3+\frac{1}{2}, n_3+\frac{1}{2}, p]\!]$

$[\![\bar{m}_1+\frac{1}{2}, \bar{n}_1+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}_2+\frac{1}{2}, \bar{n}_2+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}_3+\frac{1}{2}, \bar{n}_3+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$.

Die Drehspiegelebenen sind die Horizontalebenen durch die Symmetriezentren.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad: Die den Symmetriezentren I.) und II.) entsprechenden Punkte liegen auf trigonalen Drehungsachsen. Die Zähligkeit ist jeweilen = 2, die Symmetriebedingung lautet C_{3i}. Die Gitter sind von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierter Basis (trigonale gleichseitige Säulen).

Die Symmetriezentren III.) und IV.) entsprechen sechszähligen Punktlagen. Die einzige Bedingung ist = C_i.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Sie gehören den trigonalen Drehungsachsen an. Gleichwertig sind beispielsweise

$[\![0\,0\,p]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,p]\!]$ $[\![0\,0\,\bar{p}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\bar{p}]\!]$ oder $[\![\frac{2}{3}\,0\,p]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,p]\!]$ $[\![\frac{1}{3}\,0\,\bar{p}]\!]$ $[\![\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,\bar{p}]\!]$.

Zähligkeit = 4. Punktlagen mit drei Freiheitsgraden sind 12zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{3i}^2$

Da neben $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_i$ noch $\mathfrak{C}_3^4$ eine Untergruppe ist, hat das primitive Tripel der Translationen rhomboedrische Gestalt. Als Elementarparallelepiped betrachten wir das primitive Rhomboeder mit $a = b = c$; $\alpha = \beta = \gamma$. Ein auf der trigonalen Drehungsachse liegendes Symmetriezentrum wird Koordinatenanfangspunkt.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.) a, 0, 0; $1, \cos\alpha, \cos\alpha$; $\cos\alpha, 1, \cos\alpha$; $\cos\alpha, \cos\alpha, 1$.

II.) 0, a, 0; $1, \cos\alpha, \cos\alpha$; $\cos\alpha, 1, \cos\alpha$; $\cos\alpha, \cos\alpha, 1$.

III.) 0, 0, a; $1, \cos\alpha, \cos\alpha$; $\cos\alpha, 1, \cos\alpha$; $\cos\alpha, \cos\alpha, 1$.

IV.) 0, 0, 0; $\cos\alpha, \cos\alpha, 1$; $1, \cos\alpha, \cos\alpha$; $\cos\alpha, 1, \cos\alpha$.

V.) 0, 0, 0; $\bar{1}, \cos\alpha, \cos\alpha$; $\cos\alpha, 1, \cos\alpha$; $\cos\alpha, \cos\alpha, \bar{1}$.

Symmetriezentren: I. = $[\![0\,0\,0]\!]$, ferner II. = $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$.

III. = $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$. IV. = $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$.

Trigonale Drehungsachsen: $[111]^{00}$.

Trigonale Schraubenachsen: $[111]^{\frac{1}{3}\frac{2}{3}}$ $[111]^{\frac{2}{3}\frac{1}{3}}$.

Die Drehspiegelebenen sind Ebenen der Symmetriezentren senkrecht zu $[111]^{00}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![p, m, n]\!]$ $[\![n, p, m]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{p}, \bar{m}, \bar{n}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{p}, \bar{m}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad: $[\![0\,0\,0]\!]$ und $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ bilden jedes für sich Gitter von der Form des primitiven Rhomboeders. Die Zähligkeit ist somit = 1, die Symmetriebedingung = C_{3i}.

Die Symmetriezentren III und IV bilden Gitter von Rhomboedern 2 R. Die Zähligkeit ist für jede Punktlage drei, die Symmetriebedingung lautet C_i.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Sie stellen sich bei beliebigen m ein, wenn m = n = p ist. Bei Zweizähligkeit ist die Symmetriebedingung = C_3.

Alle übrigen Punkte sind mit drei Freiheitsgraden sechszählig. Die Darstellung mittels eines orthohexagonalen Elementarparallelepipeds läßt sich nach den früheren Erörterungen leicht bewerkstelligen. Die Symmetriezentren III und IV erhalten bereits relativ komplizierte Symbole.

$\mathfrak{C}_{3v}$. Hemimorph-hemiedrische Klasse der rhomboedrischen Abteilung (Ditrigonal pyramidale Klasse)

Den Raumgruppen $\mathfrak{C}_{3v}^1 - \mathfrak{C}_{3v}^4$ ist eine hexagonale Translationsgruppe eigen, so daß man sie zweckmäßig auf ein orthohexagonales Elementarparallelepiped beziehen kann. Den Koordinatenanfangspunkt legt man in eine trigonale Achse. Die drei ersten Decktransformationsbedingungen lauten:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) $\frac{a}{2}, \frac{\bar{b}}{2}, 0$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

III.) 0, 0, c; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Der Größe nach ist $a = b\sqrt{3}$.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{3v}^1$ (Fig. 110)

Sie enthält die Untergruppen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_3^1$, $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$. Jede Spiegelebene enthält alle drei Drehungsachsen.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe oben.

IV.) $0, 0, 0; \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0; \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0; 0, 0, 1$. V.) $0, 0, 0; 1, 0, 0; 0, \bar{1}, 0; 0, 0, 1$.

Trigonale Drehungsachsen:

$[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$. $[001]_{\frac{2}{3}0}$ $[001]_{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}$. $[001]_{\frac{1}{3}0}$ $[010]_{\frac{5}{6}\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$; ferner $(310)_0$ und $(\bar{3}10)_0$.

Gleitspiegelebenen: $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}$;

$(310)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $(\bar{3}10)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. } der Größe nach $\frac{a}{2}$, Richtung durch die Ebenenspur gegeben.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[m_1, n_1, p]$ $[m_2, n_2, p]$ $[m_3, n_3, p]$ $[m_1, \bar{n}_1, p]$ $[m_2, \bar{n}_2, p]$ $[m_3, \bar{n}_3, p]$

$[m_1 + \frac{1}{2}, n_1 + \frac{1}{2}, p]$ $[m_2 + \frac{1}{2}, n_2 + \frac{1}{2}, p]$ $[m_3 + \frac{1}{2}, n_3 + \frac{1}{2}, p]$

$[m_1 + \frac{1}{2}, \bar{n}_1 + \frac{1}{2}, p]$ $[m_2 + \frac{1}{2}, \bar{n}_2 + \frac{1}{2}, p]$ $[m_3 + \frac{1}{2}, \bar{n}_3 + \frac{1}{2}, p]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Jede trigonale Drehungsachse ist Schnittlinie dreier Symmetrieebenen. Es gehören zusammen: [0 0 p] und $[\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ p]$, ferner $[\frac{2}{3}.0\ p]$ und $[\frac{1}{6}\ \frac{1}{2}\ p]$, ferner $[\frac{1}{3}\ 0\ p]$ und $[\frac{5}{6}\ \frac{1}{2}\ p]$. Die Zähligkeit ist jeweilen 2, die Symmetriebedingung = C_{3v}. Die entstehenden Gitter sind von der Form des basiszentrierten Elementarparallelepipeds (trigonale Säulen).

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden: Sie gehören den Spiegelebenen allein an. Gleichwertig sind z. B. [m, 0, p] $[\frac{1}{2}\bar{m}, \frac{3}{2}m, p]$ $[\frac{1}{2}\bar{m}, \frac{3}{2}m, p]$ $[m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p]$ $[\frac{1}{2}\bar{m} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\bar{m} + \frac{1}{2}, p]$ $[\frac{1}{2}\bar{m} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}m + \frac{1}{2}, p]$. Auf

einer Spiegelebene (310) liegen Punkte, deren m und n in einer Beziehung $n = r - 3m$ stehen, wo r irgend eine positive oder negative ganze Zahl (einschließlich Null) ist. Auf $(\bar{3}10)$-Spiegelebenen befinden sich Punkte mit der Beziehung $n = r + 3m$. So gehören zum Punkt:

$[\![m, 3m, p]\!]$ die Punkte $[\![m, 3\bar{m}, p]\!]$ $[\![2\bar{m}, 0, p]\!]$ $[\![m + \frac{1}{2}, 3m + \frac{1}{2}, p]\!]$
$[\![m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - 3m, p]\!]$ $[\![\frac{1}{2} - 2m, \frac{1}{2}, p]\!]$.

Zähligkeit jeweilen = 6. Symmetriebedingung = C_s.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden 12zählig.

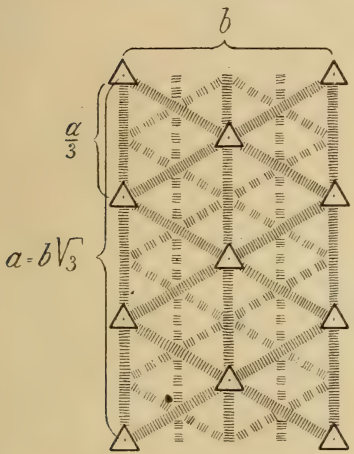


Fig. 110. $\mathfrak{C}_{3v}^1$ Symmetrieebenen und trigonale Achsen senkrecht auf (001) der orthohexagonalen Darstellung.

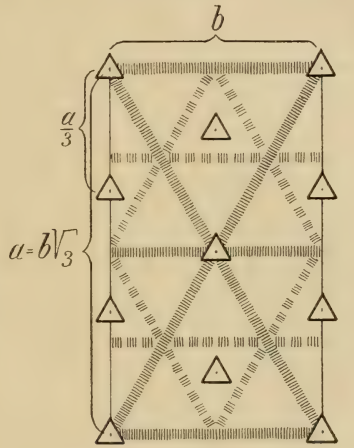


Fig. 111. $\mathfrak{C}_{3v}^2$ Symmetrieebenen und trigonale Achsen senkrecht auf (001) der orthohexagonalen Darstellung.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{3v}^2$ (Siehe Fig. 111)

Sie enthält ebenfalls die Untergruppen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_3^1$, $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$. Von den ursprünglich drei Arten trigonaler Drehungsachsen liegt aber nur eine in den Spiegelebenen, die beiden anderen Arten werden durch die Spiegelung vertauscht. Hinsichtlich der Achsenlage ist im folgenden das orthohexagonale Elementarparallelepiped gleich angenommen wie bisher. Die Spiegelebene verläuft dann nicht wie üblich von vorn nach hinten, sondern von links nach rechts. Diesem Umstand ist in angewandten Fällen besondere Beachtung zu schenken.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 232.

IV.) $0, 0, 0$; $\bar{\frac{1}{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0$; $\frac{\sqrt{3}}{2}, \bar{\frac{1}{2}}, 0$; $0, 0, 1$. V.) $0, 0, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, 1$.

Trigonale Drehungsachsen:
$[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$. Ferner $[001]_{\frac{2}{3}0}$ $[001]_{\frac{1}{3}0}$ $[001]_{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{5}{6}\frac{1}{2}}$.
Spiegelebenen: $(100)_0$. $(100)_{\frac{1}{2}}$. $(110)_0$ sowie $(1\bar{1}0)_0$.
Gleitspiegelebenen: $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{b}{2}$;
$(110)_{\frac{1}{2}}$ und $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$ der Größe nach Gleitkomponente $\frac{b}{2}$, die Richtung ist durch die Ebenenspur gegeben. $\left(\frac{b}{2}+\frac{a}{4}\right)$ usw.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m_1, n_1, p]\!]$ $[\![m_2, n_2, p]\!]$ $[\![m_3, n_3, p]\!]$ $[\![\bar{m}_1, \bar{n}_1, p]\!]$ $[\![\bar{m}_2, \bar{n}_2, p]\!]$ $[\![\bar{m}_3, \bar{n}_3, p]\!]$
$[\![m_1+\frac{1}{2}, n_1+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![m_2+\frac{1}{2}, n_2+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![m_3+\frac{1}{2}, n_3+\frac{1}{2}, p]\!]$
$[\![\bar{m}_1+\frac{1}{2}, \bar{n}_1+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}_2+\frac{1}{2}, \bar{n}_2+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}_3+\frac{1}{2}, \bar{n}_3+\frac{1}{2}, p]\!]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad: Die trigonalen Drehungsachsen $[001]_{00}$ und $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ sind Schnittlinien von Spiegelebenen. Punkte darauf sind daher zweizählig, mit der Symmetriebedingung $= C_{3v}$. Auf den übrigen Drehungsachsen ist die Zähligkeit einer Punktlage, bei der einfachen Symmetriebedingung $= C_3$, vier.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden: Sie gehören den Spiegelebenen an. Auf Spiegelebenen (110) gelegene Punkte müssen der Bedingung genügen $m+n=r$, wo $r=0$ oder $=$ irgend einer ganzen positiven oder negativen Zahl ist. Auf Spiegelebenen $(1\bar{1}0)$ liegen Punkte mit $m-n=r$. Ein vollständiger Komplex lautet zum Beispiel:

$[\![0, n, p]\!]$ $[\![\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n, p]\!]$ $[\![-\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n, p]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$
$[\![\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}n, p]\!]$ $[\![\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}n, p]\!]$.

Zähligkeit jeweilen $= 6$. Symmetriebedingung $= C_s$.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden 12zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{3v}^3$

Sie enthält die Untergruppen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_3^1$, $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$. Alle Symmetrieebenen sind Gleitspiegelebenen. Diejenigen mit der Gleitkomponente $\frac{c}{2}$ gehen durch alle drei trigonalen Drehungsachsenarten. Der Koordinatenanfangspunkt hat beliebige Lage auf einer Drehungsachse.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:
I.)—III.) siehe Seite 232.
IV.) $0, 0, 0$; $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0$; $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0$; $0, 0, 1$. V.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $1, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$.

Trigonale Drehungsachsen wie $\mathfrak{C}_{3v}^1$.

Gleitspiegelebenen mit der Gleitkomp. $\frac{c}{2}$: $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$; $(310)_0$, $(\bar{3}10)_0$.

Ferner sind Gleitspiegelebenen: $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$, $(310)_{\frac{1}{2}}$ $(\bar{3}10)_{\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m_1, n_1, p]\!]$ $[\![m_2, n_2, p]\!]$ $[\![m_3, n_3, p]\!]$ $[\![m_1, \bar{n}_1, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![m_2, n_2, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![m_3, \bar{n}_3, p+\tfrac{1}{2}]\!]$

$[\![m_1+\tfrac{1}{2}, n_1+\tfrac{1}{2}, p]\!]$ $[\![m_2+\tfrac{1}{2}, n_2+\tfrac{1}{2}, p]\!]$ $[\![m_3+\tfrac{1}{2}, n_3+\tfrac{1}{2}, p]\!]$

$[\![m_1+\tfrac{1}{2}, \bar{n}_1+\tfrac{1}{2}, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $m_2+\tfrac{1}{2}, \bar{n}_2+\tfrac{1}{2}, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![m_3+\tfrac{1}{2}, \bar{n}_3+\tfrac{1}{2}, p+\tfrac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Es sind das Punkte der allgemeinen Symbole $[\![0\,0\,p]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,p]\!]$ oder $[\![\tfrac{2}{3}\,0\,p]\!]$ $[\![\tfrac{1}{6}\,\tfrac{1}{2}\,p]\!]$ oder $[\![\tfrac{1}{3}\,0\,p]\!]$ $[\![\tfrac{5}{6}\,\tfrac{1}{2}\,p]\!]$. So gehören zu $[\![0, 0, p]\!]$: $[\![\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, p]\!]$ $[\![0, 0, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, p+\tfrac{1}{2}]\!]$. Die Zähligkeit ist 4, die Symmetriebedingung $= C_3$. Die Punkte bilden Gitter von der Form des basiszentrierten Elementarparallelepipeds mit zentrierten Kanten [001] und mit Innenzentrierung.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden 12zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{3v}^4$

Diese Raumgruppe schließt sich an $\mathfrak{C}_{3v}^2$ an. Bei gleicher Art der Untergruppen wie $\mathfrak{C}_{3v}^3$, besitzt sie die Symmetrieebenenverteilung wie $\mathfrak{C}_{3v}^2$.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 232.

IV.) $0, 0, 0;\ \bar{1}, \bar{1}, 0;\ \bar{1}, 1, 0;\ 0, 0, 1.$ V.) $0, 0, \frac{c}{2};\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, 1.$

Symmetrieelemente: Trigonale Drehungsachsen wie $\mathfrak{C}_{3v}^2$.

Gleitspiegelebenen: $(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_0$ $(1\bar{1}0)_0$ einerseits,

$(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$ anderseits.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m_1, n_1, p]\!]$ $[\![m_2, n_2, p]\!]$ $[\![m_3, n_3, p]\!]$ $[\![\bar{m}_1, n_1, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}_2, n_2, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}_3, n_3, p+\tfrac{1}{2}]\!]$

$[\![m_1+\tfrac{1}{2}, n_1+\tfrac{1}{2}, p]\!]$ $[\![m_2+\tfrac{1}{2}, n_2+\tfrac{1}{2}, p]\!]$ $[\![m_3+\tfrac{1}{2}, n_3+\tfrac{1}{2}, p]\!]$

$[\![\bar{m}_1+\tfrac{1}{2}, n_1+\tfrac{1}{2}, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}_2+\tfrac{1}{2}, n_2+\tfrac{1}{2}, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}_3+\tfrac{1}{2}, n_3+\tfrac{1}{2}, p+\tfrac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Nur diejenigen auf den trigonalen Achsen $[001]_{00}$ bezw. $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ bilden ein Gitter der vorhin beschriebenen Art. Die Zusammengehörigkeit der Punktlagen auf den übrigen trigonalen Drehungsachsen stellt sich folgendermaßen dar. $[\![\frac{1}{3}, 0, p]\!]$ $[\![\frac{2}{3}, 0, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{5}{6}, \frac{1}{3}, p]\!]$ $[\![\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$. Die Zähligkeit ist in beiden Fällen 4. Die Symmetriebedingung lautet $= C_3$.

Alle übrigen Punktlagen sind, ohne Symmetriebedingung, mit drei Freiheitsgraden 12zählig.

Die Raumgruppen $\mathfrak{C}_{3v}^5$ und $\mathfrak{C}_{3v}^6$ lassen sich auf ein rhomboedrisches, primitives Elementarparallelepiped beziehen.

$a = b = c;\ \alpha = \beta = \gamma.$ a, a, a = primitives Tripel.

Die vier ersten Decktransformationsbedingungen sind gemeinsam:

I.) a, 0, 0; 1, cos α, cos α; cos α, 1, cos α; cos α, cos α, 1.

II.) 0, a, 0; 1, cos α, cos α; cos α, 1, cos α; cos α, cos α, 1.

III.) 0, 0, a; 1, cos α, cos α; cos α, 1, cos α; cos α, cos α, 1.

IV.) 0, 0, 0; cos α, cos α, 1; 1, cos α, cos α; cos α, 1, cos α.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{3v}^5$

Sie enthält die Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_3^4$, $\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_3^3\,\mathfrak{C}_s^3$. Der Koordinatenanfangspunkt hat beliebige Lage auf einer trigonalen Drehungsachse.

Die V. Decktransformationsbedingung lautet:

0, 0, 0; cos α, 1, cos α; 1, cos α, cos α; cos α, cos α, 1.

Trigonale Drehungsachse: $[111]^{00}$.

Trigonale Schraubenachsen: $[111]^{\frac{1}{3}\frac{2}{3}}$ $[111]^{\frac{2}{3}\frac{1}{3}}$.

Spiegelebenen: $(1\bar{1}0)_0$ $(\bar{1}01)_0$ $(01\bar{1})_0$.

Gleitspiegelebenen:

$(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$ $(\bar{1}01)_{\frac{1}{2}}$ $(01\bar{1})_{\frac{1}{2}}$ (Gleitkomponente $\frac{a_x}{2}+\frac{a_y}{2}$ usw.).

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

[[m, n, p]] [[p, m, n]] [[n, p, m]] [[n, m, p]] [[m, p, n]] [[p, n, m]].

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Beliebige Punkte [[m, n, p]] mit m = n = p liegen auf der Schnittlinie dreier Spiegelebenen, die zugleich trigonale Drehungsachse ist. Zähligkeit = 1. Symmetriebedingung = C_{3v}. Die Punkte bilden Gitter von der Form des primitiven Rhomboeders.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Sind zwei der 3 Koordinatenwerte eines Punktes einander gleich, so liegt der Punkt auf einer Spiegelebene und besitzt nur die Zähligkeit 3.

Alle übrigen Punktlagen sind sechszählig und besitzen drei Freiheitsgrade.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{3v}^6$

Ihr gehören die Untergruppen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_3^4$, $\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4$ an. Bei gleicher Nullpunktswahl lautet die V. Decktransformationsbedingung:

V.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}$; cos α, 1, cos α; 1, cos α, cos α; cos α, cos α, 1.

Trigonale Drehungsachse: $[111]^{00}$.

Trigonale Schraubenachsen: $[111]^{\frac{1}{2}\frac{2}{3}}$ $[111]^{\frac{2}{3}\frac{1}{3}}$.

Gleitspiegelebenen: $(1\bar{1}0)_0$ $(\bar{1}01)_0$ $(01\bar{1})_0$ Gleitkomp. $\frac{a_x}{2}+\frac{a_y}{2}+\frac{a_z}{2}$,

$(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{a_z}{2}$, $(\bar{1}01)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{a_y}{2}$, $(01\bar{1})_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{a_x}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[m, n, p]$ $[p, m, n]$ $[n, p, m]$ $[n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$ $[m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}]$ $[p+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad: Zu $[m, m, m]$ gehört $[m+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}]$. Die Zähligkeit ist zwei, die Symmetriebedingung $= C_3$. Die gebildeten Gitter sind von der Form des Elementarrhomboeders mit Innenzentrierung.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden sechszählig.

$\mathfrak{D}_3$. Enantiomorph-hemiedrische Klasse der rhomboedrischen Abteilung (Trigonal trapezoedrische Klasse)

Für die Raumgruppen $\mathfrak{D}_3 - \mathfrak{D}_6$ ist das primitive Tripel der Translationen von hexagonalem Habitus. Zur Darstellung ist daher ein orthohexagonales Elementarparallelepiped gewählt mit $a = b\sqrt{3}$. $\alpha, \beta, \gamma = 90^0$.

Die drei ersten Decktransformationsbedingungen lauten:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0$; $1, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, 1$. II.) $\frac{a}{2}, \frac{\bar{b}}{2}, 0$; $1, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, 1$.

III.) $0, 0, c$; $1, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, 1$.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_3^1$

Ihr gehören die Untergruppen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_3^1$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$ an. Eine digonale Drehungsachse verbindet alle drei verschiedenartigen trigonalen Drehungsachsen.

Zusätzliche einfachste Decktransformationsbedingungen bei Wahl des Koordinatenanfangspunktes im Schnittpunkt der digonalen und trigonalen Drehungsachsen:

IV.) $0, 0, 0$: $\frac{\bar{1}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0$; $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\bar{1}}{2}, 0$; $0, 0, 1$. V.) $0, 0, 0$; $1, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$: $0, 0, \bar{1}$.

Die Lage der digonalen Drehungsachsen stimmt nicht mit der überein, die man gewöhnlich den diesbezüglichen Kristallen zuerteilt. Eine Drehungsachse verläuft von vorn nach hinten, statt wie üblich von links nach rechts. Würde man das Elementarparallelepiped um 90^0 drehen, so würde die Aufstellung richtig. In angewandten Fällen ist darauf zu achten, die abweichende Stellung ist hier beibehalten worden, um den Gegensatz zu der folgenden Raumgruppe unverfälscht zum Ausdruck zu bringen.

Trigonale Drehungsachsen:

$[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$. $[001]_{\frac{2}{3}0}$ $[001]_{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}$. $[001]_{\frac{1}{3}0}$ $[001]_{\frac{5}{6}\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen:

$[100]^{00}$ $[100]^{\frac{1}{2}0}$; $[100]^{0\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$. $[130]^{00}$ $[1\bar{3}0]^{00}$; $[130]^{0\frac{1}{2}}$ $[130]^{0\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen:

$[100]^{\frac{1}{4}\,0}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,0}$; $[100]^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}$. $[130]^{\frac{1}{2}\,0}$ $[1\bar{3}0]^{\frac{1}{2}\,0}$; $[130]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$ $[1\bar{3}0]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m_1, n_1, p]\!]$ $[\![m_2, n_2, p]\!]$ $[\![m_3, n_3, p]\!]$ $[\![m_1, \bar{n}_1, \bar{p}]\!]$ $[\![m_2, \bar{n}_2, \bar{p}]\!]$ $[\![m_3, \bar{n}_3, \bar{p}]\!]$

$[\![m_1+\frac{1}{2}, n_1+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![m_2+\frac{1}{2}, n_2+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![m_3+\frac{1}{2}, n_3+\frac{1}{2}, p]\!]$

$[\![m_1+\frac{1}{2}, \bar{n}_1+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![m_2+\frac{1}{2}, \bar{n}_2+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![m_3+\frac{1}{2}, \bar{n}_3+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

$[\![0\,0\,0]\!]$ mit $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$, ferner $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ mit $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$, ferner $[\![\frac{2}{3}\,0\,0]\!]$ mit $[\![\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$, ferner $[\![\frac{2}{3}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ mit $[\![\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$, ferner $[\![\frac{1}{3}\,0\,0]\!]$ mit $[\![\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$, ferner $[\![\frac{1}{3}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ mit $[\![\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$.

Es sind das sechserlei jeweilen zweizählige Punktlagen mit der Symmetriebedingung $= D_3$. Sie bilden Gitter von der Form des basiszentrierten Elementarparallelepipeds.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Auf den trigonalen Drehungsachsen ist der geometrische Ort für vierzählige Punkte. Beispielsweise gehören zusammen: $[\![\frac{1}{3}, 0, p]\!]$ $[\![\frac{5}{6}, \frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\frac{1}{3}, 0, \bar{p}]\!]$ $[\![\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$. Die Symmetriebedingung heißt: $= C_3$.

Auf den digonalen Drehungsachsen liegen sechszählige Punkte. So gehören beispielsweise zusammen: $[\![m, 0, 0]\!]$ $[\![-\frac{1}{2}m, -\frac{3}{2}m, 0]\!]$ $[\![-\frac{1}{2}m, +\frac{3}{2}m, 0]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}-\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}-\frac{3}{2}m, 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}-\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}+\frac{3}{2}m, 0]\!]$. Die Bedingung, daß ein Punkt auf einer digonalen Drehungsachse $[130]^{00}$ oder $[1\bar{3}0]^{00}$ liegt, lautet: $m \pm \frac{1}{3}n = r$; $p = 0$ oder $\frac{1}{2}$. r ist wieder irgend eine positive oder negative ganze Zahl einschließlich Null. Die diesbezüglichen sechszähligen Punktlagen besitzen die Symmetrie C_2. Weitere Symmetriebedingungen sind nicht vorhanden; alle übrigen Punkte sind mit drei Freiheitsgraden 12zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_3^2$

Sie besitzt die gleichen Untergruppen wie $\mathfrak{D}_3^1$, auf den digonalen Drehungsachsen liegt aber nur eine Art der trigonalen Achsen. Die Aufstellung des orthohexagonalen Elementarparallelepipeds entspricht den üblichen kristallographischen Festsetzungen. Der Nullpunkt wird gleich gewählt wie in $\mathfrak{D}_3^1$.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 237.

IV.) $0, 0, 0$; $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0$; $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0$; $0, 0, 1$. V.) $0, 0, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

Trigonale Drehungsachsen gleich wie in D_3^1, nur zum Teil zusammengehörig.

Digonale Drehungsachsen:

$^{00}[010]$ $^{\frac{1}{2}\,0}[010]$; $^{0\,\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}[010]$. $[110]^{00}$ $[1\bar{1}0]^{00}$; $[110]^{0\,\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}0]^{0\,\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen:

$\frac{1}{4}{}^0[010]$ $\frac{3}{4}{}^0[010]$; $\frac{1}{4}\frac{1}{2}[010]$ $\frac{3}{4}\frac{1}{2}[010]$. $[110]^{\frac{1}{2}\,0}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\,0}$; $[110]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m_1, n_1, p]\!]$ $[\![m_2, n_2, p]\!]$ $[\![m_3, n_3, p]\!]$ $[\![\bar{m}_1, n_1, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}_2, n_2, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}_3, n_3, \bar{p}]\!]$

$[\![m_1 + \frac{1}{2}, n_1 + \frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![m_2 + \frac{1}{2}, n_2 + \frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![m_3 + \frac{1}{2}, n_3 + \frac{1}{2}, p]\!]$

$[\![\bar{m}_1 + \frac{1}{2}, n_1 + \frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}_2 + \frac{1}{2}, n_2 + \frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}_3 + \frac{1}{2}, n_3 + \frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad. Es gibt nurmehr zweierlei derartige Punktlagen, nämlich $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ einerseits, $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ anderseits. Die Zähligkeit ist 2, die Symmetriebedingung lautet D_3. Es entstehen Gitter von der Form des basiszentrierten Elementarparallelepipeds.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Sie liegen zunächst auf den trigonalen Drehungsachsen. Nach den Zusammengehörigkeiten kann man zwei Typen erkennen: Zu $[\![0, 0, p]\!]$ gehören beispielsweise $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![0, 0, \bar{p}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$; zu $[\![\frac{1}{3}, 0, p]\!]$ gehören $[\![\frac{2}{3}, 0, \bar{p}]\!]$ $[\![\frac{5}{6}, \frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$. Die Zähligkeit ist, gemäß der Symmetriebedingung C_3, vier.

Weitere Punkte mit einem Freiheitsgrad befinden sich auf den digonalen Drehungsachsen. So sind sich beispielsweise gleichwertig:

$[\![0, n, 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n, 0]\!]$ $[\![-\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n, 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}, 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2} + \frac{1}{2}n, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}n, 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}n, 0]\!]$.

Auf digonalen Drehungsachsen der Scharen $[110]^0$ $[1\bar{1}0]$ liegen Punkte mit der Beziehung $m \pm n = r$, wo r irgend eine $\pm$ ganze Zahl (einschließlich Null) ist. p muß 0, oder $\frac{1}{2}$ sein. Alle derartigen Punkte besitzen die Zähligkeit 6 und die Symmetriebedingung C_2.

Im übrigen sind die Punkte allgemeinster Lage 12zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_3^3$

Ihr gehören die Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_3^2$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$ an. Stellung analog wie in $\mathfrak{D}_3^1$. Die trigonalen Achsen sind Schraubenachsen von gleichem Windungssinn, jede digonale Drehungsachse geht durch alle drei Arten trigonaler Schraubenachsen. Der Koordinatenanfangspunkt wird zweckmäßig in einer digonalen Drehungsachse im Schnittpunkt mit einer trigonalen Schraubenachse angenommen. (Man nimmt diejenige Drehungsachse, die einer Koordinatenachse parallel geht.)

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 237.

IV.) $0, 0, \frac{c}{3}$; $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0$; $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0$; $0, 0, 1$. V.) $0, 0, 0$; $1, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

Trigonale Schraubenachsen:

$[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{1}{3}\,0}$ $[001]_{\frac{5}{6}\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{2}{3}\,0}$ $[001]_{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[100]^{00}\,[100]^{\frac{1}{2}\,0}$; $[100]^{0\,\frac{1}{2}}\,[100]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$. $[130]^{0\,\frac{1}{3}}$ und $[130]^{0\,\frac{5}{6}}$. $[1\bar{3}0]^{0\,\frac{2}{3}}$ und $[1\bar{3}0]^{0\,\frac{1}{6}}$.

Digonale Schraubenachsen:

$[100]^{\frac{1}{4}\,0}\,[100]^{\frac{3}{4}\,0}$; $[100]^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}\,[100]^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}$. $[130]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}}$; $[130]^{\frac{1}{2}\,\frac{5}{6}}$. $[1\bar{3}0]^{\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}}$; $[1\bar{3}0]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{6}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m_1, n_1, p]\!]\,[\![m_2, n_2, p+\tfrac{1}{3}]\!]\,[\![m_3, n_3, p+\tfrac{2}{3}]\!]\,[\![m_1, \bar{n}_1, \bar{p}]\!]\,[\![m_2, \bar{n}_2, \bar{p}+\tfrac{2}{3}]\!]\,[\![m_3, \bar{n}_3, \bar{p}+\tfrac{1}{3}]\!]$

$[\![m_1+\tfrac{1}{2}, n_1+\tfrac{1}{2}, p]\!]\,[\![m_2+\tfrac{1}{2}, n_2+\tfrac{1}{2}, p+\tfrac{1}{3}]\!]\,[\![m_3+\tfrac{1}{2}, n_3+\tfrac{1}{2}, p+\tfrac{2}{3}]\!]$

$[\![m_1+\tfrac{1}{2}, \bar{n}_1+\tfrac{1}{2}, \bar{p}]\!]\,[\![m_2+\tfrac{1}{2}, \bar{n}_2+\tfrac{1}{2}, \bar{p}+\tfrac{2}{3}]\!]\,[\![m_3+\tfrac{1}{2}, \bar{n}_3+\tfrac{1}{2}, \bar{p}+\tfrac{1}{3}]\!]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

Sie sind den digonalen Drehungsachsen zugehörig. $[\![m, 0, 0]\!]$ sind $[\![-\tfrac{1}{2}m, -\tfrac{3}{2}m, p+\tfrac{1}{3}]\!]$ $[\![-\tfrac{1}{2}m, \tfrac{3}{2}m, p+\tfrac{2}{3}]\!]$ $[\![m+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}m, \tfrac{1}{2}-\tfrac{3}{2}m, p+\tfrac{1}{3}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}m, \tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2}m, p+\tfrac{2}{3}]\!]$ beigeordnet.

Zu $[\![m, 0, \tfrac{1}{2}]\!]$ gehören Punkte in $\frac{5}{6}$ und $\frac{1}{6}$ Höhe. Die Zähligkeit jeglicher derartigen Punktlagen ist 6, die Symmetriebedingung $= C_2$. Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden 12zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_3^4$

Sie besitzt die gleichen Untergruppen wie $\mathfrak{D}_3^3$. Die eine digonale Drehungsachse verläuft diesmal richtig von links nach rechts.

Einfachste Decktranformationsbedingungen. (Gleiche Nullpunktswahl wie bei $\mathfrak{D}_3^3$.)

I.)—III.) siehe Seite 237.

IV.) $0, 0, \frac{c}{3}$; $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0$; $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0$; $0, 0, 1$. V.) $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

Trigonale Schraubenachsen:

$[001]_{00}\,[001]_{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$. Ferner $[001]_{\frac{1}{3}\,0}\,[001]_{\frac{2}{3}\,0}\,[001]_{\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}}\,[001]_{\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen:

$[010]^{00}\,[010]^{\frac{1}{2}\,0}$; $^{\frac{1}{2}\,0}[010]\;^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}[010]$; $[110]^{0\,\frac{1}{3}}$; $[1\bar{1}0]^{0\,\frac{5}{6}}$; $[110]^{0\,\frac{2}{3}}$; $[110]^{0\,\frac{1}{6}}$; sowie die entsprechenden Schraubenachsen.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m_1, n_1, p]\!]\,[\![m_2, n_2, p+\tfrac{1}{3}]\!]\,[\![m_3, n_3, p+\tfrac{2}{3}]\!]\,[\![m_1, n_1, \bar{p}]\!]\,[\![m_2, n_2, \bar{p}+\tfrac{2}{3}]\!]\,[\![m_3, n_3, \bar{p}+\tfrac{1}{3}]\!]$

$[\![m_1+\tfrac{1}{2}, n_1+\tfrac{1}{2}, p]\!]\,[\![m_2+\tfrac{1}{2}, n_2+\tfrac{1}{2}, p+\tfrac{1}{3}]\!]\,[\![m_3+\tfrac{1}{2}, n_3+\tfrac{1}{2}, p+\tfrac{2}{3}]\!]$

$[\![m_1+\tfrac{1}{2}, n_1+\tfrac{1}{2}, \bar{p}]\!]\,[\![m_2+\tfrac{1}{2}, n_2+\tfrac{1}{2}, \bar{p}+\tfrac{2}{3}]\!]\,[\![m_3+\tfrac{1}{2}, n_3+\tfrac{1}{2}, \bar{p}+\tfrac{1}{3}]\!]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Sechszählig sind die Punkte auf den digonalen Drehungsachsen. Es gehören zu $[\![0, n, 0]\!]$ beispielsweise: $[\![\tfrac{1}{2}n, -\tfrac{1}{2}n, \tfrac{1}{3}]\!]$ $[\![-\tfrac{1}{2}n, -\tfrac{1}{2}n, \tfrac{2}{3}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}n, \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}n, \tfrac{1}{3}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}n, \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}n, \tfrac{2}{3}]\!]$. Die Symmetriebedingung ist C_2.

Alle übrigen Punkte sind 12zählig (drei Freiheitsgrade).

Raumgruppen $\mathfrak{D}_3^5$ und $\mathfrak{D}_3^6$

Ihre Untergruppen sind $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_3^3$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$. Sie sind analog gebaut wie $\mathfrak{D}_3^3$ und $\mathfrak{D}_3^4$, lediglich der Windungssinn der trigonalen Schraubenachsen ist entgegengesetzt. Infolgedessen vertauschen $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ ihren Platz, sowohl in den Koordinatenwerten als auch in den Kennziffern der digonalen Drehungsachsen. Die vierte Decktransformationsbedingung besitzt als Translationsgröße $\frac{2c}{3}$. Die Ableitungen über die Zähligkeiten der Punktlagen bleiben mutatis mutandis bestehen.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_3^7$

Da sie die Untergruppen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_3^4$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$ enthält, besitzt ein primitives Tripel rhomboedrischen Habitus. $a = b = c$ (a, a, a) $\alpha = \beta = \gamma$ (α, α, α). Das primitive Rhomboeder ist Elementarparallelepiped. Der Nullpunkt ist zugleich Schnittpunkt der trigonalen Drehungsachse mit drei digonalen Drehungsachsen.

Die einfachsten Decktransformationsbedingungen lauten:

I.) a, 0, 0; 1, cos α, cos α; cos α, 1, cos α; cos α, cos α, 1.

II.) 0, a, 0; 1, cos α, cos α; cos α, 1, cos α; cos α, cos α, 1.

III.) 0, 0, a; 1, cos α, cos α; cos α, 1, cos α; cos α, cos α, 1.

IV.) 0, 0, 0; cos α, cos α, 1; 1, cos α, cos α; cos α, 1, cos α.

V.) 0, 0, 0; $\overline{\cos\alpha}$, $\overline{1}$, $\overline{\cos\alpha}$; $\overline{1}$, $\overline{\cos\alpha}$, $\overline{\cos\alpha}$; $\overline{\cos\alpha}$, $\overline{\cos\alpha}$, $\overline{1}$.

Trigonale Drehungsachse: $[111]^{00}$.

Trigonale Schraubenachsen: $[111]^{\frac{1}{3}\frac{2}{3}}$; $[111]^{\frac{2}{3}\frac{1}{3}}$.

Digonale Drehungsachsen:

$[1\bar{1}0]^{00}$; $[1\bar{1}0]^{0\frac{1}{2}}$. $[\bar{1}01]^{00}$; $[\bar{1}01]^{\frac{1}{2}0}$. ${}^{00}[0\bar{1}1]$; ${}^{\frac{1}{2}0}[0\bar{1}1]$.

Digonale Schraubenachsen:

$[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}0}$; $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$. $[\bar{1}01]^{0\frac{1}{2}}$; $[\bar{1}01]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$. ${}^{0\frac{1}{2}}[0\bar{1}1]$; ${}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[0\bar{1}1]$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![p, m, n]\!]$ $[\![n, p, m]\!]$ $[\![\bar{n}\ \bar{m}\ \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}\ \bar{p}\ \bar{n}]\!]$ $[\![\bar{p}\ \bar{n}\ \bar{m}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad. $[\![0\,0\,0]\!]$ und $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$ sind jede für sich einzählig. Die Symmetriebedingung lautet $= D_3$. Die Identitätsscharen bilden Gitter von der Form des primitiven Rhomboeders.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Alle Punkte mit $m = n = p$ liegen auf der trigonalen Drehungsachse und sind zweizählig. Dreizählig sind Punktlagen auf den digonalen Drehungsachsen. Währenddem der eine Koordinatenwert $\pm 0, 1, 2, \ldots$ oder $\pm \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$ ist, muß

die Summe der beiden anderen eine $\pm$ ganze Zahl, einschließlich Null, sein. Symmetriebedingung $= C_2$. Die übrigen Punktlagen besitzen drei Freiheitsgrade und sind sechszählig.

$\mathfrak{D}_{3d}$. Holoedrische Klasse der rhomboedrischen Abteilung (Ditrigonal skalenoedrische Klasse)

Die Raumgruppen $\mathfrak{D}_{3d}^1 - \mathfrak{D}_{3d}^4$ mit hexagonaler Translationsgruppe werden auf ein orthohexagonales Elementarparallelepiped bezogen. Das primitive Tripel ist dann $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}, \frac{a}{2} - \frac{b}{2}, c$ wobei $a = b\sqrt{3}$ ist. ($\alpha, \beta, \gamma = 90^0$.)

Die drei ersten Decktransformationsbedingungen lauten für $\mathfrak{D}_{3d}^1 - \mathfrak{D}_{3d}^4$:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) $\frac{a}{2}, \frac{\bar{b}}{2}, 0$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

III.) 0, 0, c; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{3d}^1$ (Siehe Fig. 112)

Ihre Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_3^1$, $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$. Sie bilden miteinander $\mathfrak{C}_{3i}^1$, $\mathfrak{C}_{3v}^2$, $\mathfrak{D}_3^1$. Charakteristisch sind $\mathfrak{C}_{3v}^2$ und $\mathfrak{D}_3^1$. Es ist zu beachten, daß die Aufstellung des Elementarparallelepipeds gegenüber der üblichen kristallographischen Achsenwahl um 90 ° gedreht ist.

Die IV., V. und VI. Decktransformationsbedingungen lauten:

IV.) 0, 0, 0; $\frac{\bar{1}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0$; $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\bar{1}}{2}, 0$; 0, 0, 1. V.) 0, 0, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

VI.) 0, 0, 0; 1, 0, 0; 0, $\bar{1}$, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

Symmetriezentren: I. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$. — II. $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$.

III. $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$.

IV. $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$.

Trigonale Drehungsachsen (zwei davon zugleich hexagonale Drehspiegelachsen):

$[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{2}{3}0}$ $[001]_{\frac{1}{3}0}$ $[001]_{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{5}{6}\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$.

Gleitspiegelebenen: $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen:

$[100]^{00}$ $[100]^{\frac{1}{2}0}$ $[130]^{00}$ $[1\bar{3}0]^{00}$; $[100]^{0\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[130]^{0\frac{1}{2}}$ $[1\bar{3}0]^{0\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen:

$[100]^{\frac{1}{4}0}$ $[100]^{\frac{3}{4}0}$ $[130]^{\frac{1}{2}0}$ $[1\bar{3}0]^{\frac{1}{2}0}$; $[100]^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}$ $[130]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[1\bar{3}0]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[m_1, n_1, p]$ $[m_2, n_2, p]$ $[m_3, n_3, p]$ $[\bar{m}_1, \bar{n}_1, p]$ $[\bar{m}_2, \bar{n}_2, p]$ $[\bar{m}_3, \bar{n}_3, p]$
$[m_1, \bar{n}_1, \bar{p}]$ $[m_2, \bar{n}_2, \bar{p}]$ $[m_3, \bar{n}_3, \bar{p}]$ $[\bar{m}_1, n_1, \bar{p}]$ $[\bar{m}_2, n_2, \bar{p}]$ $[\bar{m}_3, n_3, \bar{p}]$
$[m_1 + \frac{1}{2}, n_1 + \frac{1}{2}, p]$ $[m_2 + \frac{1}{2}, n_2 + \frac{1}{2}, p]$ $[m_3 + \frac{1}{2}, n_3 + \frac{1}{2}, p]$
$[\bar{m}_1 + \frac{1}{2}, n_1 + \frac{1}{2}, p]$ $[\bar{m}_2 + \frac{1}{2}, n_2 + \frac{1}{2}, p]$ $[\bar{m}_3 + \frac{1}{2}, n_3 + \frac{1}{2}, p]$
$[m_1 + \frac{1}{2}, \bar{n}_1 + \frac{1}{2}, \bar{p}]$ $[m_2 + \frac{1}{2}, \bar{n}_2 + \frac{1}{2}, \bar{p}]$ $[m_3 + \frac{1}{2}, \bar{n}_3 + \frac{1}{2}, \bar{p}]$
$[\bar{m}_1 + \frac{1}{2}, \bar{n}_1 + \frac{1}{2}, \bar{p}]$ $[\bar{m}_2 + \frac{1}{2}, \bar{n}_2 + \frac{1}{2}, \bar{p}]$ $[\bar{m}_3 + \frac{1}{2}, \bar{n}_3 + \frac{1}{2}, \bar{p}]$.

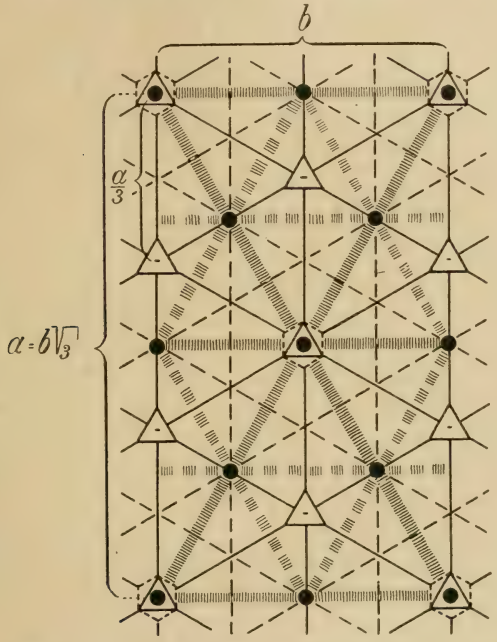


Fig. 112. $\mathfrak{D}_{3d}^{1}$. Ebene $(001)_0$ bei orthohexagonaler Darstellung. Die darauf senkrecht stehenden trigonalen Achsen und Symmetrieebenen, sowie die in der Ebene liegenden digonalen Achsen und Symmetriezentren.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

I. von Symmetriezentren } Zähligkeit jeweilen = 2. Symmetrie-
II. von Symmetriezentren } bedingung = D_{3d}.

Die beiden Punktlagen bilden Gitter von der Form des basiszentrierten Elementarparallelepipeds.

III. von Symmetriezentren } Zähligkeit jeweilen = 6. Symmetrie-
IV. von Symmetriezentren } bedingung = C_{2h}.

Vierzählig sind die Punkte $[\![\frac{1}{3}\,0\,0]\!]$ mit $[\![\frac{2}{3}\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$, ferner $[\![\frac{1}{3}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ mit $[\![\frac{2}{3}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$. Die Symmetriebedingung lautet D_3.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Punkte $[\![0\,0\,p]\!]$, beziehungsweise $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,p]\!]$, sind vierzählig. Die Symmetriebedingung heißt C_{3v}.

Auf den übrigen trigonalen Drehungsachsen ist die Zähligkeit 8 vorhanden. So gehören zu $[\![\frac{1}{3}\,0\,p]\!]$ $[\![\frac{2}{3}\,0\,p]\!]$ $[\![\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,p]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,p]\!]$ $[\![\frac{1}{3}\,0\,\bar{p}]\!]$ $[\![\frac{2}{3}\,0\,\bar{p}]\!]$ $[\![\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,\bar{p}]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,\bar{p}]\!]$. Die Symmetriebedingung wird zu C_3. Zwölfzählige Punktlagen befinden sich auf den digonalen Drehungsachsen (C_2). (Näheres siehe Raumgruppe $\mathfrak{D}_3{}^1$.)

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Die Spiegelebenen stellen den geometrischen Ort derartiger Punktlagen dar. Zähligkeit = 12. Symmetriebedingung = C_s.

Die allgemeinste Lage ist 24zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{3d}{}^2$

Die Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_3{}^1$, $\mathfrak{C}_s{}^4$ $\mathfrak{C}_s{}^4$ $\mathfrak{C}_s{}^4$, $\mathfrak{C}_2{}^3$ $\mathfrak{C}_2{}^3$ $\mathfrak{C}_2{}^3$, ferner $\mathfrak{C}_{3i}{}^1$, $\mathfrak{C}_{3v}{}^4$, $\mathfrak{D}_3{}^1$. Charakteristisch sind: $\mathfrak{C}_{3v}{}^4$ und $\mathfrak{D}_3{}^1$. Wiederum ist das orthohexagonale Elementarparallelepiped gegenüber der üblich kristallographischen Aufstellung um 90° gedreht.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 242.

IV.) $0,0,0;\ \frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0;\ \frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0;\ 0,0,1.$ V.) $0,0,\frac{c}{2};\ \bar{1},0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1.$

VI.) $0,0,0;\ 1,0,0;\ 0,\bar{1},0;\ 0,0,\bar{1}.$

Der Koordinatenanfangspunkt liegt im Schnittpunkt dreier digonaler Drehungsachsen mit einer trigonalen Drehungsachse, die zugleich Schnittlinie dreier Gleitspiegelebenen ist.

Symmetriezentren: I. $[\![0\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$.

II. $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$.

Trigonale Drehungsachsen:

$[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{2}{3}0}$ $[001]_{\frac{1}{3}0}$ $[001]_{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{5}{6}\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen:

$(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$. $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen und Schraubenachsen wie in $\mathfrak{D}_{3d}{}^1$, nur jeweilen ganz zusammengehörig.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[m_1, n_1, p]$ $[m_2, n_2, p]$ $[m_3, n_3, p]$ $[\bar{m}_1, n_1, p+\frac{1}{2}]$ $[\bar{m}_2, n_2, p+\frac{1}{2}]$ $[\bar{m}_3, n_3, p+\frac{1}{2}]$
$[m_1, \bar{n}_1, \bar{p}]$ $[m_2, \bar{n}_2, \bar{p}]$ $[m_3, \bar{n}_3, \bar{p}]$ $[\bar{m}_1, \bar{n}_1, \bar{p}+\frac{1}{2}]$ $[\bar{m}_2, \bar{n}_2, \bar{p}+\frac{1}{2}]$ $[\bar{m}_3, \bar{n}_3, \bar{p}+\frac{1}{2}]$
$[m_1+\frac{1}{2}, n_1+\frac{1}{2}, p]$ $[m_2+\frac{1}{2}, n_2+\frac{1}{2}, p]$ $[m_3+\frac{1}{2}, n_3+\frac{1}{2}, p]$
$[\bar{m}_1+\frac{1}{2}, n_1+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$ $[\bar{m}_2+\frac{1}{2}, n_2+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$ $[\bar{m}_3+\frac{1}{2}, n_3+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$
$[m_1+\frac{1}{2}, \bar{n}_1+\frac{1}{2}, \bar{p}]$ $[m_2+\frac{1}{2}, \bar{n}_2+\frac{1}{2}, \bar{p}]$ $[m_3+\frac{1}{2}, \bar{n}_3+\frac{1}{2}, \bar{p}]$
$[\bar{m}_1+\frac{1}{2}, \bar{n}_1+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]$ $[\bar{m}_2+\frac{1}{2}, \bar{n}_2+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]$ $[\bar{m}_3+\frac{1}{2}, \bar{n}_3+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

1. $[0\,0\,0]$ $[\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]$ $[0\,0\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = D_3.
   Gitter von der Form des basiszentrierten Elementarparallelepipeds mit halb so großen c werden gebildet.
2. $[\frac{1}{3}\,0\,0]$ $[\frac{2}{3}\,0\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,0]$ $[\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = D_3.
3. $[\frac{1}{3}\,0\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{2}{3}\,0\,0]$ $[\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,0]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = D_3.
4. = I von Symmetriezentren. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_{3i}.
5. = II von Symmetriezentren. Zähligkeit = 12. Symmetriebedingung = C_i.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Achtzählige Punkte gehören den trigonalen Drehungsachsen an. Zweierlei Arten sind zu unterscheiden. Symmetriebedingung = C_3. Zwölfzählige Punkte liegen auf den digonalen Drehungsachsen.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden 24zählig.

Die Raumgruppen $\mathfrak{D}_{3d}^3$ und $\mathfrak{D}_{3d}^4$ besitzen die konventionelle Lage der Drehungsachsen und Symmetrieebenen.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{3d}^3$

Ihre Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_3^1$, $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$. Außerdem lassen sich erkennen $\mathfrak{C}_{3i}^1$, $\mathfrak{C}_{3v}^1$, $\mathfrak{D}_3^2$. Charakteristisch sind $\mathfrak{C}_{3v}^1$ und $\mathfrak{D}_3^2$. Der Koordinatenanfangspunkt fällt mit einem auf einer trigonalen Drehungsachse gelegenen Symmetriezentrum zusammen.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 242.

IV.) $0,0,0$; $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0$; $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0$; $0,0,1$. V.) $0,0,0$; $1,0,0$; $0,\bar{1},0$; $0,0,1$.
VI.) $0,0,0$; $\bar{1},0,0$; $0,1,0$; $0,0,\bar{1}$.

Symmetriezentren: Gleich wie in $\mathfrak{D}_{3d}^1$.

Trigonale Drehungsachsen. Ebenfalls identisch mit denen von $\mathfrak{D}_{3d}^1$.

Spiegelebenen: $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$; $(310)_0$ $(\bar{3}10)_0$.

Gleitspiegelebenen: $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ $(310)_{\frac{1}{2}}$ $(310)_{\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen:

$^{00}[010]\ ^{\frac{1}{2}0}[010]\ [110]^{00}\ [1\bar{1}0]^{00}$: $^{0\frac{1}{2}}[010]\ ^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[010]\ [110]^{0\frac{1}{2}}\ [1\bar{1}0]^{0\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen:

$^{\frac{1}{4}0}[010]\ ^{\frac{3}{4}0}[010]\ [110]^{\frac{1}{2}0}\ [1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}0}$; $^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}[010]\ ^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}[010]\ [110]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\ [1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[m_1, n_1, p]\ [m_2, n_2, p]\ [m_3, n_3, p]\ [m_1, n_1, p]\ [m_2, \bar{n}_2, p]\ [m_3, \bar{n}_3, p]$
$[\bar{m}_1, n_1, \bar{p}]\ [\bar{m}_2, n_2, \bar{p}]\ [\bar{m}_3, n_3, \bar{p}]\ [\bar{m}_1, \bar{n}_1, \bar{p}]\ [\bar{m}_2, \bar{n}_2, \bar{p}]\ [\bar{m}_3, \bar{n}_3, \bar{p}]$
$[m_1 + \frac{1}{2}, n_1 + \frac{1}{2}, p]\ [m_2 + \frac{1}{2}, n_2 + \frac{1}{2}, p]\ [m_3 + \frac{1}{2}, n_3 + \frac{1}{2}, p]$
$[m_1 + \frac{1}{2}, \bar{n}_1 + \frac{1}{2}, p]\ [m_2 + \frac{1}{2}, \bar{n}_2 + \frac{1}{2}, p]\ [m_3 + \frac{1}{2}, \bar{n}_3 + \frac{1}{2}, p]$
$[\bar{m}_1 + \frac{1}{2}, n_1 + \frac{1}{2}, \bar{p}]\ [m_2 + \frac{1}{2}, n_2 + \frac{1}{2}, \bar{p}]\ [\bar{m}_3 + \frac{1}{2}, n_3 + \frac{1}{2}, \bar{p}]$
$[\bar{m}_1 + \frac{1}{2}, \bar{n}_1 + \frac{1}{2}, \bar{p}]\ [\bar{m}_2 + \frac{1}{2}, \bar{n}_2 + \frac{1}{2}, \bar{p}]\ [\bar{m}_3 + \frac{1}{2}, \bar{n}_3 + \frac{1}{2}, \bar{p}]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[0\,0\,0]\ [\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]$. Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung = D_{3d}.
2. $[0\,0\,\frac{1}{2}]\ [\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]$. Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung = D_{3d}.
3. $[\frac{1}{2}\,0\,0]\ [0\,\frac{1}{2}\,0]\ [\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,0]\ [\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,0]\ [\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,0]\ [\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,0]$. Zähligkeit = 6. Symmetriebedingung = C_{2h}.
4. $[\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\ [0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\ [\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\ [\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\ [\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\ [\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]$. Zähligkeit = 6. Symmetriebedingung = C_{2h}.

Die Punktlagen 1 und 2 bilden jede für sich Gitter von der Form des basiszentrierten Elementarparallelepipeds.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Alle trigonalen Drehungsachsen sind Schnittlinien dreier Spiegelebenen. Jede ihnen angehörige Punktlage besitzt die Zähligkeit 4 und die Symmetriebedingung = C_{3v}.

Zwölfzählige Punkte mit einem Freiheitsgrad beherbergen die digonalen Drehungsachsen. (Symmetriebedingung = C_2.)

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Sie gehören den Spiegelebenen an, besitzen also die Symmetriebedingung C_s und somit die Zähligkeit 12.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden 24zählig. Über die Bedingungsgleichungen für Lagen auf Drehungsachsen und Spiegelebenen beachte man das bei Anlaß der Diskussion der Untergruppen Mitgeteilte.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{3d}^4$

Ihre Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_3^1$, $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$, dem Wesen nach also die gleichen wie in $\mathfrak{D}_{3d}^2$. Sie bilden aber diesmal unter sich die Gruppen: $\mathfrak{C}_{3i}^1$ $\mathfrak{C}_{3v}^3$ $\mathfrak{D}_3^2$. Charakteristisch sind $\mathfrak{C}_{3v}^3$ mit $\mathfrak{D}_3^2$. Der Schnittpunkt einer trigonalen Drehungsachse mit drei digonalen Drehungsachsen werde zum Koordinatenanfangspunkt gewählt.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 242.

IV.) $0, 0, 0;\ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0;\ \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0;\ 0, 0, 1$. V.) $0, 0, \frac{c}{2};\ 1, 0, 0:\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1$.

VI.) $0, 0, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, \bar{1}$.

Symmetriezentren (wie in $\mathfrak{D}_{3d}^2$): I. $[\![0\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$.

II. $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$
$[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$.

Trigonale Drehungsachsen. Sie besitzen gleiche Lage wie in $\mathfrak{D}_{3d}^4$.

Gleitspiegelebenen: $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ $(310)_0$ $(\bar{3}10)_{\frac{1}{2}}$. $\left(\text{Gleitkomponente } \frac{c}{2}\right)$.

$(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ $(310)_{\frac{1}{2}}$ $(\bar{3}10)_{\frac{1}{2}}$. (Gleitkomponente schräg zur C-Achse.)

Die digonalen Drehungsachsen und Schraubenachsen haben gleiche Lage wie $\mathfrak{D}_{3d}^3$, nur sind sie jeweilen ganz zusammengehörig.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m_1, n_1, p]\!]$ $[\![m_2, n_2, p]\!]$ $[\![m_3, n_3, p]\!]$ $[\![m_1, \bar{n}_1, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m_2, \bar{n}_2, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m_3, \bar{n}_3, p+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{m}_1, n_1, \bar{p}]\!]$ $[\![m_2, n_2, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}_3, n_3, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}_1, \bar{n}_1, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}_2, n_2, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}_3, \bar{n}_3, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$.

Ferner zu jedem dieser 12 Werte $[\![x, y, z]\!]$ der Wert $[\![x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = D_3.
2. = I von Symmetriezentren: Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_{3i}.
   Jede dieser Punktlagen bildet Gitter von der Form des basiszentrierten Elementarparallelepipeds mit halb so großem c.
3. = II. Symmetriezentren: Zähligkeit = 12. Symmetriebedingung = C_i.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Ihre Zähligkeit ist auf den trigonalen Drehungsachsen (C_3) 8, auf den digonalen Drehungsachsen (C_2) 12.

Weiterhin sind nur noch Punktlagen mit drei Freiheitsgraden und der Zähligkeit 24 vorhanden.

Die Raumgruppen $\mathfrak{D}_{3d}^5$ und $\mathfrak{D}_{3d}^6$ besitzen ein primitives Tripel von rhomboedrischem Habitus. Die einfachste Darstellung wird daher diejenige sein, welche das primitive Rhomboeder zum Elementarparallelepiped erhebt. Da aber eine ganze Reihe von Kristallarten diesen Gruppen angehört und die Koordinatenachsenwahl noch keine einheitliche ist, mag es nicht unangebracht sein, hier auch die Darstellung mittels eines orthohexagonalen Elementarparallelepipeds anhangsweise zu erläutern.

Im ersten Falle ist a, a, a das primitive Tripel und

I.) a, 0, 0; 1, cos α, cos α; cos α, 1, cos α; cos α, cos α, 1,

II.) 0, a, 0; 1, cos α, cos α; cos α, 1, cos α; cos α, cos α, 1,

III.) 0, 0, a; 1, cos α, cos α; cos α, 1, cos α; cos α, cos α, 1

sind die drei ersten Decktransformationsbedingungen.

Im zweiten Falle heißt das primitive Tripel: $\frac{a}{6}+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}$; $\frac{\bar{a}}{6}+\frac{\bar{b}}{2}+\frac{c}{3}$; $\frac{a}{3}+\frac{c}{3}$; die drei ersten Decktransformationsbedingungen erlangen die Werte:

I.) $\frac{\bar{a}}{6}, \frac{b}{2}, \frac{c}{3}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) $\frac{a}{6}, \frac{\bar{b}}{2}, \frac{c}{3}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

III.) $\frac{a}{3}, 0, \frac{c}{3}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{3d}^5$

Ihre Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_3^4$, $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$, ferner: $\mathfrak{C}_{3i}^2$, $\mathfrak{C}_{3v}^5$, $\mathfrak{D}_3^7$.

A. Rhomboedrische Darstellung

Der Koordinatenanfangspunkt ist der Schnittpunkt einer trigonalen mit drei digonalen Drehungsachsen.

Decktransformationsbedingungen:

IV.) 0, 0, 0; cos α, cos α, 1; 1, cos α, cos α; cos α, 1, cos α.

V.) 0, 0, 0; cos α, 1, cos α; 1, cos α, cos α; cos α, cos α, 1.

VI.) 0, 0, 0; $\overline{\cos\alpha}$, 1, $\overline{\cos\alpha}$; 1, $\overline{\cos\alpha}$, $\overline{\cos\alpha}$; $\overline{\cos\alpha}$, $\overline{\cos\alpha}$, 1.

Symmetriezentren: I. $[\![0\,0\,0]\!]$; II. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$;

III. $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$; IV. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$.

Trigonale Drehungsachsen: $[111]^{00}$ zugleich hexagonale Drehspiegelachse.

Trigonale Schraubenachsen: $[111]^{\frac{1}{2}\frac{2}{3}}$ $[111]^{\frac{2}{3}\frac{1}{3}}$.

Spiegelebenen: $(1\bar{1}0)_0$ $(\bar{1}01)_0$ $(01\bar{1})_0$.

Gleitspiegelebenen: $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$ $(\bar{1}01)_{\frac{1}{2}}$ $(01\bar{1})_{\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen:

$[1\bar{1}0]^{00}$ $[\bar{1}01]^{00}$ $^{00}[0\bar{1}1]$; $[1\bar{1}0]^{0\frac{1}{2}}$ $[\bar{1}01]^{\frac{1}{2}0}$ $^{\frac{1}{2}0}[0\bar{1}1]$.

Digonale Schraubenachsen:

$[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}0}$ $[\bar{1}01]^{0\frac{1}{2}}$ $^{0\frac{1}{2}}[0\bar{1}1]$; $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[\bar{1}01]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[0\bar{1}1]$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![p, m, n]\!]$ $[\![n, p, m]\!]$ $[\![n, m, p]\!]$ $[\![m, p, n]\!]$ $[\![p, n, m]\!]$
$[\![\bar{n}, \bar{m}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{p}, \bar{n}]\!]$ $[\![\bar{p}, \bar{n}, \bar{m}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{p}, \bar{m}, \bar{n}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{p}, \bar{m}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

1. $[0\,0\,0]$
2. $[\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]$

} Zähligkeit jeweilen = 1. Symmetriebedingung = D_{3d}.

Die Punkte bilden Gitter von der Form des primitiven Rhomboeders.

3. $[\frac{1}{2}\,0\,0]$ $[0\,\frac{1}{2}\,0]$ $[0\,0\,\frac{1}{2}]$
4. $[\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]$ $[\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]$ $[0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]$

} Zähligkeit jeweilen = 3. Symmetriebedingung = C_{2h}.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Punkte mit m = n = p (außer den bereits genannten). Sie sind zweizählig mit der Symmetriebedingung C_{3v}.
2. Punkte auf den digonalen Drehungsachsen. (Siehe Untergruppe $\mathfrak{D}_3^7$.) Zähligkeit = 6. Symmetriebedingung = C_2.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden gehören den Spiegelebenen an (= C_s). Ihre Zähligkeit ist 6. Im übrigen sind die Punkte allgemeinster Lage mit drei Freiheitsgraden 12zählig.

B. Orthohexagonale Darstellung

Da das Elementarparallelepiped sechsfachprimitiv ist, ergibt sich schon eine ganz beträchtliche Zahl von Symmetrieelementen, die nicht durch Translationen von der Länge der Parallelepipedkanten auseinander ableitbar sind.

Symmetriezentren:

I. $[0\,0\,0]$ $[\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]$ $[\frac{1}{3}\,0\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}]$ $[\frac{2}{3}\,0\,\frac{2}{3}]$ $[\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}]$.

II. $[0\,0\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{3}\,0\,\frac{5}{6}]$ $[\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{5}{6}]$ $[\frac{2}{3}\,0\,\frac{1}{6}]$ $[\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{6}]$.

III. $[0\,\frac{1}{2}\,0]$ $[\frac{1}{2}\,0\,0]$ $[\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,0]$ $[\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,0]$ $[\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,0]$ $[\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,0]$ $[\frac{1}{6}\,0\,\frac{2}{3}]$ $[\frac{5}{12}\,\frac{1}{4}\,\frac{2}{3}]$ $[\frac{5}{12}\,\frac{3}{4}\,\frac{2}{3}]$
$[\frac{2}{3}\,\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}]$ $[\frac{11}{12}\,\frac{3}{4}\,\frac{2}{3}]$ $[\frac{11}{12}\,\frac{1}{4}\,\frac{2}{3}]$ $[\frac{5}{6}\,0\,\frac{1}{3}]$ $[\frac{7}{12}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{3}]$ $[\frac{7}{12}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{3}]$ $[\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}]$ $[\frac{1}{12}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{3}]$ $[\frac{1}{12}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{3}]$.

IV. $[0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{6}\,0\,\frac{1}{6}]$ $[\frac{5}{12}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{6}]$ $[\frac{5}{12}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{6}]$
$[\frac{2}{3}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{6}]$ $[\frac{11}{12}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{6}]$ $[\frac{11}{12}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{6}]$ $[\frac{5}{6}\,0\,\frac{5}{6}]$ $[\frac{7}{12}\,\frac{1}{4}\,\frac{5}{6}]$ $[\frac{7}{12}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6}]$ $[\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\,\frac{5}{6}]$ $[\frac{1}{12}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6}]$ $[\frac{1}{12}\,\frac{1}{4}\,\frac{5}{0}]$.

Trigonale Drehungsachsen:

$[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{3}0}$ $[001]_{\frac{5}{6}\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{2}{3}0}$ $[001]_{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}$.

Trigonale Schraubenachsen:

$[001]_{\frac{1}{6}\frac{1}{6}}$ $[001]_{\frac{2}{3}\frac{2}{3}}$ $[001]_{0\frac{2}{3}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{6}}$ $[001]_{\frac{5}{6}\frac{1}{6}}$ $[001]_{\frac{1}{3}\frac{2}{3}}$
$[001]_{\frac{1}{3}\frac{1}{3}}$ $[001]_{\frac{5}{6}\frac{5}{6}}$ $[001]_{0\frac{1}{3}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{5}{6}}$ $[001]_{\frac{2}{3}\frac{1}{3}}$ $[001]_{\frac{1}{6}\frac{5}{6}}$.

Spiegelebenen: $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ $(310)_0$ $(\bar{3}10)_0$.

Gleitspiegelebenen: $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ $(310)_{\frac{1}{2}}$ $(\bar{3}10)_{\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen:

$^{00}[010]$ $^{\frac{1}{2}0}[010]$ $^{\frac{1}{3}\frac{1}{3}}[010]$ $^{\frac{5}{6}\frac{1}{3}}[010]$ $^{\frac{1}{6}\frac{2}{3}}[010]$ $^{\frac{2}{3}\frac{2}{3}}[010]$.

$^{0\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{1}{3}\frac{5}{6}}[010]$ $^{\frac{5}{6}\frac{5}{6}}[010]$ $^{\frac{1}{6}\frac{1}{6}}[010]$ $^{\frac{2}{3}\frac{1}{6}}[010]$.

Ferner die entsprechenden digonalen Schraubenachsen:

$^{\frac{1}{4}0}[010]$ usw.

Zusammengehörige Koordinatenwerte: Im ganzen pro orthohexagonales Elementarparallelepiped 72. Zunächst die 24 Werte von $\mathfrak{D}_{3d}^3$, dann zu jedem Wert $[\![x, y, z]\!]$ die Werte: $[\![x+\frac{1}{3}, y, z+\frac{1}{3}]\!]$ $[\![x+\frac{2}{3}, y, z+\frac{2}{3}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

I von Symmetriezentren
II von Symmetriezentren
} Zähligkeit jeweilen = 6. Symmetriebedingung: D_{3d}.

III von Symmetriezentren
IV von Symmetriezentren
} Zähligkeit jeweilen = 18. Symmetriebedingung: C_{2h}.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Diejenigen, welche der Symmetriebedingung C_{3v} entsprechen, sind 12zählig, diejenigen der Symmetriebedingung C_2 = 36zählig.

Auf den Spiegelebenen ist die Zähligkeit pro Elementarparallelepiped 36 mit zwei Freiheitsgraden.

Die allgemeinsten Punkte kommen im orthohexagonalen Parallelepiped 72mal vor.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{6d}^6$

Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_3^4$, $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$. Sie bilden: $\mathfrak{C}_{3i}^2$, $\mathfrak{C}_{3v}^6$, $\mathfrak{D}_3^7$. Charakteristisch sind $\mathfrak{C}_{3v}^6$ mit $\mathfrak{D}_3^7$. Der Koordinatenanfangspunkt liege in einem auf der trigonalen Drehungsachse befindlichen Symmetriezentrum.

A. Rhomboedrische Darstellung

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 248.

IV.) 0, 0, 0; $\cos\alpha$, $\cos\alpha$, 1; 1, $\cos\alpha$, $\cos\alpha$; $\cos\alpha$, 1, $\cos\alpha$.

V.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}$; $\cos\alpha$, 1, $\cos\alpha$; 1, $\cos\alpha$, $\cos\alpha$; $\cos\alpha$, $\cos\alpha$, 1.

VI.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}$; $\overline{\cos}\,\alpha$, $\bar{1}$, $\cos\alpha$; 1, $\overline{\cos}\,\alpha$, $\cos\alpha$; $\overline{\cos}\,\alpha$, $\overline{\cos}\,\alpha$, 1.

Symmetriezentren:

I. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$. II. $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$.

Trigonale Achsen wie $\mathfrak{D}_{3d}^5$. Schnittpunkte der digonalen Achsen um $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ verschoben.

Gleitspiegelebenen: $(1\bar{1}0)_0$ $(\bar{1}01)_0$ $(01\bar{1})_0$); $(1\,\bar{1}\,0)_{\frac{1}{2}}$ $(\bar{1}01)_{\frac{1}{2}}$ $(01\bar{1})_{\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![p, m, n]\!]$ $[\![n, p, m]\!]$

$[\![n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![p+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![n+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![p+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{p}, \bar{m}, n]\!]$ $[\![\bar{n}, p, \bar{m}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

1. $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$. Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung = D_3.
2. = I. von Symmetriezentren: Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung = C_{3i}.
3. II. von Symmetriezentren: Zähligkeit = 6. Symmetriebedingung = C_i.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad: 1. Auf den trigonalen Drehungsachsen bei beliebiger Lage ist die Zähligkeit = 4, entsprechend der Symmetriebedingung C_3. 2. Auf den digonalen Drehungsachsen befinden sich sechszählige Punktlagen mit der Symmetriebedingung C_2.

Weiterhin gibt es nur noch 12zählige Punktlagen mit drei Freiheitsgraden.

B. Orthohexagonale Darstellung

Sie schließt sich an die Darstellung der Gruppe $\mathfrak{D}_{3d}^5$ direkt an. Die Symmetriezentren besitzen gleiche Lage. I und II sind zusammengehörig, III und IV ebenfalls. Die trigonalen Achsen sind dieselben. Alle Symmetrieebenen sind Gleitspiegelebenen. Parallel verschobene Lage besitzen die digonalen Achsen. 72 Koordinatenwerte.

Die tetragonale Abteilung

Eine tetragonale Achse beliebiger Art hat zur Folge, daß eine nicht in der Achse liegende Translationsstrecke (Periode) in vier verschiedenen Richtungen (eventuell Richtung und Gegenrichtung) den gleichen Wert besitzt. (Siehe Seite 118.) Es gibt immer entweder ein einfachprimitives oder doppeltprimitives Parallelepiped (a, b, c; α, γ, β) mit $a = b$ und $\alpha = \gamma = \beta = 90^\circ$. Dieses Parallelepiped sei im folgenden als elementar betrachtet. Ein primitives Tripel ist im ersten Falle a_x, a_y, c, im zweiten Falle $\frac{a_x}{2} + \frac{a_y}{2} + \frac{c}{2}$, $\frac{a_x}{2} - \frac{a_y}{2} + \frac{c}{2}$, c. Die Ursache, warum sich die vier verschiedenen Translationsgruppen des rhombischen Systemes meistens auf zwei reduzieren, ist leicht ersichtlich. Auch die Diagonalen der Basisflächen stehen rechtwinklig aufeinander und halbieren sich bei gleicher Länge gegenseitig. Ist Basiszentrierung vorhanden, so bildet somit das primitive Tripel wiederum ein Elementarparallelepiped mit zwei gleichlangen Grundkanten und mit lauter rechten Winkeln. Es unterscheidet sich nur in der Stellung und im Verhältnis a : c vom ursprünglichen. Das innenzentrierte Elementarparallelepiped wird zum allseitig flächenzentrierten, wenn an Stelle der Grundkanten die Diagonalen der Basisquadrate zu x- und y-Koordinatenachsen gewählt werden. Hier ändern sich Stellung, Koordinatenverhältnis a : c und Absorptionsfähigkeit. Kristallographisch können die beiden Stellungen jeweilen nur in der sphenoidischen Hemiedrie voneinander unterschieden werden. Vom Standpunkt der reinen Symmetrielehre

aus genügt daher die Zurückführung eines gegebenen Raumsystemes auf eine der zwei oben erwähnten Translationsgruppen.

Die vergleichende Kristallstrukturlehre wird in Sonderfällen mit Vorteil auch basiszentrierte (doppeltprimitive) und allseitig flächenzentrierte (vierfachprimitive) Elementarparallelepipede in den Kreis ihrer Betrachtungen ziehen. Besonders bei pseudokubischem Habitus wird dies manchmal notwendig werden. Das vom Kristallographen angenommene Achsenverhältnis a : c der Grundgestalt wird nur zum Teil mit dem Verhältnis der primitiven Perioden übereinstimmen. Auf diese Beziehungen sei nachdrücklichst aufmerksam gemacht; wenn sie weiterhin nur gelegentlich erwähnt werden, so liegt dies im Interesse einer möglichst kurzen Darstellung. Schwierigkeiten wird es nie gewähren, eine gegebene Gruppe auf ein neues diesbezügliches Koordinatensystem zu beziehen.

$\mathfrak{S}_4$. Sphenoidisch-tetartoedrische Klasse der tetragonalen Abteilung (Tetragonal bisphenoidische Klasse) (II. Art)

Es ist die einer tetragonalen Drehspiegelachse isomorphe Achsenschar vorhanden.

Raumgruppe $\mathfrak{S}_4^1$ (Siehe Fig. 113)

Sie enthält gleichzeitig $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2^1$. Der Koordinatenanfangspunkt liegt auf einer tetragonalen Drehspiegelachse im Schnittpunkt mit der Drehspiegelebene. Primitives Tripel: a, a, c; $\alpha = \beta = \gamma = 90^0$.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.) a, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) 0, a, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.
III.) 0, 0, c; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; 1, 0, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

Tetragonale Drehspiegelachsen, zugleich digonale Drehungsachsen. $[001]_{00}$; $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Die mit den ersteren Achsen verbundenen Drehspiegelebenen sind: $(001)_0$ und $(001)_{\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, \bar{p}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ 2. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ 3. $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ 4. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$

Zähligkeit jeweilen = 1. Symmetriebedingung = S_4.

Die entstehenden Gitter sind von der Form des Elementarparallelepipeds.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Sie stellen sich bei beliebiger Lage auf einer Drehspiegelachse oder digonalen Drehungsachse ein. Zu $[\![0\,0\,p]\!]$ gehört $[\![0\,0\,\bar{p}]\!]$; zu $[\![\frac{1}{2}\,0\,\bar{p}]\!]$ aber $[\![0\,\frac{1}{2}\,\bar{p}]\!]$. Die Zähligkeit ist 2, die Symmetriebedingung $= C_2$. Die Punkte allgemeinster Lage sind vierzählig. Fig. 113b zeigt an Hand einer Punktlage, daß die Achse $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ tatsächlich Drehspiegelachse ist.

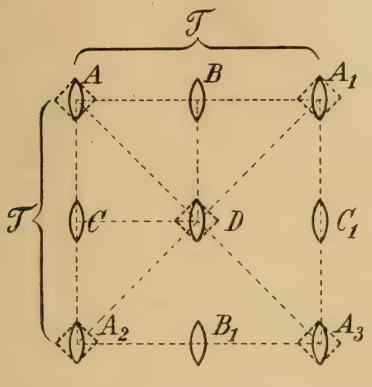


Fig. 113a. $\mathfrak{S}_4^1$ Ebene $(001)_0$. Durchstoßpunkte der darauf senkrecht stehenden Achsen.

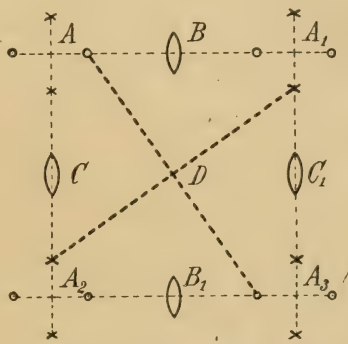


Fig. 113b. $\mathfrak{S}_4^1$. Eine allgemeine Punktlage (Kreuz oberhalb der Zeichenebene, Kreischen unterhalb) zeigt, daß wirklich die Achse $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ tetragonale Drehspiegelachse ist, wenn $[001]_{00}$ diesen Charakter besitzt.

Raumgruppe $\mathfrak{S}_4^2$

Diese Raumgruppe geht aus $\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{C}_2^3$ hervor. Als primitives Tripel kann $\frac{a_x}{2}+\frac{a_y}{2}+\frac{c}{2}$; $\frac{a_x}{2}-\frac{a_y}{2}+\frac{c}{2}$; c gelten, so daß bei gleicher Nullpunktswahl wie vorhin die Decktransformationsbedingungen lauten:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) $\frac{a}{2}, \frac{\bar{a}}{2}, \frac{c}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

III.) 0, 0, c; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; 1, 0, 0; 0, 0, 1.

Symmetrieelemente: (Siehe Fig. 114.)

Tetragonale Drehspiegelachsen:

$[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; ferner $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$.

Mit den ersten zwei Drehspiegelachsen stehen die Drehspiegelebenen $(001)_0$ und $(001)_{\frac{1}{2}}$ in Verbindung, mit den zweiten Drehspiegelachsen $(001)_{\frac{1}{4}}$ und $(001)_{\frac{3}{4}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$$[\![m, n, p]\!] \quad [\![n, \bar{m}, \bar{p}]\!] \quad [\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!] \quad [\![\bar{n}, m, \bar{p}]\!]$$
$$[\![m+\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}, p+\tfrac{1}{2}]\!] \quad [\![n+\tfrac{1}{2}, \bar{m}+\tfrac{1}{2}, \bar{p}+\tfrac{1}{2}]\!] \quad [\![\bar{m}+\tfrac{1}{2}, \bar{n}+\tfrac{1}{2}, p+\tfrac{1}{2}]\!] \quad [\![\bar{n}+\tfrac{1}{2}, m+\tfrac{1}{2}, \bar{p}+\tfrac{1}{2}]\!].$$

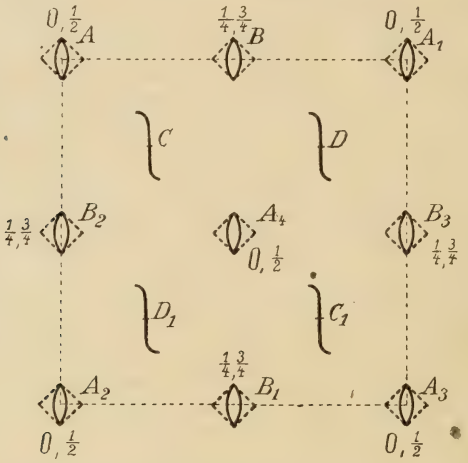


Fig. 114. $\mathfrak{S}_4^2$ Durchstoßpunkte der Achsen auf $(001)_0$. Grundquadrat bei innenzentriertem Elementarparallelepiped. Die Zahlen geben die Höhe der Drehspiegelebenen an.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$
2. $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$
3. $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$
4. $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$

Zähligkeit jeweilen = 2. Symmetriebedingung = S_4.

Diese Punktlagen bilden jede für sich Gitter von der Form des innenzentrierten Elementarparallelepipeds.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad sind bei beliebiger Lage auf einer der Drehspiegelachsen gegeben. Symmetriebedingung $1\,\overset{\downarrow}{()} = C_2$. Die Zähligkeit ist 4.

Alle übrigen Punkte sind mit drei Freiheitsgraden achtzählig.

Die Darstellung dieser Raumgruppe mittels eines allseitig flächenzentrierten Elementarparallelepipeds ist aus Fig. 115 ersichtlich. Diese

Figur zeigt die Durchstoßpunkte der Achsen auf einer Fläche (001). Die den Drehspiegelachsen beigeschriebenen Zahlen zeigen die relativen Höhen der zugeordneten Drehspiegelebenen an, wobei zu bemerken ist, daß außerdem noch in den jeweiligen Höhen $z + \frac{1}{2}$ derartige Ebenen auftreten. (Also für $\frac{1}{2}$ und 0 sind die gleichen Ebenen vorhanden.)

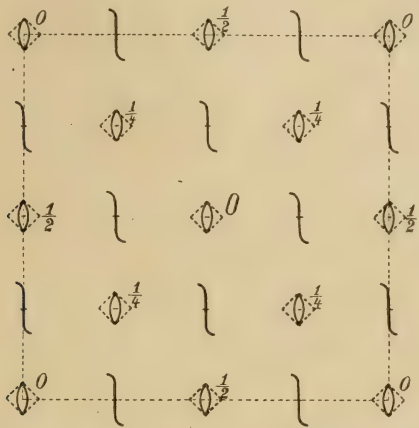


Fig. 115. $\mathfrak{C}_4^5$ Durchstoßpunkte der Achsen auf $(001)_0$. Grundquadrat bei allseitig flächenzentriertem Elementarparallelepiped. Die Zahlen beziehen sich auf den Höhenabstand der zu den Drehspiegelachsen gehörigen Drehspiegelebenen.

$\mathfrak{C}_4$. Tetartoedrische Klasse erster Art der tetragonalen Abteilung (Tetragonal pyramidale Klasse)

Es ist die einer tetragonalen Drehungsachse isomorphe Achsenschar vorhanden. Für die Raumgruppen $\mathfrak{C}_4^1$—$\mathfrak{C}_4^4$ ist a, a, c ein primitives Tripel. Die drei ersten Decktransformationsbedingungen lauten dann:

I.) a, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) 0, a, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.
III.) 0, 0, c; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_4^1$

Die tetragonalen Achsen sind Drehungsachsen. Implicite sind in der Raumgruppe $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2^1$ enthalten. Der Koordinatenanfangspunkt hat beliebige Lage auf einer tetragonalen Drehungsachse.

Die IV.) Decktransformationsbedingung heißt:

0, 0, 0; 0, 1, 0; 1, 0, 0; 0, 0, 1.

Tetragonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$; $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, p]\!]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Es sind das zunächst: $[\![0, 0, p]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ p]\!]$ mit der Zähligkeit 1 und der Symmetriebedingung $= C_4$. Derartige Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds. Weiterhin sind Punkte auf den digonalen Drehungsachsen ($= C_2$) zweizählig. Es gehören $[\![\frac{1}{2}\ 0\ p]\!]$ und $[\![0\ \frac{1}{2}\ p]\!]$ zusammen. Sie bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Basisflächenzentrierung.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden vierzählig. (Siehe Fig. 116.)

Raumgruppe $\mathfrak{C}_4{}^2$

Die tetragonalen Achsen sind rechtsgewundene Schraubenachsen mit der Schraubenkomponente $\frac{c}{4}$. (Untergruppe $\mathfrak{C}_2{}^2$ neben $\mathfrak{C}_1$.)

Die IV. Decktransformationsbedingung ist:

$$0, 0, \frac{3c}{4};\ 0, 1, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, 0, 1.$$

Tetragonale Schraubenachsen: $[001]_{00}$; $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{\frac{1}{2}0}$; $[001]_{0\frac{1}{2}}$. (Siehe Fig. 117.)

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}, p+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n, m, p+\frac{1}{4}]\!]$.

Alle Punkte sind ohne Symmetriebedingung vierzählig.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_4{}^3$

Die tetragonalen Achsen sind als solche Schraubenachsen mit der Schraubungskomponente $\frac{c}{2}$, deshalb sind sie zugleich digonale Drehungsachsen. $\mathfrak{C}_2{}^1$ neben $\mathfrak{C}_1$ sind implicite vorhanden.

Die IV.) Decktransformationsbedingung lautet:

$$0, 0, \frac{c}{2};\ 0, 1, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, 0, 1.$$

Symmetrieelemente: (Siehe Fig. 118.)

Tetragonale Schraubenachsen, zugleich digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$; $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001)_{0\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![n, m, p+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Auf allen Achsen, die digonale Drehungsachsen sind, ist bei der Symmetriebedingung C_2 Zweizähligkeit der Lagen vorhanden. Zu $[\![0, 0, p]\!]$ gehört $[\![0, 0, p+\frac{1}{2}]\!]$, zu

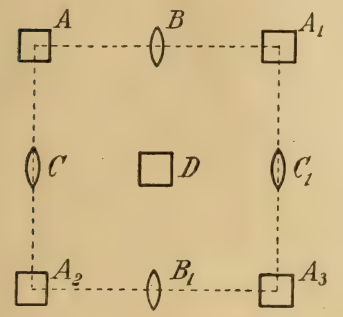


Fig. 116. $\mathfrak{C}_4^1$ Durchstoßpunkte der Achsen auf $(001)_0$. (A und D = tetragonale Drehungsachsen; B und C = digonal Drehungsachsen.)

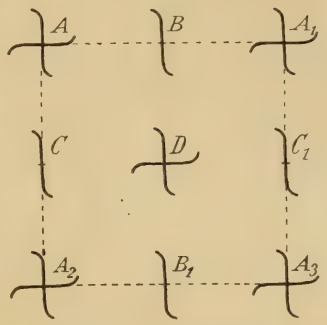


Fig. 117. $\mathfrak{C}_4^2$ Durchstoßpunkte der Achsen auf $(001)_0$. (A und D = rechte tetragonale Schraubenachsen; B und C = digonale Schraubenachsen.)

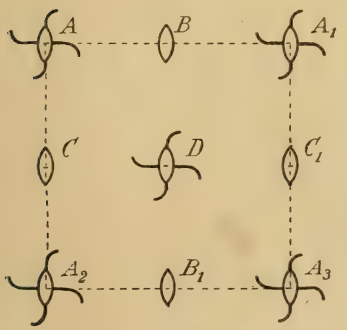


Fig. 118. $\mathfrak{C}_4^3$ Durchstoßpunkte der Achsen auf $(001)_0$. (A und D = tetragonale Schraubenachsen und digonale Drehungsachsen; B und C = digonale Drehungsachsen.)

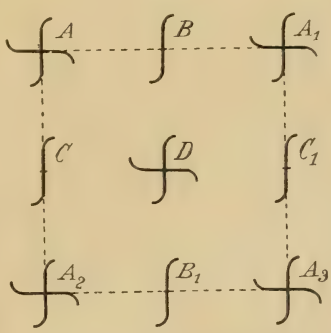


Fig. 119. $\mathfrak{C}_4^4$ Durchstoßpunkte der Achsen auf $(001)_0$. (A und D = linke tetragonale Schraubenachsen; B und C = digonale Schraubenachsen.)

$[\![\frac{1}{2}, 0, p]\!]$ $[\![0, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$. Die entstehenden Gitter sind von der Form des innenzentrierten Elementarparallelepipeds.

Sonst herrscht ohne Symmetriebedingung Vierzähligkeit.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_4^4$

Sie ist analog der Raumgruppe $\mathfrak{C}_4^2$. Die tetragonalen Schraubenachsen besitzen lediglich umgekehrten Windungssinn. (Siehe Fig. 119.)

Den Raumgruppen $\mathfrak{C}_4^5$ und $\mathfrak{C}_4^6$ kann ein Elementarparallelepiped zugeordnet werden, das zu einem primitiven Tripel: $\frac{a_x}{2}+\frac{a_y}{2}+\frac{c}{2}$, $\frac{a_x}{2}-\frac{a_y}{2}+\frac{c}{2}$; c führt. Demgemäß lauten dann die drei ersten Decktransformationsbedingungen:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) $\frac{a}{2}, \frac{\bar{a}}{2}, \frac{c}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

III.) 0, 0, c; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

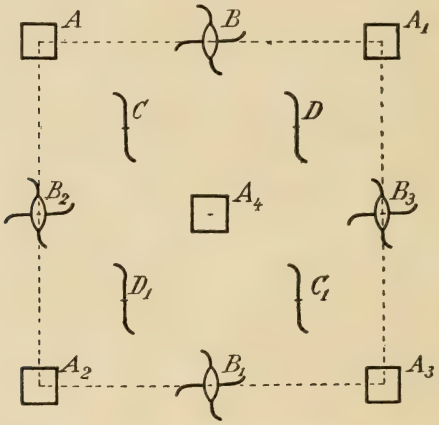


Fig. 120. $\mathfrak{C}_4^5$ Durchstoßpunkte der Achsen auf $(001)_0$ bei innenzentriertem Elementarparallelepiped.
Achsensymbolik wie in den vorhergehenden Figuren.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_4^5$ (Siehe Fig. 120)

$\mathfrak{C}_2^3$ ist in ihr enthalten. Der Koordinatenanfangspunkt liege auf der tetragonalen Drehungsachse.

IV.) Decktransformationsbedingung: 0, 0, 0; 0, 1, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 0, 1.

Tetragonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Tetragonale Schraubenachsen, zugleich digonale Drehungsachsen: $[001]_{0\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$.

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, p]\!]$

$[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Zweizählig auf den tetragonalen Drehungsachsen (C_4). Sie bilden Gitter von der Form des innenzentrierten Elementarparallelepipeds. Vierzählig auf den tetragonalen Schraubenachsen, die ja zugleich digonale Drehungsachsen sind (C_2).

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden achtzählig.

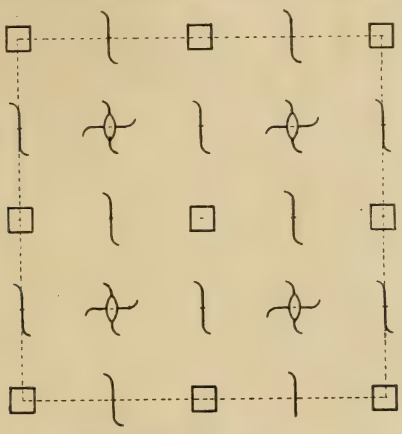


Fig. 121. $\mathfrak{C}_4^5$ Durchstoßpunkte der Achsen auf $(001)_0$ bei allseitig flächenzentriertem Elementarparallelepiped.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_4^6$

Alle tetragonalen Achsen sind Schraubenachsen. $\mathfrak{C}_2^3$ ist wieder Untergruppe. Wir legen diesmal den Koordinatenanfangspunkt in eine digonale Drehungsachse. (Fig. 122a zeigt die alte, Fig. 122b die neue Nullpunktswahl.)

IV. Decktransformationsbedingung: $0, \frac{a}{2}, \frac{c}{4}$; $0, 1, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 0, 1$.

Linke tetragonale Schraubenachse: $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$.

Rechte tetragonale Schraubenachse: $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, m, p+\frac{3}{4}]\!]$

$[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, \bar{m}, p+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}, m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{4}]\!]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Auf den digonalen Drehungsachsen sind vierzählige Punkte vorhanden mit der Symmetriebedingung C_2. Zu $[\![0\ 0\ p]\!]$ gehören $[\![0, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, 0, p+\frac{3}{4}]\!]$. Die übrigen Punkte der Raumgruppe sind mit drei Freiheitsgraden achtzählig.

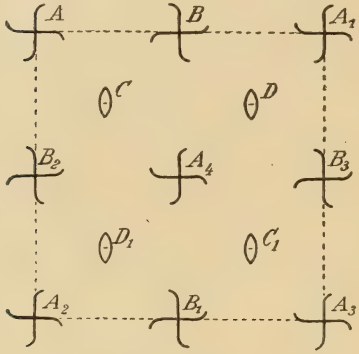


Fig. 122a.

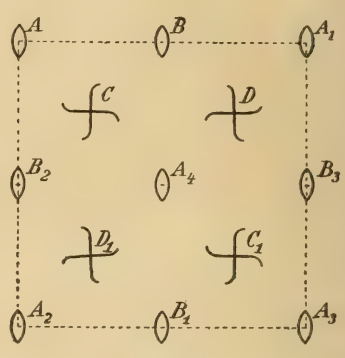


Fig. 122b.

$\mathfrak{C}_4^6$ Durchstoßpunkte der Achsen auf $(001)_0$ bei innenzentriertem Elementarparallelepiped.

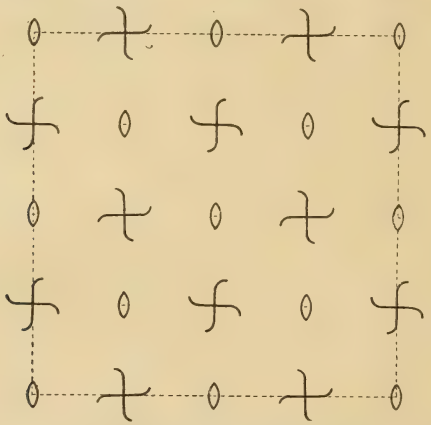


Fig. 123. $\mathfrak{C}_4^8$ Durchstoßpunkte der Achsen auf $(001)_0$ bei allseitig flächenzentriertem Elementarparallelepiped.

Beide Raumgruppen wollen wir auch auf ein allseitig flächenzentriertes Elementarparallelepiped beziehen. Dieses Elementarparallelepiped ist dann vierfachprimitiv. Das primitive Tripel wird zu $\frac{a_x}{2}+\frac{a_y}{2}$; $\frac{a_x}{2}+\frac{c}{2}$; $\frac{a_y}{2}+\frac{c}{2}$. Dementsprechend verändern sich die drei

ersten Decktransformationsbedingungen. Fig. 121 zeigt die resultierende Achsenverteilung für $\mathfrak{C}_4^5$.

Tetragonale Drehungsachsen sind dann:

$[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Tetragonale Schraubenachsen bezw. digonale Drehungsachsen: $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$.

Digonale Schraubenachsen:

$[001]_{0\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}0}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}0}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}$ $[001]_{0\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$.

Für $\mathfrak{C}_4^6$ ergibt sich die Fig. 123. Die Verteilung ist eine analoge, die relativen Lagen sind daher leicht abzulesen. Die Figuren sind wichtig, weil sie auch die Projektionen auf Würfelflächen kubischer Raumsysteme darstellen.

$\mathfrak{C}_{4v}$. Hemimorphe Klasse der tetragonalen Abteilung (Ditetragonal pyramidale Klasse)

Außer der Achsenschar, die einer tetragonalen Achse isomorph ist, sind vier Scharen von Symmetrieebenen vorhanden. Die Gruppen $\mathfrak{C}_{4v}^1$ bis $\mathfrak{C}_{4v}^8$ lassen sich auf ein Elementarparallelepiped beziehen, dessen Kanten a_x, a_y, c ein primitives Tripel bilden, so daß die ersten Decktransformationsbedingungen lauten:

I.) a, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) 0, a, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.
III.) 0, 0, c; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{4v}^1$

Sie enthält die Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_4^1$, $\mathfrak{C}_s^1$ $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$. Da $\mathfrak{C}_4^1$ auch $\mathfrak{C}_2^1$ enthält, sind $\mathfrak{C}_{2v}^1$ $\mathfrak{C}_{2v}^1$, $\mathfrak{C}_{2v}^{11}$ $\mathfrak{C}_{2v}^{11}$ ebenfalls vorhanden. Diese Untergruppen werden späterhin nicht mehr besonders angegeben werden.

Charakteristisch sind $\mathfrak{C}_4^1$ $\mathfrak{C}_s^1$, letzteres in Lage O (siehe Seite 82). Der Koordinatenanfangspunkt liege in einer tetragonalen Drehungsachse.

Einfache Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe oben.

IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 0, 1. V.) 0, 0, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Tetragonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$; $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{\frac{1}{2}0}$; $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(100)_0$ $(010)_0$; $(100)_{\frac{1}{2}}$ $(010)_{\frac{1}{2}}$. $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$.

Gleitspiegelebenen: $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$. $\left(\text{Gleitkomponenten } \frac{\mathfrak{d}}{2}\right)$[1]).

[1]) d in Länge und Richtung je eine der Diagonalen des Basisquadrates.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, p]\!]$ $[\![\bar{m}, n, p]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, p]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p]\!]$ $[\![n, m, p]\!]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Auf den tetragonalen Drehungsachsen $[\![0\ 0\ p]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ p]\!]$. Die Zähligkeit ist 1, die Symmetriebedingung $= C_{4v}$. Die Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds.
2. Auf den digonalen Drehungsachsen: Zu $[\![\frac{1}{2}\ 0\ p]\!]$ gehört $[\![0\ \frac{1}{2}\ p]\!]$. Die Zähligkeit ist 2, die Symmetriebedingung $= C_{2v}$. Die Punkte führen zu Gittern von der Form des basiszentrierten Elementarparallelepipeds.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Sie gehören den Spiegelebenen an. Auf einer Spiegelebene (110) liegen Punkte, die der Bedingung genügen $m = r - n$, wo r irgend eine positive oder negative Zahl, einschließlich Null, ist. Auf Spiegelebenen $(1\bar{1}0)$ liegen Punkte mit $m = r + n$.

Die Punktlagen auf Spiegelebenen sind vierzählig. Symmetriebedingung $= 1\,SE$. Außerdem gibt es nur noch allgemeine Punktlagen mit drei Freiheitsgraden. Die Verteilung der Symmetrieebenen und Achsen geht aus Fig. 124 hervor.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{4v}^{\ 2}$

Ihre Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_4^{\ 1}$, $\mathfrak{C}_s^{\ 2}$ $\mathfrak{C}_s^{\ 2}$, $\mathfrak{C}_s^{\ 3}$ $\mathfrak{C}_s^{\ 3}$. Charakteristisch können $\mathfrak{C}_4^{\ 1}$ mit $\mathfrak{C}_s^{\ 2}$ in Lage M und mit der Gleitkomponente $\frac{a}{2}$ genannt werden. Der Koordinatenanfangspunkt falle in eine tetragonale Drehungsachse.

Decktransformationsbedingungen: I.)—III.) siehe Seite 261.

IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 0, 1. V.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}$, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Tetragonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{1}{4}}$; $(100)_{\frac{3}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}$.

$(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$ Gleitkomp. $\frac{d}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, p]\!]$

$[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, p]\!]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Auf den tetragonalen Drehungsachsen. Zu $[\![0, 0, p]\!]$ gehört $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p]\!]$. Die Zähligkeit ist 2, die Symmetriebedingung $= C_4$.

2. Auf den digonalen Drehungsachsen. Zu $[\![\frac{1}{2}\ 0\ p]\!]$ gehört $[\![0\ \frac{1}{2}\ p]\!]$. Diese ebenfalls zweizähligen Punktlagen besitzen die Symmetriebedingung $= C_{2v}$.

In beiden Fällen entstehen Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Basiszentrierung.

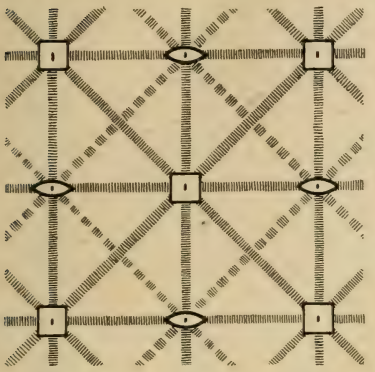


Fig. 124. $\mathfrak{C}_{4v}^1$ Auf $(001)_0$ senkrecht stehende Achsen und Symmetrieebenen.

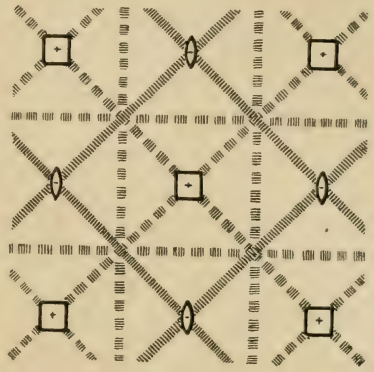


Fig. 125. $\mathfrak{C}_{4v}^2$ Auf $(001)_0$ senkrecht stehende Achsen und Symmetrieebenen.

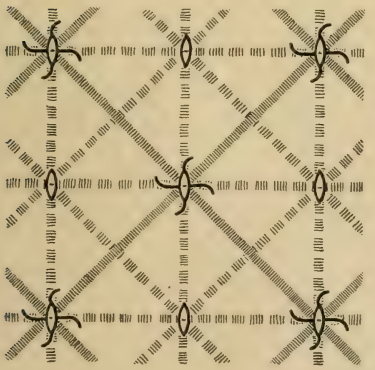


Fig. 126. $\mathfrak{C}_{4v}^3$ Auf $(001)_0$ senkrecht stehende Achsen und Symmetrieebenen.

Fig. 127. $\mathfrak{C}_{4v}^4$ Auf $(001)_0$ senkrecht stehende Achsen und Symmetrieebenen.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden: Sie gehorchen den Bedingungen $m = r + \frac{1}{2} + n$, wo r die gleiche Bedeutung hat wie oben. Die Zähligkeit ist, gemäß der Symmetriebedingung C_s, vier.

Die übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden achtzählig.

Fig. 125 stellt die Achsendurchstoßpunkte und Symmetrieebenenspuren auf (001) dar.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{4v}^3$

Ihre Untergruppen lauten: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_4^3$, $\mathfrak{C}_s^2$ $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$. Charakterisierend sind $\mathfrak{C}_4^3$ mit $\mathfrak{C}_s^2$ in Lage O. Der Koordinatenanfangspunkt liege auf der tetragonalen Schraubenachse, die zugleich digonale Drehungsachse ist.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 261.

IV.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $0, 1, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 0, 1$. V.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, 1$.

Tetragonale Schraubenachsen, zugleich digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$; $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$.

Gleitspiegelebenen: $(100)_0$ $(010)_0$; $(100)_{\frac{1}{2}}$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{c}{2}$.

$(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$. (Gleitkomp. $\frac{d}{2}$).

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, p+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{m}, n, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n, \bar{m}, p]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n, m, p]\!]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Auf den tetragonalen Schraubenachsen. Zu $[\![0, 0, p]\!]$ gehört $[\![0, 0, p+\frac{1}{2}]\!]$. Zu $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung = C_{2v}. Die Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Kanten [001].
2. Auf den digonalen Achsen. Zu $[\![\frac{1}{2}, 0, p]\!]$ gehören $[\![0, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, 0, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0, \frac{1}{2}, p]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_2.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden gehören bei Vierzähligkeit den Spiegelebenen an. Im übrigen sind die allgemeinen Lagen achtzählig. (Siehe Fig. 126.)

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{4v}^4$

Ihre Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_4^3$, $\mathfrak{C}_s^2$ $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$. $\mathfrak{C}_4^3$ mit $\mathfrak{C}_s^2$ in Lage M und mit der Gleitkomponente $\frac{a}{2}+\frac{c}{2}$ sind charakteristisch. Den Koordinatenanfangspunkt legen wir diesmal in eine digonale Drehungsachse, die nicht zugleich tetragonalen Charakter besitzt, aber als Schnittlinie zweier Spiegelebenen ausgezeichnete Eigenschaften aufweist.

Die Decktransformationsbedingungen lauten dann:

IV.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2}$; $0, 1, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 0, 1$. V.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2}$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, 1$.

Tetragonale Schraubenachsen zugleich digonale Drehungsachsen: $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$.

Gleitspiegelebenen: $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a_y}{2} + \frac{c}{2}$.

$(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a_x}{2} + \frac{c}{2}$. $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(11\bar{0})_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{d}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n + \frac{1}{2}, \bar{m} + \frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n} + \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{m} + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, p]\!]$ $[\![m + \frac{1}{2}, \bar{n} + \frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}]\!]$ $[\![n, m, p]\!]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Auf den gewöhnlichen digonalen Drehungsachsen. Zu $[\![0, 0, p]\!]$ gehört $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung = C_{2v}.
2. Auf den digonalen Drehungsachsen, die tetragonale Schraubenachsen sind. Zu $[\![0, \frac{1}{2}, p]\!]$ gehören $[\![\frac{1}{2}, 0, p + \frac{1}{2}]\!]$ $[\![0, \frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, 0, p]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_2.

1. bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung, 2. mit Innenzentrierung, Basiszentrierung und c-Kantenzentrierung.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden gehören den Spiegelebenen (110) bezw. $(1\bar{1}0)$ an. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_s.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden achtzählig. Fig. 127 zeigt die Achsen- und Symmetrieebenenverteilung.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{4v}^5$

Ihre Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_4^1$, $\mathfrak{C}_s^2$ $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$. $\mathfrak{C}_4^1$ und $\mathfrak{C}_s^2$ in Lage O bestimmen die Raumgruppe. Der Koordinatenanfangspunkt liege in einer tetragonalen Drehungsachse.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 261.

IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 0, 1. V.) 0, 0, $\frac{c}{2}$; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Tetragonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$; $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{0\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$.

Gleitspiegelebenen: $(100)_0$ $(010)_0$; $(100)_{\frac{1}{2}}$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{c}{2}$.

$(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$ Gleitkomp. $\frac{c}{2}$. $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{d}{2} + \frac{c}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, p]\!]$

$[\![\bar{m}, n, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![n, m, p+\tfrac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Zu $[\![0\,0\,p]\!]$ gehört $[\![0, 0, p+\tfrac{1}{2}]\!]$; die Zähligkeit ist 2, die Symmetriebedingung $= C_4$. Diese Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Vertikalkanten.
2. Zu $[\![\tfrac{1}{2}, 0, p]\!]$ sind $[\![0, \tfrac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}, 0, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![0, \tfrac{1}{2}, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ zu rechnen. Die Zähligkeit ist 4, die Symmetriebedingung lautet $= C_2$.

Alle übrigen Punkte sind mit drei Freiheitsgraden achtzählig. Im Grundriß ist die Ebenen- und Achsenverteilung analog der von $\mathfrak{C}_{4v}^{1}$, nur sind jetzt alle Symmetrieebenen Gleitspiegelebenen.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{4v}^{6}$

Als Untergruppen sind zu bezeichnen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_4^1$, $\mathfrak{C}_s^2$ $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$. Charakteristisch sind $\mathfrak{C}_4^1$ mit $\mathfrak{C}_s^2$ in Lage M und einer schräg zur Achse gerichteten Gleitkomponente. Der Koordinatenanfangspunkt wird gleich gewählt wie in $\mathfrak{C}_{4v}^{5}$.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 261.

IV.) $0,0,0;\ 0,1,0;\ \bar{1},0,0;\ 0,0,1$. V.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2};\ \bar{1},0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1$.

Symmetrieelemente: Achsen wie in $\mathfrak{C}_{4v}^{5}$, die beiden tetragonalen aber zusammengehörig.

Gleitspiegelebenen:

$(100)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. jeweilen $\frac{a}{2}+\frac{c}{2}$ (a_x oder a_y).

$(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$ Gleitkomp. $\frac{d}{2}+\frac{c}{2}$. $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{c}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}, p]\!]$

$[\![\bar{m}+\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}+\tfrac{1}{2}, \bar{m}+\tfrac{1}{2}, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\tfrac{1}{2}, \bar{n}+\tfrac{1}{2}, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![n+\tfrac{1}{2}, m+\tfrac{1}{2}, p+\tfrac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Zu $[\![0, 0, p]\!]$ gehört diesmal $[\![\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, p+\tfrac{1}{2}]\!]$. Die Zähligkeit ist 2, die Symmetriebedingung $= C_4$. Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung werden gebildet.
2. $[\![\tfrac{1}{2}, 0, p]\!]$ ordnen sich $[\![0, \tfrac{1}{2}, p]\!]$ $[\![0, \tfrac{1}{2}, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}, 0, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ bei. Die vierzähligen Punktlagen müssen der Symmetriebedingung C_2 gehorchen.

Alle übrigen Punkte sind mit drei Freiheitsgraden achtzählig. Im Grundriß ergibt sich die gleiche Achsen- und Symmetrieebenenverteilung wie in Fig. 125, doch sind alle Symmetrieebenen nur Gleitspiegelebenen.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{4v}^7$

Ihre Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_4^3$, $\mathfrak{C}_s^1\,\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4$. $\mathfrak{C}_4^3$ und $\mathfrak{C}_s^1$ in Lage O charakterisieren das Raumsystem. Der Nullpunkt gehört einer tetragonalen Schraubenachse an.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 261.

IV.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $0, 1, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 0, 1$. V.) $0, 0, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, 1$.

Tetragonale Schraubenachsen, zugleich digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$; $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

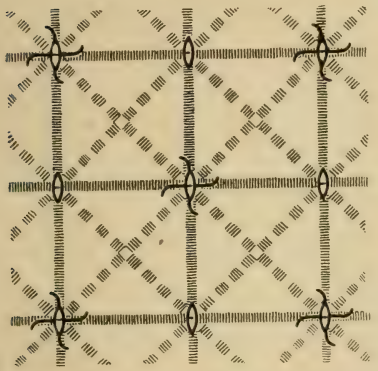


Fig. 128. $\mathfrak{C}_{4v}^7$ Auf $(001)_0$ senkrecht stehende Achsen und Symmetrieebenen.

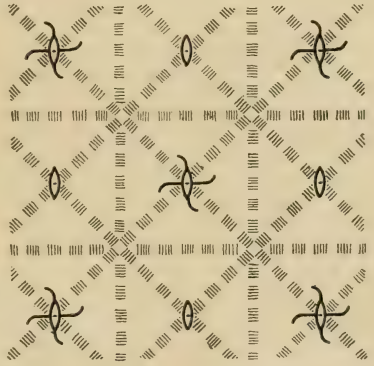


Fig. 129. $\mathfrak{C}_{4v}^8$ Auf $(001)_0$ senkrecht stehende Achsen und Symmetrieebenen.

Gew. Digonale Drehungsachsen: $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(100)_0$ $(010)_0$; $(100)_{\frac{1}{2}}$ $(010)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen:

$(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$ Gleitkomp. $\frac{c}{2}$. $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{d}{2} + \frac{c}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}, p + \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, p + \frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{m}, n, p]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, p + \frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p]\!]$ $[\![n, m, p + \frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Zu $[\![0, 0, p]\!]$ gehört $[\![0, 0, p + \frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung = C_{2v}. (Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Kanten [001].)

2. Gleichwertig sind $[\![\frac{1}{2}, 0, p]\!]$ $[\![0, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit und Symmetriebedingung sind gleich wie für 1). Die Gitter sind von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Zusammengehörig sind beispielsweise $[\![0, n, p]\!]$ $[\![n, 0, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}, 0, p+\frac{1}{2}]\!]$. Die Zähligkeit ist mit 4 zu veranschlagen, die Symmetriebedingung lautet C_s.

Die übrigbleibenden Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden achtzählig. Der Grundriß ist durch Fig. 128 gegeben.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{4v}^{8}$

Diesmal lauten die Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_4^3$, $\mathfrak{C}_s^2$ $\mathfrak{C}_8^2$, $\mathfrak{C}_8^4$ $\mathfrak{C}_8^4$. Charakteristisch sind $\mathfrak{C}_4^3$ mit $\mathfrak{C}_s^2$ in Lage M und mit horizontaler Gleitkomponente. Der Koordinatenanfangspunkt gehört einer tetragonalen Schraubenachse an.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III). Siehe Seite 261.

IV.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $0, 1, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 0, 1$. V.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, 1$.

Tetragonale Schraubenachsen, zugleich digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}$.

$(1\bar{1}0)_0$ $(1\bar{1}0)_0$ Gleitkomp. $\frac{d}{2}+\frac{c}{2}$. $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{c}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, m, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, p+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Sie sind alle vierzählig gemäß einer Symmetriebedingung $= C_2$. Zu $[\![0, 0, p]\!]$ ordnen sich $[\![0, 0, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ zu. Gleichwertig mit $[\![\frac{1}{2}, 0, p]\!]$ sind $[\![0, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, 0, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0, \frac{1}{2}, p]\!]$. Die Gitter sind von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung, Zentrierung der Flächen (001) und Kanten [001]. Außer diesen Punkten gibt es nur noch achtzählige mit drei Freiheitsgraden. Der Grundriß entspricht der Fig. 129.

Die Raumgruppen $\mathfrak{C}_{4v}^{9}$ — $\mathfrak{C}_{4v}^{12}$ können auf ein Elementarparallelepiped a, a, c bezogen werden, dem als primitives Tripel $\frac{a_x}{2}+\frac{a_y}{2}+\frac{c}{2}$, $\frac{a_x}{2}-\frac{a_y}{2}+\frac{c}{2}$, c angehört.

Die drei ersten Decktransformationsbedingungen lauten dann:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) $\frac{a}{2}, \frac{\bar{a}}{2}, \frac{c}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

III.) 0, 0, c; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Auch ein vierfach primitives Parallelepiped (allseitig flächenzentriert) kann man als elementar betrachten. Die dann in bezug auf Koordinatenwerte, Zähligkeit und Bezeichnung der Symmetrieelemente sich einstellenden Verhältnisse sind in jedem Falle leicht abzuleiten.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{4v}^9$

Ihre Untergruppen sind mit $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_4^5$, $\mathfrak{C}_8^3$ $\mathfrak{C}_8^3$, $\mathfrak{C}_8^3$ $\mathfrak{C}_8^3$ zu bezeichnen. Charakteristisch sind $\mathfrak{C}_4^5$ $\mathfrak{C}_8^3$. Der Koordinatenanfangspunkt gehöre einer tetragonalen Drehungsachse an.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe oben.

IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 0, 1. V.) 0, 0, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, $\bar{1}$, 0; 0, 0, 1.

Symmetrieelemente:

Tetragonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Tetragonale Schraubenachsen, zugleich digonale Drehungsachsen: $[001]_{0\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$.

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$.

Spiegelebenen: $(100)_0$ $(010)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ $(010)_{\frac{1}{2}}$; $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$.

Gleitspiegelebenen:

$(100)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2} + \frac{c}{2}$.

$(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{d}{2} + \frac{c}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, p]\!]$ $[\![\bar{m}, n, p]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, p]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p]\!]$ $[\![n, m, p]\!]$
$[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Zu $[\![0, 0, p]\!]$ gehört $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung = C_{4v}. Die Punkte bilden Gitter von der Form des innenzentrierten Elementarparallelepipeds.
2. Zu $[\![\frac{1}{2}, 0, p]\!]$ müssen $[\![0, \frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![0, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, 0, p+\frac{1}{2}]\!]$ zugerechnet werden. Die Zähligkeit ist 4, die Symmetriebedingung lautet = C_{2v}. Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung, Grundflächenzentrierung und c-Kantenzentrierung werden gebildet.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Auf den Spiegelebenen sind die Punktlagen achtzählig. So bilden $[0, n, p]$ $[n, 0, p]$ $[0, \bar{n}, p]$ $[\bar{n}, 0, p]$ $[\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$ $[n+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$ $[\bar{n}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$ einen zusammengehörigen Komplex.

Punkte allgemeiner Lage sind 16zählig.

Die Symmetrieachsen- und -ebenenverteilung geht auch aus dem Grundriß Fig. 130 hervor.

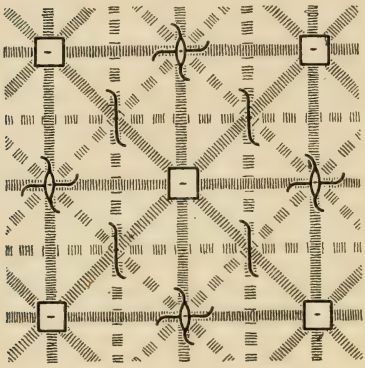


Fig. 130. $\mathfrak{C}_{4v}^{9}$ Auf $(001)_0$ senkrecht stehende Achsen und Symmetrieebenen. Grundquadrat bei innenzentriertem Elementarparallelepiped.

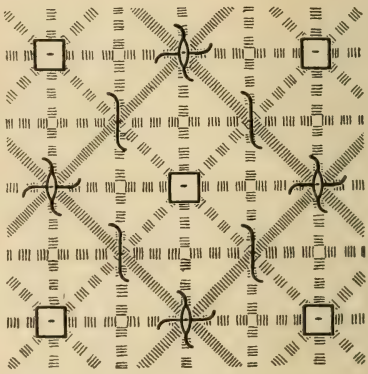


Fig. 131. $\mathfrak{C}_{4v}^{10}$ Auf $(001)_0$ senkrecht stehende Achsen und Symmetrieebenen. Grundquadrat bei innenzentriertem Elementarparallelepiped.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{4v}^{10}$

Die Untergruppen lauten: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_4^5$, $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$. Charakteristisch sind $\mathfrak{C}_4^5$ $\mathfrak{C}_s^4$. Der Koordinatenanfangspunkt liege in einer tetragonalen Drehungsachse.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 269.

IV.) $0, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, 0, 1.$ V.) $0, 0, \frac{c}{2};\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, 1.$

Achsen wie in $\mathfrak{C}_{4v}^{9}$. Spiegelebenen: $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(100)_0$ $(010)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{c}{2}$.

$(100)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a}{2}$. $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$ Gleitkomp. $\frac{c}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[m, n, p]$ $[n, \bar{m}, p]$ $[\bar{m}, \bar{n}, p]$ $[\bar{n}, m, p]$

$[\bar{m}, n, p+\frac{1}{2}]$ $[\bar{n}, \bar{m}, p+\frac{1}{2}]$ $[m, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]$ $[n, m, p+\frac{1}{2}]$

$[m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$ $[n+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$ $[\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$ $[\bar{n}+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$

$[\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]$ $[\bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p]$ $[m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]$ $[n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, p]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Mit $[0, 0, p]$ sind verbunden $[0, 0, p+\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p]$. Die Zähligkeit ist 4, die Symmetriebedingung C_4. Zu $[\frac{1}{2}, 0, p]$ gehören $[0, \frac{1}{2}, p]$ $[\frac{1}{2}, 0, p+\frac{1}{2}]$ $[0, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$. Zähligkeit ebenfalls gleich vier. Symmetriebedingung $= C_{2v}$.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden befinden sich auf den Spiegelebenen $(110)_{\frac{1}{2}}$ bezw. $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$. Die Zähligkeit ist 8, die Symmetriebedingung C_s.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden 16zählig. (Siehe auch Grundriß Fig. 131.)

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{4v}^{11}$

Als Untergruppen figurieren: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_4^6$, $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$. Charakteristisch sind $\mathfrak{C}_4^6$ und $\mathfrak{C}_s^3$. Den Koordinatenanfangspunkt müssen wir diesmal, gemäß unserer Übereinkunft, in die zweizählige Drehungsachse legen.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 269.

IV.) $0, \frac{a}{2}, \frac{c}{4}$; $0, 1, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 0, 1$. V.) $0, 0, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, 1$.

Linke tetragonale Schraubenachsen: $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$.

Rechte tetragonale Schraubenachsen: $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(100)_0$ $(010)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ $(010)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen:

$(100)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$. $(110)_{\frac{1}{4}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{4}}$; $(110)_{\frac{3}{4}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{3}{4}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[m, n, p]$ $[n, \bar{m}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{4}]$ $[\bar{m}, \bar{n}, p]$ $[\bar{n}+\frac{1}{2}, m, p+\frac{3}{4}]$

$[\bar{m}, n, p]$ $[\bar{n}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{4}]$ $[m, \bar{n}, p]$ $[n+\frac{1}{2}, m, p+\frac{3}{4}]$

$[m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$ $[n+\frac{1}{2}, \bar{m}, p+\frac{3}{4}]$ $[\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$ $[\bar{n}, m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{4}]$

$[\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$ $[\bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{m}, p+\frac{3}{4}]$ $[m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$ $[n, m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{4}]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad: Zu $[0, 0, p]$ gehören $[0, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{4}]$ $[\frac{1}{2}, 0, p+\frac{3}{4}]$ $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$. Die Zähligkeit ist 4, die Symmetriebedingung $= C_{2v}$.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Sie gehören bei Achtzähligkeit den Spiegelebenen an.

Alle übrigen Punktlagen sind (mit drei Freiheitsgraden) 16-zählig. Der Grundriß ist in Fig. 132 gegeben.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{4v}^{12}$

Ihre Untergruppen heißen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_4^6$, $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$. $\mathfrak{C}_4^6$ und $\mathfrak{C}_s^4$ sind charakterisierend. Gleiche Nullpunktswahl wie vorhin.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 269.

IV.) $0, \frac{a}{2}, \frac{c}{4}$; $0, 1, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 0, 1$. V.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, 1$.

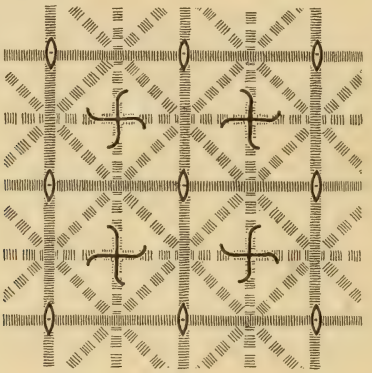


Fig. 132. $\mathfrak{C}_{4v}^{11}$ Auf $(001)_0$ senkrecht stehende Achsen und Symmetrieebenen. Grundquadrat bei innenzentriertem Elementarparallelepiped.

Achsen wie in $\mathfrak{C}_{4v}^{11}$. Gleitspiegelebenen. Alle in $\mathfrak{C}_{4v}^{11}$ auftretenden Ebenen sind Gleitspiegelebenen.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, m, p+\frac{3}{4}]\!]$
$[\![m, n, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, m, p+\frac{1}{4}]\!]$
$[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, \bar{m}, p+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}, m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{4}]\!]$
$[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{m}, p+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![n, m+\frac{1}{2}, p+\frac{3}{4}]\!]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Sie gehören den digonalen Drehungsachsen an. $[\![0, 0, p]\!]$ $[\![0, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, 0, p+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![0, 0, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0, \frac{1}{2}, p+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, 0, p+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p]\!]$ bilden einen zusammengehörigen Komplex. Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = C_2.

Alle anderen Punktlagen sind 16zählig. Die Achsen- und Symmetrieebenenverteilung ist aus Fig. 132 ersichtlich, wenn man bedenkt, daß an Stelle der dort noch vorhandenen Spiegelebenen nun ebenfalls Gleitspiegelebenen getreten sind.

$\mathfrak{C}_{4h}$. Paramorph-hemiedrische Klasse der tetragonalen Abteilung (Die tetragonal bipyramidale Klasse)

Senkrecht zu der Achsenschar, die einer tetragonalen Achse isomorph ist, findet sich eine Symmetrieebenenschar. Außerdem stellen sich ohne weiteres Symmetriezentren ein. Die Raumgruppen $\mathfrak{C}_{4h}^{1}$—$\mathfrak{C}_{4h}^{4}$ lassen sich auf ein tetragonales Elementarparallelepiped mit a_x, a_y, c als primitives Tripel beziehen.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{4h}^{1}$

Ihre Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_4^1$, $\mathfrak{C}_s^1$. $\mathfrak{C}_4^1$ und $\mathfrak{C}_s^1$ mögen als charakteristisch gelten. Der Koordinatenanfangspunkt liege in einem auf der tetragonalen Drehungsachse befindlichen Symmetriezentrum.

Einfachste Decktransformationsbedingungen. [I.)—III.) ist $\mathfrak{C}_{4h}^{1}$—$\mathfrak{C}_{4h}^{4}$ gemeinsam.]

I.) a, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) 0, a, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.
III.) 0, 0, c; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 0, 1.
V.) 0, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

Symmetriezentren: I. = [[0 0 0]]; II. = [[0 0 $\frac{1}{2}$]]; III. = [[$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ 0]]; IV. = [[$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$]]; V. = [[0 $\frac{1}{2}$ 0]] [[$\frac{1}{2}$ 0 0]]; VI. = [[0 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$]] [[$\frac{1}{2}$ 0 $\frac{1}{2}$]].

Tetragonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$; $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(001)_0$; $(001)_{\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:
[[m, n, p]] [[n, $\bar{m}$, p]] [[$\bar{m}$, $\bar{n}$, p]] [[$\bar{n}$, m, p]] [[m, n, $\bar{p}$]] [[n, $\bar{m}$, $\bar{p}$]] [[$\bar{m}$, $\bar{n}$, $\bar{p}$]] [[$\bar{n}$, m, $\bar{p}$]].

Punktlagen ohne Freiheitsgrad: Die viererlei Symmetriezentren I, II, III, IV entsprechen jeweilen einzähligen Punktlagen mit der Symmetriebedingung C_{4h}. Jede Punktlage bildet einfache Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds.

Die Symmetriezentren V und VI bilden für sich Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Basisflächenzentrierung. Ihre Zähligkeit ist 2, die Symmetriebedingung = C_{2h}.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Beliebige Punkte [[0 0 p]] sind zweizählig. Die Symmetriebedingung heißt C_4. Gleich verhalten sich die Punkte [[$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ p]]. Zu [[$\frac{1}{2}$ 0 p]] gehören [[0 $\frac{1}{2}$ p]] [[$\frac{1}{2}$ 0 $\bar{p}$]] [[0 $\frac{1}{2}$ $\bar{p}$]]. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_2.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Dazu gehören Punkte $[\![m, n, 0]\!]$ oder $[\![m, n, \frac{1}{2}]\!]$. Die Zähligkeit ist 4, die Symmetriebedingung C_s.

Bei allgemeiner Lage herrscht Achtzähligkeit. Ein perspektivisches Bild des Raumsystemes mit eingezeichneten Symmetrieelementen (bezogen auf das Elementarparallelepiped) vermittelt Fig. 133.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{4h}^2$

Die Kombination der Untergruppen ist: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_4^3$, $\mathfrak{C}_s^1$. $\mathfrak{C}_4^3\,\mathfrak{C}_s^1$ bestimmen das ganze Raumsystem. Der Koordinatenanfangspunkt falle mit einem auf der tetragonalen Schraubenachse liegenden Symmetriezentrum zusammen.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe $\mathfrak{C}_{4h}^1$.

IV.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $0, 1, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 0, 1$. V.) $0, 0, 0$; $1, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

Symmetriezentren: I. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$. II. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$.
III. $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$. VI. $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$.

Tetragonale Schraubenachsen, zugleich digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$; $[00\bar{1}]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, p+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![m, n, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}, m, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad: Die viererlei verschiedenen Symmetriezentrumsarten sind jede für sich zweizählig. Die Symmetriebedingung lautet C_{2h}. Die Gitter sind entweder von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung oder mit Zentrierung der Kanten [001].

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Sie gehören den Achsen an, die als digonal Drehungsachsen sind. Die Zähligkeit ist in beiden Sonderfällen 4, die Symmetriebedingung $= C_2$.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Ebenfalls vierzählig sind Punkte auf den Spiegelebenen (C_s).

Die allgemeine Lage (drei Freiheitsgrade) ist achtzählig. Abgesehen davon, daß die tetragonalen Achsen nur digonale Drehungsachsen sind, ist die Verteilung der Symmetrieelemente somit eine analoge wie in $\mathfrak{C}_{4h}^1$. (Siehe daher auch Fig. 133.)

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{4h}^8$

Diesmal heißen die Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_4^1$, $\mathfrak{C}_8^2$. $\mathfrak{C}_4^1$ $\mathfrak{C}_8^2$ bestimmen das Raumsystem. Den Koordinatenanfangspunkt wollen wir auf der tetragonalen Drehungsachse im Schnittpunkt mit einer Gleitspiegelebene belassen.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 273.

IV.) $0, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, 0, 1.$ V.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0;\ 1, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, \bar{1}.$

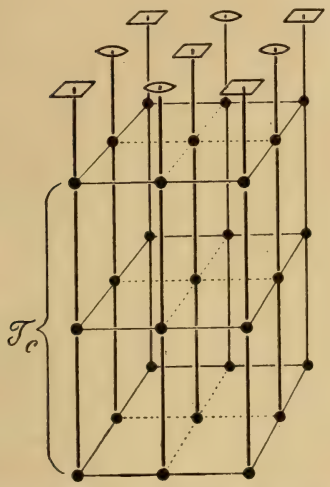


Fig. 133. $\mathfrak{C}_{4h}^1$ Perspektivische Darstellung eines Elementarparallelepipeds mit seinen Achsen, horizontalen Spiegelebenen und Symmetriezentren.

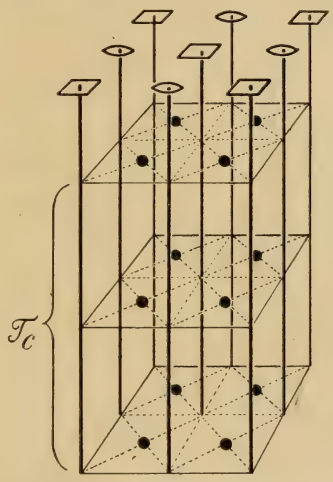


Fig. 134. $\mathfrak{C}_{4h}^8$ Perspektivische Darstellung eines Elementarparallelepipeds mit seinen Achsen, horizontalen Gleitspiegelebenen und Symmetriezentren.

Symmetriezentren:

I. $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ 0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ 0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ 0]\!]$. II. $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}]\!]$.

Tetragonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(001)_0$; $(001)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{d}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, p]\!]$

$[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad. Die Symmetriezentren bilden zwei vierzählige Gruppen. Die Symmetriebedingung dieser Punktlagen ist lediglich $= 1\,Z = C_i$. Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierter Grundfläche und mit zentrierten Kanten des Basisquadrates werden gebildet.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Zu $[\![0\ 0\ p]\!]$ gehört $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \bar{p}]\!]$. Zähligkeit $= 2$. Symmetriebedingung $= C_4$. $[\![\frac{1}{2}\ 0\ p]\!]$ sind $[\![0\ \frac{1}{2}\ p]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ \bar{p}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ \bar{p}]\!]$ zugeordnet. Zähligkeit $= 4$. Symmetriebedingung $= C_2$.

Weiterhin gibt es nur noch Punktlagen mit drei Freiheitsgraden und einer Zähligkeit von acht. In perspektivischer Darstellung vermittelt Fig. 134 ein Bild von den hier obwaltenden Verhältnissen.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{4h}^4$

Ihre Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_4^3$, $\mathfrak{C}_s^2$. $\mathfrak{C}_4^3$ und $\mathfrak{C}_s^2$ sind für das Raumsystem charakteristisch. Um den Vergleich nicht zu erschweren, belassen wir den Koordinatenanfangspunkt auf der tetragonalen Schraubenachse. Es gibt dann allerdings noch gleichzählige Punkte ohne Freiheitsgrad.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 273.

VI.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $0, 1, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 0, 1$. V.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0$; $1, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

Symmetriezentren:

I. $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ 0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}]\!]$. II. $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ 0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ 0]\!]$.

Tetragonale Schraubenachsen, zugleich digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomponente $\frac{d}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, p+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad. Jede der beiderlei Arten von Symmetriezentren bildet Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit allseitiger Flächenzentrierung. Zähligkeit $= 4$. Symmetriebedingung $= C_i$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Sie sind, entsprechend der einzigen Symmetriebedingung C_2, vierzählig.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden achtzählig.

Auch in diesem Fall kann, nach Anbringen der Korrektur hinsichtlich der Achsenschar, eine bereits gezeichnete Figur, nämlich Fig. 134, zur Veranschaulichung des Systemes dienen.

Die Raumgruppen $\mathfrak{C}_{4h}^5$ und $\mathfrak{C}_{4h}^6$ können auf ein Elementarparallelepiped a, a, c bezogen werden, dem als primitives Tripel der Perioden $\frac{a_x}{2}+\frac{a_y}{2}+\frac{c}{2}$, $\frac{a_x}{2}-\frac{a_y}{2}+\frac{c}{2}$, c, zugrunde liegt.

Die drei ersten Decktransformationsbedingungen lauten dann:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) $\frac{a}{2}, \frac{\bar{a}}{2}, \frac{c}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

III.) 0, 0, c; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{4h}^5$

Die Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_4^5$, $\mathfrak{C}_s^3$. Die beiden letzten genügen zur Charakterisierung. Der Koordinatenanfangspunkt sei mit einem auf der tetragonalen Drehungsachse liegenden Symmetriezentrum identisch.

Einfachste zusätzliche Decktransformationsbedingungen:
IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 0, 1. V.) 0, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

Symmetrieelemente:

Symmetriezentren: I. = $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$. II. = $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$.
III. = $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$.
IV. = $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$.

Tetragonale Drehungsachsen. $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Tetragonale Schraubenachsen, zugleich digonale Drehungsachsen: $[001]_{0\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$.

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$.

Spiegelebenen: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{d}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, p]\!]$ $[\![m, n, \bar{p}]\!]$ $[\![n, \bar{m}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}, m, \bar{p}]\!]$
$[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad. Sie entsprechen den Symmetriezentren. I und II sind zweizählig mit der Symmetriebedigung = C_{4h}. Sie bilden Gitter von der Form des innenzentrierten Elementarparallelepipeds. III ist vierzählig, mit der Symmetriebedingung = C_{2h}.

Das Gitter besitzt gegenüber dem Elementarparallelepiped außer der Innenzentrierung noch Zentrierung der Flächen (001) und Kanten [001]. IV von Symmetriezentren ist achtzählig, mit der einzigen Bedingung $= C_i$. Die kleinsten Gittermaschen sind $\frac{1}{8}$ des Volumens eines Elementarparallelepipeds.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Auf den tetragonalen Drehungsachsen herrscht die Zähligkeit 4, auf den tetragonalen Schraubenachsen (zugleich digonale Drehungsachsen) die Zähligkeit 8 bei beliebiger Lage.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Sie gehören den Spiegelebenen an und besitzen die Zähligkeit 8.

Weiterhin sind noch Punktlagen mit drei Freiheitsgraden und der Zähligkeit 16 vorhanden.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{4h}{}^6$

Die Untergruppen lauten: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_4{}^6$, $\mathfrak{C}_s{}^4$. Charakteristisch sind die beiden letzteren. Ein Symmetriezentrum sei diesmal Nullpunkt.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 277.

IV.) $\frac{a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{3c}{4}$; $0, 1, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 0, 1$. V.) $0, \frac{a}{2}, 0$; $1, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

Symmetriezentren:

I. $[[0\,0\,0]]$ $[[\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]]$ $[[0\,\frac{1}{2}\,0]]$ $[[\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]]$ $[[\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]]$ $[[\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]]$ $[[\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]]$ $[[\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]]$.

II. $[[\frac{1}{2}\,0\,0]]$ $[[0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]]$ $[[\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]]$ $[[0\,0\,\frac{1}{2}]]$ $[[\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]]$ $[[\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]]$ $[[\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]]$ $[[\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]]$.

Tetragonale Schraubenachsen:

$[001]_{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\,0}$ einerseits (links); $[001]_{\frac{1}{4}\,0}$ $[001]_{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}$ anderseits (rechts).

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{0\,\frac{1}{4}}$ $[001]_{0\,\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}}$.

Gleitspiegelebenen:

$(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{a_y}{2}$; $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{a_x}{2}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[[m, n, p]]$ $[[n+\frac{1}{4}, \bar{m}+\frac{1}{4}, p+\frac{3}{4}]]$ $[[\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]]$ $[[\bar{n}+\frac{1}{4}, m+\frac{3}{4}, p+\frac{1}{4}]]$
$[[m, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]]$ $[[n+\frac{1}{4}, \bar{m}+\frac{3}{4}, \bar{p}+\frac{1}{4}]]$ $[[\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]]$ $[[\bar{n}+\frac{1}{4}, m+\frac{1}{4}, \bar{p}+\frac{3}{4}]]$
$[[m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]]$ $[[n+\frac{3}{4}, \bar{m}+\frac{3}{4}, p+\frac{1}{4}]]$ $[[\bar{m}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]]$ $[[\bar{n}+\frac{3}{4}, m+\frac{1}{4}, p+\frac{3}{4}]]$
$[[m+\frac{1}{2}, n, \bar{p}+\frac{1}{2}]]$ $[[n+\frac{3}{4}, \bar{m}+\frac{1}{4}, \bar{p}+\frac{3}{4}]]$ $[[\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}]]$ $[[\bar{n}+\frac{3}{4}, m+\frac{3}{4}, \bar{p}+\frac{1}{4}]]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad. Die beiden verschiedenen Symmetriezentrumslagen sind achtzählig, mit der Bedingung C_i.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Sie gehören den digonalen Drehungsachsen (C_2) an. Zähligkeit $= 8$.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden 16zählig.

$\mathfrak{V}_d$. Sphenoidisch-hemiedrische Klasse der tetragonalen Abteilung (Didigonal- oder -tetragonal-skalenoedrische Klasse) (Hemiedrie II. Art)

Eine Achsenschar ist einer tetragonalen Drehspiegelachse isomorph. Zwei senkrecht aufeinander stehende Symmetrieebenenscharen schneiden sich in zu diesen Achsen parallelen Schnittlinien. Parallel den Winkelhalbierenden dieser Ebenen sind Scharen digonaler Achsen vorhanden.

Die Raumgruppen $\mathfrak{V}_d^1 - \mathfrak{V}_d^8$ können auf ein Elementarparallelepiped bezogen werden, dessen primitives Tripel a, a, c ist. Allein nun ist es bei den Kristallographen zur Konvention geworden, den a-Achsen die Richtung der digonalen Achsenscharen zu geben. Tragen wir diesem Umstande auch hier Rechnung, so müssen alle Raumgruppen mit Symmetrieebenenscharen $\mathfrak{C}_s^1$ oder $\mathfrak{C}_s^2$ und Achsenscharen $\mathfrak{C}_2^3$ auf ein basisflächenzentriertes Elementarparallelepiped bezogen werden. Dann sind die digonalen Achsen den Grundkanten des Parallelepipeds parallel, das primitive Tripel lautet aber: $\frac{a_x}{2} + \frac{a_y}{2}, \frac{a_x}{2} - \frac{a_y}{2}$, c. Von dieser speziellen Art sind die Gruppen $\mathfrak{V}_d^5 - \mathfrak{V}_d^8$, währenddem für $\mathfrak{V}_d^1 - \mathfrak{V}_d^4$ die drei ersten Decktransformationsbedingungen die einfachen Werte:

I.) a, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1; II.) 0, a, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1;
III.) 0, 0, c; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1

besitzen.

Raumgruppe $\mathfrak{V}_d^1$

Die Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{S}_4^1$, $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^1$ $\mathfrak{C}_2^1$. Da $\mathfrak{S}_4^1$ auch $\mathfrak{C}_2^1$ enthält, sind außerdem die Gruppen $\mathfrak{C}_{2v}^{11}$ und $\mathfrak{V}^1$ darin enthalten. $\mathfrak{S}_4^1$ mit $\mathfrak{C}_s^3$ (Lage siehe Seite 85) oder $\mathfrak{C}_2^1$ charakterisieren die Raumgruppe. Der Schnittpunkt zwischen Drehspiegelachse und Drehspiegelebene wird Koordinatenanfangspunkt. Primitives Tripel: a, a, c.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe oben.

IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 0, $\bar{1}$. V.) 0, 0, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

Symmetrieelemente:

Tetragonale Drehspiegelachsen: $[001]_{00}$; $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

$^{00}[010]$ $[100]^{00}$; $^{\frac{1}{2}0}[010]$ $[100]^{\frac{1}{2}0}$. $^{0\frac{1}{2}}[010]$ $[100]^{0\frac{1}{2}}$; $^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[010]$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$.

Gleitspiegelebenen: $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$.

Drehspiegelebenen: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

[m, n, p] [n, $\bar{m}$, $\bar{p}$] [$\bar{m}$, $\bar{n}$, p] [$\bar{n}$, m, $\bar{p}$] [$\bar{m}$, n, $\bar{p}$] [$\bar{n}$, $\bar{m}$, p] [m, $\bar{n}$, $\bar{p}$] [n, m, p].

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\ 0\ 0]\!]$
2. $[\![0\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$
3. $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$
4. $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$

} Zähligkeit jeweilen = 1. Symmetriebedingung = V_d.

5. $[\![0\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ 0]\!]$
6. $[\![0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$

} Zähligkeit jeweilen = 2. Symmetriebedingung = V.

1 bis 4 bilden Gitter von der Form des einfachen Elementarparallelepipeds, 5 und 6 von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierter Basis.

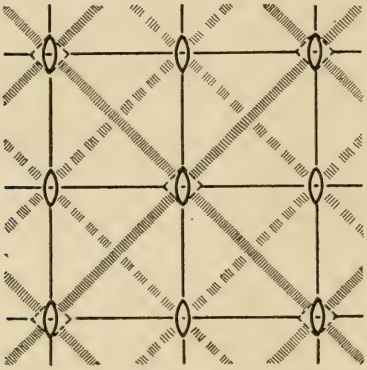


Fig. 135. $\mathfrak{V}_d^1$ $(001)_0$-Ebene, mit den darinliegenden und den darauf senkrecht stehenden Symmetrieelementen.
(Einfache Linien stellen Achsen, Bandlinien Symmetrieebenen dar.)

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Punkte $[\![0\ 0\ p]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ p]\!]$ sind zweizählig. Die Symmetriebedingung lautet C_{2v}. Punkte $[\![0\ \frac{1}{2}\ p]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}\ 0\ p]\!]$ sind vierzählig mit der einzigen Symmetriebedingung $= C_2$. Ebenfalls vierzählig mit gleicher Symmetriebedingung sind die Punktlagen auf den [010] und [100] parallelen digonalen Drehungsachsen.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden gehören den Spiegelebenen an und sind infolgedessen mit der Bedingung C_s vierzählig.

Punkte allgemeiner Lage (drei Freiheitsgrade) sind achtzählig. Zur Veranschaulichung der Verhältnisse genügt es (Fig. 135) auf einer Ebene $(001)_0$ die darinliegenden Achsen, sowie die darauf senkrecht stehenden Symmetrieelemente, einzutragen.

Raumgruppe $\mathfrak{V}_d^2$

Ihre Untergruppen heißen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{S}_4^1$, $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_2^1$ $\mathfrak{C}_2^1$: $\mathfrak{C}_{2v}^{13}$ und $\mathfrak{V}^1$ lassen sich ebenfalls als Untergruppen erkennen. $\mathfrak{S}_4^1$ $\mathfrak{C}_s^4$ und $\mathfrak{S}_4^1$ $\mathfrak{C}_2^1$ sind charakteristisch, wenn noch die besondere Lage berücksichtigt wird.

Der Schnittpunkt einer tetragonalen Drehspiegelachse mit zwei digonalen Drehungsachsen sei Koordinatenanfangspunkt.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 279.

IV.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $0, 1, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 0, \bar{1}$. V.) $0, 0, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

Alle Achsen gleiche Lage wie in $\mathfrak{V}_d^1$.

Gleitspiegelebenen:

$(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$ Gleitkomp. $\frac{c}{2}$. $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$ Gleitkomp. $\frac{d}{2}+\frac{c}{2}$.

Drehspiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{m}, n, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![n, m, p+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

1. $[\![0\ 0\ 0]\!]$ $[\![0\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$
2. $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$ } Zähligkeit jeweilen = 2. Symmetriebedingung
3. $[\![\frac{1}{2}\ 0\ 0]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$ } = V.
4. $[\![0\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$

1 und 2 bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Kanten [001]; 3 und 4 mit Innenzentrierung.

5. $[\![0\ 0\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\ 0\ \frac{3}{4}]\!]$ } Zähligkeit jeweilen = 2. Symmetriebedingung
6. $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{4}]\!]$ } = S_4.

Die Gitter sind von der Form derjenigen von 1 und 2.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Auf allen Achsen, die digonale Drehungsachsen sind, besitzt eine beliebige Punktlage Vierzähligkeit. Hinsichtlich der Zusammengehörigkeit sind drei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden.

Weiterhin gibt es nur noch Punktlagen mit drei Freiheitsgraden, die achtzählig sind.

Raumgruppe $\mathfrak{V}_d^3$

Die Untergruppen lauten: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{S}_4{}^1$, $\mathfrak{C}_s{}^3$ $\mathfrak{C}_s{}^3$, $\mathfrak{C}_2{}^2$ $\mathfrak{C}_2{}^2$. $\mathfrak{V}^3$ und $\mathfrak{C}_{2v}{}^{11}$ gehören ihr ebenfalls an. Der Koordinatenanfangspunkt falle mit dem Schnittpunkt der Drehspiegelachse und Drehspiegelebene zusammen.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 279.

IV.) $0, 0, 0$; $0, 1, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 0, \bar{1}$. V.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

Tetragonale Drehspiegelachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{\frac{1}{2}\,0}$ $[001]_{0\,\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen:

$^{\frac{1}{4}\,0}[010]$ $[100]^{\frac{1}{4}\,0}$ $^{\frac{3}{4}\,0}[010]$ $[100]^{\frac{3}{4}\,0}$. $^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}[010]$ $[100]^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}$ $^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}[010]$ $[100]^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}$

Spiegelebenen: $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$ Gleitkomponente jeweilen $\frac{d}{2}$.

Drehspiegelebenen: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$$[\![m, n, p]\!] \quad [\![n, \bar{m}, \bar{p}]\!] \quad [\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!] \quad [\![\bar{n}, m, \bar{p}]\!]$$

$$[\![\bar{m}+\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}, \bar{p}]\!] \quad [\![\bar{n}+\tfrac{1}{2}, \bar{m}+\tfrac{1}{2}, p]\!] \quad [\![m+\tfrac{1}{2}, \bar{n}+\tfrac{1}{2}, \bar{p}]\!] \quad [\![n+\tfrac{1}{2}, m+\tfrac{1}{2}, p]\!].$$

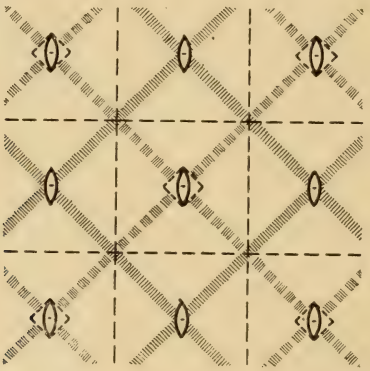


Fig. 136. $\mathfrak{B}_d^3$ $(001)_0$-Ebene, mit den darinliegenden und den darauf senkrecht stehenden Symmetrieelementen.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$
2. $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$

} Zähligkeit jeweilen = 2. Symmetriebedingung = S_4.

Jede dieser Punktlagen bildet Gitter von der Form des basiszentrierten Elementarparallelepipeds.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Bei beliebiger Lage auf $[001]_{\frac{1}{2}\,0}$ oder $[001]_{0\,\frac{1}{2}}$ stellt sich Zweizähligkeit ein mit der Symmetriebedingung C_{2v}. Punkte $[\![0\,0\,p]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,p]\!]$ sind vierzählig. Zu $[\![0, 0, p]\!]$ gehören $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![0, 0, \bar{p}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$. Die Symmetriebedingung ist C_2.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden: Sie gehören den Spiegelebenen an und sind vierzählig.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden achtzählig. Die Spuren der Symmetrieebenen, sowie die in $(001)_0$ liegenden und darauf senkrecht stehenden Achsen zeigt Fig. 136.

Raumgruppe $\mathfrak{V}_d^4$

$\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{S}_4^1$, $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_2^2$ $\mathfrak{C}_2^2$ sind die Scharenuntergruppen. $\mathfrak{V}^3$ $\mathfrak{C}_{2v}^{13}$ sind neben $\mathfrak{C}_2^1$ ebenfalls vorhanden. Gleiche Lage des Koordinatenanfangspunktes wie vorhin.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 279.

IV.) $0,0,0;\ 0,1,0;\ \bar{1},0,0;\ 0,0,\bar{1}$. V.) $\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2};\ \bar{1},0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,\bar{1}$.

Tetragonale Drehspiegelachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen:

$[010]^{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[010]^{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[010]^{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[010]^{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$.

Gleitspiegelebenen: $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$; $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$ mit 2 verschiedenen Gleitkomp.

Drehspiegelebenen: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, \bar{p}]\!]$

$[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$
2. $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$

} Zähligkeit jeweilen = 2. Symmetriebedingung: S_4.

Gitter von der Form des innenzentrierten Elementarparallelepipeds werden gebildet.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

Zu $[\![0, 0, p]\!]$ gehören $[\![0, 0, \bar{p}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$

Zu $[\![\frac{1}{2}, 0, p]\!]$ gehören $[\![0, \frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$.

Beidemal ist mit der Zähligkeit 4 die Symmetriebedingung C_2 verbunden.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden achtzählig. Auf $(001)_{\frac{1}{4}}$ würde man ein ähnliches Bild bekommen wie es Fig. 136 zeigt, lediglich daß jetzt alle Symmetrieebenen Gleitspiegelebenen sind.

Die Raumgruppen $\mathfrak{B}_d^5 - \mathfrak{B}_d^6$ beziehen wir aus den in der Einleitung zu dieser Klasse erwähnten Gründen auf ein basiszentriertes Elementarparallelepiped, so daß die drei ersten Decktransformationen lauten:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) $\frac{a}{2}, \frac{\bar{a}}{2}, 0$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

III.) 0, 0, c; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Raumgruppe $\mathfrak{B}_d^5$

Sie enthält die Untergruppen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{S}_4^1$, $\mathfrak{C}_s^1$ $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$. $\mathfrak{B}^6$ und $\mathfrak{C}_{2v}^1$ sind ebenfalls erkennbar. Der Koordinatenanfangspunkt liege im Schnittpunkt einer Drehspiegelachse und Drehspiegelebene.

IV.) Decktransformationsbedingung: 0, 0, 0; 0, 1, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

V.) „ 0, 0, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

Tetragonale Drehspiegelachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[001]_{0\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$,
$^{00}[010]$ $^{\frac{1}{2}0}[010]$ $[100]^{00}$ $[100]^{\frac{1}{2}0}$; $^{0\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[010]$ $[100]^{0\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen:
$^{\frac{1}{4}0}[010]$ $^{\frac{3}{4}0}[010]$ $[100]^{\frac{1}{4}0}$ $[100]^{\frac{3}{4}0}$; $^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}[010]$ $[100]^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$; $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$.

Drehspiegelebene: $(001)_0$; $(001)_{\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}, n, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, p]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![n, m, \bar{p}]\!]$
$[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$
$[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, p]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$
2. $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$
3. $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$
4. $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$

Zähligkeit jeder dieser viererlei verschiedenen Punktlagen = 2. Symmetriebedingung = V_d.

Die Punkte bilden Gitter von der Form des basiszentrierten Elementarparallelepipeds.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Vierzählige Punktlagen mit der Symmetriebedingung C_{2v} befinden sich auf allen Drehungsachsen [001]. Zu $[\![0\,0\,p]\!]$ gehören $[\![0\,0\,\bar{p}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,p]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\bar{p}]\!]$. Zu $[\![\frac{1}{2}\,0\,p]\!]$ hingegen $[\![0\,\frac{1}{2}\,\vec{p}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,p]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\bar{p}]\!]$ und schließlich bilden $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,p]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\bar{p}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,p]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\bar{p}]\!]$ einen zusammengehörigen Komplex. Auf den [010] und [100] parallelen Drehungsachsen herrscht Achtzähligkeit gemäß der einzigen Symmetriebedingung $= C_2$.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Ihr geometrischer Ort sind die Spiegelebenen $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$; $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$, beziehungsweise die dazugehörigen Identitätsscharen. Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = C_s. 16zählig sind die Punktlagen, welche keinerlei Symmetriebedingungen unterworfen sind. Fig. 137 gibt über die Verteilung der Symmetrieelemente auf $(00\bar{1})_0$ Auskunft.

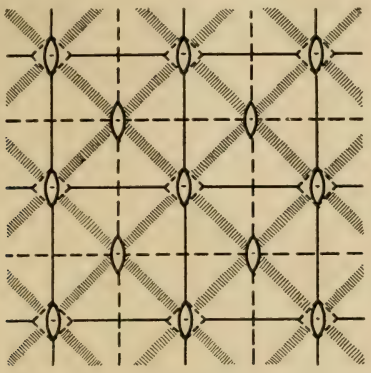


Fig. 137. $\mathfrak{V}_d^5$ $(001)_0$-Ebene, mit den darinliegenden und den darauf senkrecht stehenden Symmetrieelementen.
(Basisflächenzentriertes Elementarparallelepiped.)

Raumgruppe $\mathfrak{V}_d^6$

Die Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{S}_4^1$, $\mathfrak{C}_s^2$ $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$. $\mathfrak{V}^6$ und $\mathfrak{C}_{2v}^3$ lassen sich gleichfalls erkennen. Der Koordinatenanfangspunkt falle auf den Schnittpunkt einer tetragonalen Drehspiegelachse mit zwei digonalen Drehungsachsen.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 284.

IV.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $0, 1, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 0, \bar{1}$. V.) $0, 0, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

Alle Achsen haben gleiche Lage wie in $\mathfrak{V}_d^5$.

Die Zusammengehörigkeit ist nur zum Teil eine verschiedene. Alle Symmetrieebenen sind Gleitspiegelebenen einer Art. $\left(\text{Gleitkomp. } \frac{c}{2}\right)$ Ihre Lage entspricht der der Spiegelebenen von $\mathfrak{V}_d^5$.

Die Drehspiegelebenen liegen aber in $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![\bar{m}, n, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![n, m, p+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = V.
2. $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ Gleiche Zähligk., gleiche Symmetriebeding.
3. $[\![0\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = S_4.
4. $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = S_4.

Jede dieser Punktlagen bildet Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Basiszentrierung, Innenzentrierung und Vertikalkantenzentrierung.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Auf allen Achsen, die digonale Drehungsachsen sind, besitzt eine beliebige Lage die Zähligkeit 8. (Symmetriebedingung = C_2.) Wechselnd ist die Art der Zusammengehörigkeit.

Außerdem gibt es nur noch Punkte mit drei Freiheitsgraden und der Zähligkeit 16.

Raumgruppe $\mathfrak{V}_d^7$

Als Untergruppen treten $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{S}_4^1$, $\mathfrak{C}_s^2$ $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$ auf. $\mathfrak{V}^6$ und $\mathfrak{C}_{2v}^8$ sind ebenfalls vorhanden. Der Koordinatenanfangspunkt stimme mit dem Schnittpunkt: Drehspiegelachse — Drehspiegelebene überein.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 284.

IV.) $0,0,0;\ 0,1,0;\ \bar{1},0,0;\ 0,0,\bar{1}$. V.) $\frac{a}{2},0,0;\ \bar{1},0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,\bar{1}$.

Symmetrieelemente:

Tetragonale Drehspiegelachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$;

$^{\frac{1}{4}0}[010]$ $^{\frac{3}{4}0}[010]$ $[100]^{\frac{1}{4}0}$ $[100]^{\frac{3}{4}0}$; $^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}[010]$ $[100]^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen:

$^{00}[010]$ $^{\frac{1}{2}0}[010]$ $[100]^{00}$ $[100]^{\frac{1}{2}0}$; $^{0\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[010]$ $[100]^{0\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(110)_{\frac{1}{4}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{4}}$ $(110)_{\frac{3}{4}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{3}{4}}$ Gleitkomp. $\frac{d}{4}$.

Drehspiegelebenen: $(001)_0$; $(001)_{\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[m, n, p]$ $[n, \bar{m}, \bar{p}]$ $[\bar{m}, \bar{n}, p]$ $[\bar{n}, m, \bar{p}]$

$[\bar{m}+\frac{1}{2}, n, \bar{p}]$ $[\bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{m}, p]$ $[m+\frac{1}{2}, \bar{n}, \bar{p}]$ $[n+\frac{1}{2}, m, p]$

$[m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]$ $[n+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{p}]$ $[\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]$ $[\bar{n}+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, \bar{p}]$

$[\bar{m}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]$ $[\bar{n}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p]$ $[m, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]$ $[n, m+\frac{1}{2}, p]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[0\,0\,0]$ $[\frac{1}{2}\,0\,0]$ $[\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]$ $[0\,\frac{1}{2}\,0]$ Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = S_4.
2. $[0\,0\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]$ $[0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]$ Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = S_4.
3. $[\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,0]$ $[\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,0]$ $[\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,0]$ $[\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,0]$ Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = V.
4. $[\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]$ Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = V.

Die Punktlagen bilden Gitter von der Form des basiszentrierten Elementarparallelepipeds mit zentrierten Kanten des Basisquadrates.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Auf allen Achsen, die digonale Drehungsachsen sind, besitzt eine beliebige Lage die Zähligkeit 8. (Symmetriebedingung C_2.) Punkte mit zwei Freiheitsgraden sind nicht vorhanden. Die allgemeine Lage ist 16zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{V}_d^8$

Die Untergruppen $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{S}_4^1$, $\mathfrak{C}_s^2$ $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$ sind der allgemeinen Natur nach die gleichen wie in $\mathfrak{V}_d^7$, doch ist als weitere Untergruppe nun $\mathfrak{C}_{2v}^{10}$ vorhanden. Das ist der Ausdruck dafür, daß die Gleitkomponente der Gleitspiegelebenen schief zur c-Achsenrichtung steht. Der Koordinatenanfangspunkt besitze gleiche Lage wie in $\mathfrak{V}_d^7$.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 284.

IV.) $0,0,0;\ 0,1,0;\ \bar{1},0,0;\ 0,0,\bar{1}$. V.) $\frac{a}{2},0,\frac{c}{2};\ \bar{1},0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,\bar{1}$.

Tetragonale Drehspiegelachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$;
$^{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}[010]$ $[100]^{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$ $^{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}[010]$ $[100]^{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$.

Digonale Schraubenachsen:
$^{0\frac{1}{4}}[010]$ $^{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}[010]$ $^{0\frac{3}{4}}[010]$ $^{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}[010]$ $[100]^{0\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$ $[100]^{0\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$.

Gleitspiegelebenen: $(110)_{\frac{1}{4}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{4}}$ $(110)_{\frac{3}{4}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{3}{4}}$.

Drehspiegelebenen: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[m, n, p]$ $[n, \bar{m}, \bar{p}]$ $[\bar{m}, \bar{n}, p]$ $[\bar{n}, m, \bar{p}]$

$[\bar{m}+\frac{1}{2}, n, \bar{p}+\frac{1}{2}]$ $[\bar{n}+\frac{1}{2}, m, p+\frac{1}{2}]$ $[m+\frac{1}{2}, \bar{n}, \bar{p}+\frac{1}{2}]$ $[n+\frac{1}{2}, m, p+\frac{1}{2}]$

$[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$
$[\![\bar{m}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n, m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\ 0\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$ Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = S_4.
2. $[\![0\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = S_4.
3. $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = V.
4. $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = V.

Jede dieser Punktlagen bildet Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit allseitiger Flächenzentrierung.

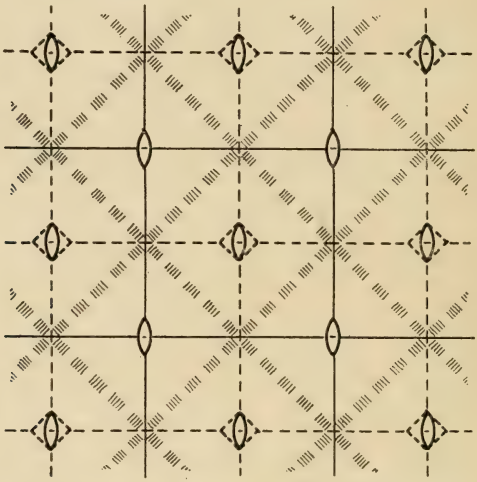


Fig. 138. $\mathfrak{B}_d^7$ $(001)_0$-Ebene, mit den darinliegenden und den darauf senkrecht stehenden Symmetrieelementen.
Das Elementarparallelepiped ist basisflächenzentriert.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Sie gehören bei im übrigen beliebiger Lage denjenigen Achsen an, die digonale Drehungsachsen sind. Zu $[\![0, 0, p]\!]$ gehören $[\![0, 0, \bar{p}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, 0, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, 0, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![0, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0, \frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$. Zu $[\![m, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}]\!]$ gehören $[\![\frac{1}{4}, \bar{m}, \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\bar{m}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}, m, \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}, \bar{m}+\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}, m+\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]\!]$ usw. Die Zähligkeit ist immer = 8. Die Symmetriebedingung lautet C_2.

Alle weiteren Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden 16zählig. Das Bild auf einer Ebene $(001)\frac{1}{4}$ entspricht in bezug auf Verteilung der Symmetrieelemente dem der Fig. 138.

Die Raumgruppen $\mathfrak{V}_d^9 - \mathfrak{V}_d^{12}$ ließen sich auf ein innenzentriertes Elementarparallelepiped beziehen, gemäß der kristallographisch-üblichen Aufstellung muß aber speziell für $\mathfrak{V}_d^9$ und $\mathfrak{V}_d^{10}$ ein allseitig flächenzentriertes Parallelepiped als elementar gewählt werden.

Raumgruppe $\mathfrak{V}_d^9$ (Siehe Fig. 139)

Ihre Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{S}_4^2$, $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$. Außerdem sind $\mathfrak{V}^7$ und $\mathfrak{C}_{2v}^{20}$ darin enthalten. Eine Punktlage mit der Symmetrie V_d sei Koordinatenanfangspunkt. Das primitive Tripel der Translationen lautet $\frac{a_x}{2} + \frac{a_y}{2}$; $\frac{a_x}{2} + \frac{c}{2}$; $\frac{a_y}{2} + \frac{c}{2}$.

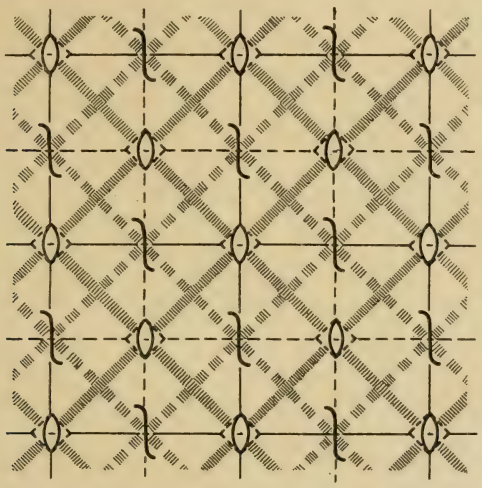


Fig. 139. $\mathfrak{V}_d^9$ $(001)_0$-Ebene, mit den darinliegenden und den darauf senkrecht stehenden Symmetrieelementen.
(Allseitig flächenzentriertes Elementarparallelepiped.)

Die Decktransformationsbedingungen sind:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0$; $1, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, 1$. II.) $\frac{a}{2}, 0, \frac{c}{2}$; $1, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, 1$.

III.) $0, \frac{a}{2}, \frac{c}{2}$; $1, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, 1$.

IV.) $0, 0, 0$; $0, 1, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 0, \bar{1}$. V.) $0, 0, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

Tetragonale Drehspiegelachsen:

$[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$.

Digonale Schraubenachsen:

$[00\bar{1}]_{\frac{1}{4}0}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{3}{4}0}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}$ $[001]_{0\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$ $[001]_{0\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$.

Digonale Drehungsachsen:

$^{00}[010]$ $^{\frac{1}{2}0}[010]$ $^{0\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[010]$ $[100]^{00}$ $[100]^{\frac{1}{2}0}$ $[100]^{0\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$;
$^{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}[010]$ $^{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}[010]$ $[100]^{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$.

Digonale Schraubenachsen:

$^{\frac{1}{4}0}[010]$ $^{\frac{3}{4}0}[010]$ $^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}[010]$ $[100]^{\frac{1}{4}0}$ $[100]^{\frac{3}{4}0}$ $[100]^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}$;
$^{0\frac{1}{4}}[010]$ $^{0\frac{3}{4}}[010]$ $^{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}[010]$ $^{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}[010]$ $[100]^{0\frac{1}{4}}$ $[100]^{0\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$.

Spiegelebenen: $(110)_0$ $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_0$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(110)_{\frac{1}{4}}$ $(110)_{\frac{3}{4}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{4}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{3}{4}}$.

Drehspiegelebenen: Teils $(001)_0$ und $(001)_{\frac{1}{2}}$, teils $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}, n, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, p]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![n, m, p]\!]$.

Ferner zu jedem dieser Werte $[\![x, y, z]\!]$ die Werte:

$$[\![x+\tfrac{1}{2}, y+\tfrac{1}{2}, z]\!] \quad [\![x+\tfrac{1}{2}, y, z+\tfrac{1}{2}]\!] \quad [\![x, y+\tfrac{1}{2}, z+\tfrac{1}{2}]\!].$$

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$. Zusammengehörig und somit vierzählig. Symmetriebedingung V_d.
2. $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$. Ebenfalls vierzählig mit der Symmetriebedingung V_d.
3. $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$. Ebenfalls vierzählig mit der Symmetriebedingung V_d.
4. $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$. Ebenfalls vierzählig mit der Symmetriebedingung V_d.

Jede dieser Lagen bildet Gitter von der Form des allseitig flächenzentrierten Elementarparallelepipeds.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Auf allen tetragonalen Drehspiegelachsen (digonalen Drehungsachsen [001]) ist die Zähligkeit einer beliebigen Punktlage 8. Die Symmetriebedingung lautet C_{2v}. Auf den horizontal verlaufenden digonalen Drehungsachsen herrscht 16-Zähligkeit, gemäß der einfachen Symmetriebedingung C_2.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden auf den Spiegelebenen sind 16zählig. Allgemeine Lagen treten im Elementarparallelepiped 32mal auf.

Raumgruppe $\mathfrak{V}_d^{10}$

Die Untergruppen ergeben sich zu $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{S}_4^2$, $\mathfrak{C}_s^1$ $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$. Neben $\mathfrak{V}^7$ ist $\mathfrak{C}_{2v}^{21}$ bemerkbar. Der Koordinatenanfangspunkt sei zugleich Schnittpunkt einer tetragonalen Drehspiegelachse mit zwei digonalen Drehungsachsen. Das primitive Tripel, sowie die drei ersten Decktransformationsbedingungen sind gleich wie in $\mathfrak{V}_d^9$.

IV.) Decktransformationsbedingung: $0, 0, \frac{c}{2}$; $0, 1, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

V.) „ $0, 0, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

Die Achsenlage entspricht der von $\mathfrak{V}_d^9$, die Zusammengehörigkeit ist lediglich teilweise verändert. Alle Symmetrieebenen, von im übrigen gleicher Lage, sind Gleitspiegelebenen.

Die zu den Drehspiegelachsen gehörigen Drehspiegelebenen haben sich vertauscht.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$$[\![m, n, p]\!] \; [\![n, \bar{m}, \bar{p}+\tfrac{1}{2}]\!] \; [\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!] \; [\![\bar{n}, m, \bar{p}+\tfrac{1}{2}]\!]$$
$$[\![\bar{m}, n, \bar{p}]\!] \; [\![\bar{n}, \bar{m}, p+\tfrac{1}{2}]\!] \; [\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!] \; [\![n, m, p+\tfrac{1}{2}]\!].$$

Ferner zu jedem Wert $[\![x, y, z]\!]$ die Werte:

$$[\![x+\tfrac{1}{2}, y+\tfrac{1}{2}, z]\!] \; [\![x+\tfrac{1}{2}, y, z+\tfrac{1}{2}]\!] \; [\![x, y+\tfrac{1}{2}, z+\tfrac{1}{2}]\!].$$

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$.
   Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = V.
2. $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$.
   Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = V.
3. $[\![0\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$.
   Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = S_4.
4. $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$.
   Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = S_4.

Alle diese Punktlagen bilden Gitter von ähnlicher Form wie das einfache Elementarparallelepiped aber von $\frac{1}{8}$-Volumen.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Die Zähligkeit ist auf allen digonalen Drehungsachsen (inklusive tetragonale Drehspiegelachsen) bei beliebiger Lage 16. Die einzige Symmetriebedingung = C_2.

Weiterhin gibt es nur noch Punkte mit drei Freiheitsgraden. Sie sind 32zählig.

Die Raumgruppen $\mathfrak{V}_d^{11}$ und $\mathfrak{V}_d^{12}$ müssen auf ein innenzentriertes Elementarparallelepiped bezogen werden. Sind a_x, a_y, c die Kanten dieses Parallelepipeds, so ist $\frac{a_x}{2} + \frac{a_y}{2} + \frac{c}{2}$; $\frac{a_x}{2} - \frac{a_y}{2} + \frac{c}{2}$, c ein primitives Tripel.

Raumgruppe $\mathfrak{V}_d^{11}$

$\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{S}_1^2$, $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$ figurieren als Untergruppen. $\mathfrak{V}^8$ und $\mathfrak{C}_{2v}^{18}$ kommen in Kombination vor. Der Koordinatenanfangspunkt stimme mit einer, die Punktsymmetrie V_d aufweisenden Lage überein.

Decktransformationsbedingungen:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0 1. II.) $\frac{a}{2}, \frac{\bar{a}}{2}, \frac{c}{2}$, 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

III.) 0, 0, c; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 0, $\bar{1}$. V.) 0, 0, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

Tetragonale Drehspiegelachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$.

Digonale Drehungsachsen:

${}^{00}[010]$ ${}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[010]$ $[100]^{00}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; ${}^{\frac{1}{2}0}[010]$ ${}^{0\frac{1}{2}}[010]$ $[100]^{\frac{1}{2}0}$ $[100]^{0\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen:

${}^{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}[010]$ ${}^{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}[010]$ ${}^{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}[010]$ ${}^{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}[010]$ $[100]^{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$.

Spiegelebenen: $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$.

Gleitspiegelebenen: $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$.

Drehspiegelebenen: Teils $(001)_0$ und $(001)_{\frac{1}{2}}$; teils $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}, n, \bar{p}]\!]$ $[\![n, \bar{m}, \bar{p}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![n, m, p]\!]$.
Ferner zu jedem der Werte $[\![x, y, z]\!]$ ein Wert $[\![x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2}, z + \frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung = V_d.
2. $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$. Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung = V_d.
3. $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = V.
4. $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = S_4.

1 und 2 bilden Gitter von der Form des innenzentrierten Elementarparallelepipeds ; 3 und 4 von der gleichen Form mit zusätzlicher Zentrierung der Basis und der Kanten c.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Bei beliebiger Lage auf $[001]_{00}$ oder $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ herrscht, gemäß der Symmetriebedingung C_{2v}, die Zähligkeit 4. Die übrigen digonalen Drehungsachsen (inklusive $[001]_{\frac{1}{2}0}$ und $[001]_{0\frac{1}{2}}$) sind nicht Schnittlinien von Spiegelebenen. Mit der Symmetriebedingung C_2 ist daher Achtzähligkeit verbunden.

Auch auf den Spiegelebenen herrscht bei zwei Freiheitsgraden Achtzähligkeit. Die allgemeine Lage mit drei Freiheitsgraden ist 16zählig. Fig. 140 veranschaulicht die Verhältnisse.

Raumgruppe $\mathfrak{B}_d^{12}$

Ihre Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{S}_4^2$, $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$, doch bilden sie diesmal unter sich $\mathfrak{B}^9$ und $\mathfrak{C}_{2v}^{19}$. Der Koordinatenanfangspunkt liege auf einer tetragonalen Drehspiegelachse und besitze die Punktsymmetrie S_4.

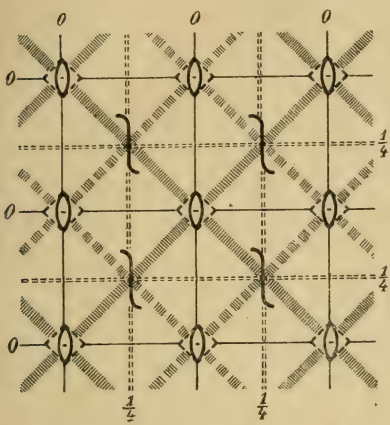


Fig. 140. $\mathfrak{B}_d^{11}$ $(001)_0$-Ebene, mit den darinliegenden in $\frac{1}{4}$ Höhe parallel verlaufenden Achsen, sowie den darauf senkrecht stehenden Symmetrieelementen. (Grundquadrat bei innenzentriertem Elementarparallelepiped:)

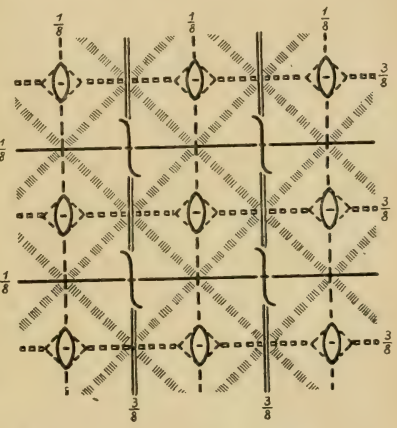


Fig. 141. $\mathfrak{B}_d^{12}$ $(001)_0$-Ebene (Projektion). Die horizontalen Achsen liegen in $\frac{1}{8}$ bezw. $\frac{3}{8}$ Höhe über der Grundfläche des innenzentrierten Elementarparallelepipeds.

Das primitive Tripel, sowie die drei ersten Decktransformationsbedingungen, entsprechen denen von $\mathfrak{B}_d^{11}$.

IV.) Decktransformationsbedingung: $0,0,0;\ 0,1,0;\ 1,0,0;\ 0,0,1.$

V.) „ $\frac{a}{2}, 0, \frac{c}{4};\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, \bar{1}.$

Tetragonale Drehspiegelachsen (digonale Drehungsachsen):

$[001]_{00}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$.

Digonale Drehungsachsen:

$\frac{1}{4}\frac{1}{8}[010]$ $\frac{3}{4}\frac{1}{8}[010]$ $\frac{3}{4}\frac{5}{8}[010]$ $\frac{1}{4}\frac{5}{8}[010]$ $[100]^{\frac{1}{4}\frac{7}{8}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{7}{8}}$ $[100]^{\frac{1}{4}\frac{3}{8}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{3}{8}}$.

Digonale Schraubenachsen:

$^{0}\frac{7}{8}[010]$ $\frac{1}{2}\frac{3}{8}[010]$ $^{0}\frac{3}{8}[010]$ $\frac{1}{2}\frac{7}{8}[010]$. $^{0}\frac{1}{8}[100]$ $\frac{1}{2}\frac{5}{8}[100]$ $^{0}\frac{5}{8}[100]$ $\frac{1}{2}\frac{1}{8}[100]$.

Gleitspiegelebenen: $(110)_{\frac{1}{4}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{4}}$; $(110)_{\frac{3}{4}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{3}{4}}$.

Drehspiegelebenen teils $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$, teils $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, m, \bar{p}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, p]\!]$

$[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n, p+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, \bar{m}, p+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}, \bar{p}+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, m, p+\frac{1}{4}]\!]$.

Außerdem gehört zu jedem Wert $[\![x, y, z]\!]$ ein Wert $[\![x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = S_4.
2. $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = S_4.

Mit einem Freiheitsgrad achtzählig sind beliebige Punktlagen auf denjenigen Achsen, die digonale Drehungsachsen darstellen.

Beispielsweise gehören zu $[\![\frac{1}{4}, n, \frac{1}{8}]\!]$ die Punkte $[\![n, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}, \bar{n}, \frac{1}{8}]\!]$ $[\![\bar{n}, \frac{1}{4}, \frac{7}{8}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}, n+\frac{1}{2}, \frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \frac{5}{8}]\!]$.

Alle übrigen Punkte sind mit drei Freiheitsgraden 16zählig. Die in $\frac{1}{8}$- und $\frac{3}{8}$-Höhe über einer Ebene $(001)_0$ befindlichen digonalen Achsen sind neben den Spuren der Spiegelebenen in Fig. 141 eingezeichnet.

$\mathfrak{D}_4$. Enantiomorph-hemiedrische Klasse der tetragonalen Abteilung (Tetragonal trapezoedrische Klasse)

Senkrecht zu der einer tetragonalen Achse isomorphen Schar stehen vier Scharen digonaler Achsen. Die Raumgruppen $\mathfrak{D}_4^1 - \mathfrak{D}_4^8$ besitzen ein einfachprimitives Elementarparallelepiped mit den drei ersten Decktransformationsbedingungen:

I.) a, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) 0, a, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.
III.) 0, 0, c; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_4^1$

Die Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_4^1$, $\mathfrak{C}_2^1$ $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$. $\mathfrak{B}^1$ und $\mathfrak{B}^6$ sind daher ebenfalls in dem Raumsystem enthalten. Koordinatenanfangspunkt sei der Schnittpunkt einer tetragonalen mit digonalen Drehungsachsen.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe oben.

IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 0, 1. V.) 0, 0, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

Symmetrieelemente:

Tetragonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$, $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{\frac{1}{2}\,0}$ $[001]_{0\,\frac{1}{2}}$.

Ferner: $^{00}[010]\,[100]^{00}$; $^{\frac{1}{2}\,0}[010]\,[100]^{\frac{1}{2}\,0}$: $^{0\,\frac{1}{2}}[010]\,[100]^{0\,\frac{1}{2}}$; $^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}[010]\,[100]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$.
$[110]^{00}$ $[1\bar{1}0]^{00}$; $[110]^{0\,\frac{1}{2}}$ $[110]^{0\,\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen: $[110]^{\frac{1}{2}\,0}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\,0}$ $[110]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$ $[110]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$.
(Siehe auch Fig. 142.)

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, m, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, p]\!]$ $[\![\bar{m}, n, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, p]\!]$ $[\![m, n, \bar{p}]\!]$ $[\![n, m. p]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]$
2. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$
3. $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$
4. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$

Zähligkeit = 1. Symmetriebedingung = D_4.

Diese Punkte bilden Gitter von der Form des einfachen Elementarparallelepipeds.

5. $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$
6. $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$

Zähligkeit jeweilen = 2. Symmetriebedingung = V.

Beide Punktarten bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Grundflächenzentrierung.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Zu $[\![0\,0\,p]\!]$ gehört $[\![0\,0\,\bar{p}]\!]$, ebenso zu $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,p]\!] : [\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\bar{p}]\!]$. Diese Lagen sind mit der Symmetriebedingung C_4 zweizählig. Vierzählig sind irgendwelche Punkte beliebiger Lage auf einer der digonalen Drehungsachsen. (Symmetriebedingung $= C_2$.) Sonst gibt es nur noch achtzählige Punkte mit drei Freiheitsgraden. Die Achsenverteilung ist auch aus einer Fig. 142 ersichtlich. Im Abstande $\frac{c}{2}$ folgen sich derartige Ebenen übereinander.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_4^2$

Ihre Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_4^1$, $\mathfrak{C}_2^2$ $\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$. $\mathfrak{B}^3$ und $\mathfrak{B}^6$ sind gemeinsam vorhanden. Der Schnittpunkt dreier digonaler Drehungsachsen sei Koordinatenanfangspunkt.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 294.

IV.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0$; $0, 1, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 0, 1$. V.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, p]\!]$
$[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![n, m, \bar{p}]\!]$.

Symmetrieelemente:

Tetragonale Drehungsachsen: $[001]_{\frac{1}{2}\,0}$ $[001]_{0\,\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen:

$[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$. Ferner $[110]^{00}$ $[1\bar{1}0]^{00}$; $[110]^{0\,\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}0]^{0\,\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen: $[110]^{\frac{1}{2}\,0}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\,0}$; $[110]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$. $^{\frac{1}{4}\,0}[010]$ $^{\frac{3}{4}\,0}[010]$ $[100]^{\frac{1}{4}\,0}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,0}$; $^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}[010]$ $[100]^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$
2. $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$

Zähligkeit jeweilen = 2. Symmetriebedingung = V.

Die Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierter Basis.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Zu $[\![\frac{1}{2}\,0\,p]\!]$ gehört $[\![0\,\frac{1}{2}\,p]\!]$. Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung = C_4. Auf den digonalen Drehungsachsen ist bei beliebiger Lage Vierzähligkeit vorhanden. Beispielsweise bilden $[\![m, m, 0]\!]$ $[\![m, \bar{m}, 0]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, 0]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, 0]\!]$ einen zusammengehörigen Komplex.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden achtzählig. Fig. 143 gibt die Achsenverteilung in einer Ebene $(001)_0$.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_4{}^3$

Die Untergruppen lauten: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_4{}^2$, $\mathfrak{C}_2{}^1$ $\mathfrak{C}_2{}^1$, $\mathfrak{C}_2{}^3$ $\mathfrak{C}_2{}^3$. Es sind diesmal $\mathfrak{B}^2$ und $\mathfrak{B}^5$ zu erkennen. Auf einer tetragonalen Schraubenachse im Schnittpunkt mit einer digonalen Drehungsachse [010] liege der Koordinatenanfangspunkt.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 294.

IV.) $0, 0, \frac{3c}{4}$; $0, 1, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 0, 1$. V.) $0, 0, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

Symmetrieelemente:

Tetragonale Schraubenachsen: $[001]_{00}$; $[001]_{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{0\,\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\,0}$.

Digonale Drehungsachsen: $^{00}[010]$ $^{0\,\frac{1}{2}}[010]$ $[100]^{0\,\frac{1}{4}}$ $[100]^{0\,\frac{3}{4}}$; $^{\frac{1}{2}\,0}[010]$ $^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}[010]$ $[100]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}}$; $[110]^{0\,\frac{3}{8}}$ $[110]^{0\,\frac{7}{8}}$ $[1\bar{1}0]^{0\,\frac{1}{8}}$ $[1\bar{1}0]^{0\,\frac{5}{8}}$.

Digonale Schraubenachsen: $[110]^{\frac{1}{2}\,\frac{3}{8}}$ $[110]^{\frac{1}{2}\,\frac{7}{8}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{8}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\,\frac{5}{8}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, m, p+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}, m, p+\frac{1}{4}]\!]$
$[\![\bar{m}, p, \bar{n}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, \bar{p}+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n, m, \bar{p}+\frac{3}{4}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad gibt es nicht, hingegen liegen die Schnittpunkte digonaler Drehungsachsen mit Schraubenachsen zu vieren senkrecht übereinander.

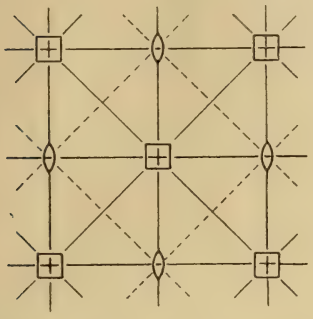


Fig. 142. $\mathfrak{D}_4^1$ Ebene $(001)_0$, mit den darauf senkrecht stehenden und darinliegenden Achsen. (Wiederholung der Achsenverhältnisse in $\frac{z}{2}$-Höhe.)

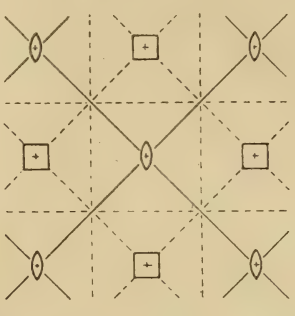


Fig. 143. $\mathfrak{D}_4^2$ Ebene $(001)_0$, mit den darauf senkrecht stehenden und darinliegenden Achsen. (Wiederholung der Achsenverhältnisse in $\frac{z}{2}$-Höhe.)

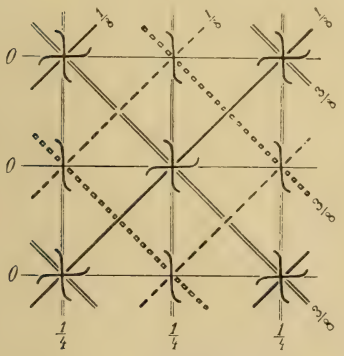


Fig. 144. $\mathfrak{D}_4^3$ Ebene $(001)_0$.
Die horizontalen Achsen liegen in verschiedener Höhe $(0, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4})$. Jeder Höhenlage entspricht eine bestimmte Signatur. Außerdem bedeuten durchbrochene Linien Schraubenachsen, ununterbrochene Drehungsachsen.

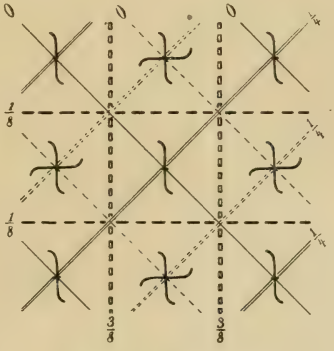


Fig. 145. $\mathfrak{D}_4^4$ Ebene $(001)_0$ als Grundebene.
Die Höhenlage der (001) parallelen Achsenebenen ist den Achsen beigeschrieben. Symbolik wie in $\mathfrak{D}_4^3$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Sie gehören irgendwelcher digonalen Drehungsachse an. Ein zusammengehöriger Komplex ist beispielsweise: $[\![m, m, \frac{3}{8}]\!]$ $[\![m, \bar{m}, \frac{1}{8}]\!]$ $[\![\bar{m}, m, \frac{7}{8}]\!]$ $[\![\bar{m}, m, \frac{5}{8}]\!]$.

Die übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden achtzählig. Die Aufeinanderfolge der Achsen zeigt Fig. 144.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_4^4$ (siehe Fig. 145)

Die Untergruppen lauten: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_4^2$, $\mathfrak{C}_2^2\,\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$. Sie bilden unter sich $\mathfrak{B}^4$ und $\mathfrak{B}^5$. Den Koordinatenanfangspunkt legen wir diesmal in den Schnittpunkt einer zweizähligen Schraubenachse [001] mit einer digonalen Drehungsachse [110]. Die IV. und V. Decktransformationsbedingungen erhalten dann die Werte:

IV.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{3c}{4}$; $0,1,0$; $\bar{1},0,0$; $0,0,1$. V.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{4}$; $\bar{1},0,0$; $0,1,0$; $0,0,\bar{1}$.

Tetragonale Schraubenachsen: $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[110]^{00}$ $[110]^{0\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}0]^{0\frac{1}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{0\frac{3}{4}}$.

Digonale Schraubenachsen: $[110]^{\frac{1}{2}0}$ $[110]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$. $^{\frac{1}{4}\frac{1}{8}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\frac{5}{8}}[010]$ $[100]^{\frac{1}{4}\frac{7}{8}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{3}{8}}$; $^{\frac{3}{4}\frac{1}{8}}[010]$ $^{\frac{1}{4}\frac{5}{8}}[010]$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{7}{8}}$ $[100]^{\frac{1}{4}\frac{3}{8}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{4}]\!]$
$[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\bar{n}, m, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![n, m, \bar{p}]\!]$.

Außer den achtzähligen Punktlagen mit drei Freiheitsgraden sind nur vierzählige Punktlagen mit einem Freiheitsgrad auf den digonalen Drehungsachsen vorhanden. Ein zusammengehöriger Komplex ist beispielsweise gegeben in:

$[\![m, m, 0]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{m}, \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]\!]$.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_4^5$

Ihre Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_4^3$, $\mathfrak{C}_2^1\,\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$. Wie in $\mathfrak{D}_4$ sind $\mathfrak{B}^1$ und $\mathfrak{B}^6$ weitere Untergruppen. Der Koordinatenanfangspunkt entspricht dem Schnittpunkt einer tetragonalen Schraubenachse (digonalen Drehungsachse) mit zwei digonalen Drehungsachsen.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 294.

IV.) $0,0,\frac{c}{2}$; $0,1,0$; $\bar{1},0,0$; $0,0,1$. V.) $0,0,0$; $\bar{1},0,0$; $0,1,0$; $0,0,\bar{1}$.

Symmetrieelemente:

Tetragonale Schraubenachsen, zugleich digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$; $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{0\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$; ferner:

$^{00}[010]$ $[100]^{0\frac{1}{2}}$; $^{\frac{1}{2}0}[010]$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$: $^{0\frac{1}{2}}[010]$ $[100]^{00}$; $^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[010]$ $[100]^{\frac{1}{2}0}$;

$[110]^{0\frac{1}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{0\frac{3}{4}}$; $[110]^{0\frac{3}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{0\frac{1}{4}}$.

Digonale Schraubenachsen: $[110]^{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$; $[110]^{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, p+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![\bar{m}, n, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![n, m, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$
2. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$
3. $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$
4. $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$

Zähligkeit jeweilen = 2. Symmetriebedingung = V.

1 und 2 bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Kanten [001]; 2 und 3 hingegen Gitter von der Form des Parallelepipeds mit Innenzentrierung.

Gitter der Form 1, 2 bilden noch die folgenden jeweilen zusammengehörigen Punkte:

5. $[\![0\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{3}{4}]\!]$
6. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$

Zähligkeit ebenfalls 2. Symmetriebedingung ebenfalls = V.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Auf allen Achsen, die digonale Drehungsachsen sind, ist eine beliebige Punktlage vierzählig (mit einem Freiheitsgrad) und mit der Bedingung $1\widehat{()^4} = C_2$.

Punktlagen mit drei Freiheitsgraden sind achtzählig.

Die Achsenverteilung geht aus Fig. 146 hervor.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_4^6$

Da $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_4^3$, $\mathfrak{C}_2^2$ $\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$ die Scharenuntergruppen sind, bilden sie diesmal unter sich $\mathfrak{B}^3$ und $\mathfrak{B}^6$. Der Schnittpunkt dreier digonaler Drehungsachsen wird zum Koordinatenanfangspunkt.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 294.

IV.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2}$; $0, 1, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 0, 1$. V.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2}$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

Symmetrieelemente:

Tetragonale Schraubenachsen, die zugleich digonale Drehungsachsen sind: $[001]_{0\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[110]^{00}$ $[1\bar{1}0]^{0\frac{1}{2}}$; $[110]^{0\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}0]^{00}$.

Digonale Schraubenachsen: $[110]^{\frac{1}{2}\,0}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$; $[110]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\,0}$; $^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}}[010]$ $[100]^{\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}}$. $^{\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}}[010]$ $[100]^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n, m, \bar{p}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$
2. $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$

} Zähligkeit jeweilen = 2. Symmetriebedingung = V.

Sie bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung.

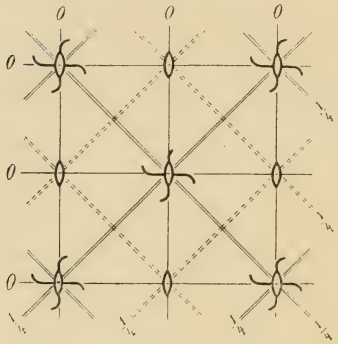


Fig. 146. $\mathfrak{D}_4^5$ Ebenen $(001)_0$ und $(001)_{\frac{1}{4}}$.

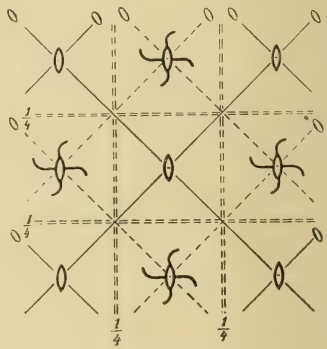


Fig. 147. $\mathfrak{D}_4^6$ Ebenen $(001)_0$ und $(001)_{\frac{1}{4}}$.

Gleiche Symbolik wie in den vorhergehenden Figuren.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Sie entsprechen beliebigen Lagen auf den tetragonalen Schraubenachsen oder den digonalen Drehungsachsen. Ihre Zähligkeit ist 4, die Symmetriebedingung $= C_2$. Ein zusammengehöriger Komplex ist beispielsweise:

$$[\![m, m, 0]\!]\ [\![m+\tfrac{1}{2}, \bar{m}+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]\!]\ [\![\bar{m}, m, 0]\!]\ [\![\bar{m}+\tfrac{1}{2}, m+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]\!].$$

Alle übrigen Punktlagen sind ohne Symmetriebedingung mit drei Freiheitsgraden achtzählig. Fig. 147 veranschaulicht die Achsenverteilung.

Die Raumgruppen $\mathfrak{D}_4^7$ und $\mathfrak{D}_4^8$ verlangen keine besondere Erläuterung, sie sind enantiomorph zu $\mathfrak{D}_4^3$ und $\mathfrak{D}_4^4$, enthalten also als Untergruppe $\mathfrak{C}_4^4$ an Stelle von $\mathfrak{C}_4^2$. Es ändert sich die Aufeinanderfolge der Achsen, im übrigen bleiben die Ergebnisse der Klassifikation ihrer Punktlagen erhalten.

Die Raumgruppen $\mathfrak{D}_4^9$ und $\mathfrak{D}_4^{10}$ lassen sich auf ein innenzentriertes Elementarparallelepiped beziehen. Dieses ist dann doppeltprimitiv. Auch auf ein allseitig flächenzentriertes Elementarparallelepiped lassen sich die Gruppen beziehen. Zum Vergleich mit kubischen Raumsystemen wird das letztere oft zweckmäßig sein. Die besondere Ableitung dafür ist hier nicht gegeben, weil sich die diesbezüglichen Verhältnisse, wenigstens für $\mathfrak{D}_4^9$, ohne weiteres aus der Betrachtung kubisch enantiomorpher Gruppen ergeben. Das primitive Tripel ist daher für unsere Betrachtungen: $\frac{a_x}{2} + \frac{a_y}{2} + \frac{c}{2}$; $\frac{a_x}{2} - \frac{a_y}{2} + \frac{c}{2}$, c.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_4^9$

Ihre Untergruppen sind außer $\mathfrak{B}^7$ und $\mathfrak{B}^8$ die folgenden: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_4^5$, $\mathfrak{C}_2^2\,\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$. Der Koordinatenanfangspunkt fällt mit dem Schnittpunkt einer tetragonalen Drehungsachse und vier digonalen Drehungsachsen zusammen.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) $\frac{a}{2}, \frac{\bar{a}}{2}, \frac{c}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

III.) 0, 0, c; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 0, 1. V.) 0, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Tetragonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Tetragonale Schraubenachsen (digonale Drehungsachsen): $[001]_{0\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$.

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$.

Digonale Drehungsachsen:

$^{00}[010]$ $^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[010]$ $[100]^{00}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $^{\frac{1}{2}0}[010]$ $^{0\frac{1}{2}}[010]$ $[100]^{\frac{1}{2}0}$ $[100]^{0\frac{1}{2}}$.

$[110]^{00}$ $[1\bar{1}0]^{00}$ $[110]^{0\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}0]^{0\frac{1}{2}}$. $[110]^{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$ $[110]^{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$.

Digonale Schraubenachsen:

$^{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}[010]$ $^{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}[010]$ $[100]^{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$.

$[110]^{\frac{1}{2}0}$ $[110]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}0}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$. $[110]^{0\frac{1}{4}}$ $[110]^{0\frac{3}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{0\frac{1}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{0\frac{3}{4}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, m, p]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, p]\!]$ $[\![m, n, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}, m, \bar{p}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![n, m, \bar{p}]\!]$.
Ferner zu jedem der Werte $[\![x, y, z]\!]$ ein Wert $[\![x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$
2. $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$

} Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung = D_4.

Die Punkte bilden Gitter von der Form des innenzentrierten Elementarparallelepipeds.

3. $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$
4. $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$

} Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = V.

Die Punkte bilden Gitter von der Form des innenzentrierten Elementarparallelepipeds mit zusätzlicher Zentrierung der Flächen (001) und Kanten [001].

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Zu $[\![0\,0\,p]\!]$ gehören $[\![0\,0\,\bar{p}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$. Die Zähligkeit ist 4, die Symmetriebedingung = C_1. Auf den übrigen Drehungsachsen ist bei beliebiger Lage Achtzähligkeit vorhanden, entsprechend der Symmetriebedingung = C_2. Zu $[\![m, m+\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]\!]$ gehören beispielsweise $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{m}, \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\bar{m}, m+\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, m, \frac{1}{4}]\!]$ $[\![m, m+\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{m}, \frac{3}{4}]\!]$ $[\![m, \bar{m}+\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, m, \frac{3}{4}]\!]$.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden 16zählig. Die Achsenverteilung wird hier am besten in zwei Figuren dargestellt, die Ebenen (001) betreffen, welche um $\frac{c}{4}$ voneinander entfernt sind (Fig. 148).

Raumgruppe $\mathfrak{D}_4^{10}$

Die Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_4^6$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$. Sie bilden unter sich $\mathfrak{B}^9$ und $\mathfrak{B}^7$. Der Koordinatenanfangspunkt liege im Schnittpunkt dreier digonaler Drehungsachsen.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) wie bei $\mathfrak{D}_4^9$ (Seite 301).

IV.) $0, \frac{a}{2}, \frac{c}{4}$; $0, 1, 0$: $\bar{1}, 0, 0$; $0, 0, 1$. V.) $\frac{a}{2}, 0, \frac{3c}{4}$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$: $0, 0, \bar{1}$.

Linke tetragonale Schraubenachsen: $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$.

Rechte tetragonale Schraubenachsen: $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.
$^{\frac{1}{4}\frac{7}{8}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\frac{7}{8}}[010]$ $^{\frac{1}{4}\frac{3}{8}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\frac{3}{8}}[010]$ $[100]^{\frac{1}{4}\frac{1}{8}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{1}{8}}$ $[100]^{\frac{1}{4}\frac{5}{8}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{5}{8}}$.
$[110]^{00}$ $[110]^{0\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$. $[110]^{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$ $[110]^{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{00}$ $[1\bar{1}0]^{0\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen:
$^{\frac{1}{2}\frac{1}{8}}[010]$ $^{0\frac{5}{8}}[010]$ $[100]^{0\frac{3}{8}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{7}{8}}$ $^{0\frac{1}{8}}[010]$ $^{\frac{1}{2}\frac{5}{8}}[010]$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{3}{8}}$ $[100]^{0\frac{7}{8}}$.
$[110]^{\frac{1}{2}0}$ $[110]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[110]^{0\frac{1}{4}}$ $[110]^{0\frac{3}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}0}$ $[110]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}0]^{0\frac{1}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{0\frac{3}{4}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, m, p+\frac{3}{4}]\!]$
$[\![m+\frac{1}{2}, n, \bar{p}+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}, \bar{p}+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![n, m, \bar{p}]\!]$
$[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, m, p+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}, m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{4}]\!]$
$[\![\bar{m}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, \bar{p}]\!]$ $[\![m, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ } Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung
2. $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ } = V.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Sie gehören den digonalen Drehungsachsen an und sind jeweilen achtzählig (C_2).

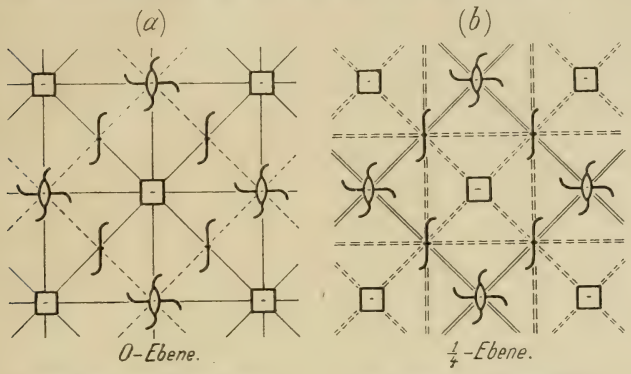


Fig. 148a. $\mathfrak{D}_4^9$ Ebene $(001)_0$ Fig. 148b. $\mathfrak{D}_4^9$ Ebene $(001)_{\frac{1}{4}}$.

Gleiche Symbolik wie in den vorhergehenden Figuren.

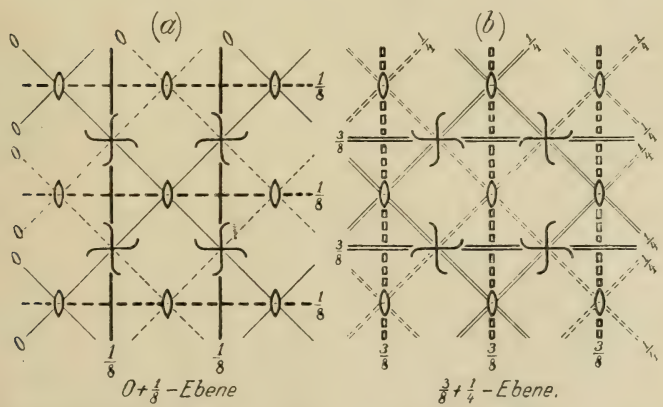


Fig. 149a. $\mathfrak{D}_4^{10}$ Ebenen $(001)_0$ und $(001)_{\frac{1}{8}}$. Fig. 149b. $\mathfrak{D}_4^{10}$ Ebenen $(001)_{\frac{3}{8}}$ und $(001)_{\frac{1}{4}}$.

Gleiche Symbolik wie in den vorhergehenden Figuren.

Punktlagen mit drei Freiheitsgraden sind 16zählig.

Zwei Figuren dienen zur Veranschaulichung der Achsenverhältnisse. Die eine enthält die Achsen in den Ebenen $(001)_0$ und $(001)_{\frac{1}{8}}$, die andere die Achsen der Ebenen $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{8}}$ (Fig. 149).

$\mathfrak{D}_4{}^h$. Holoedrische Klasse der tetragonalen Abteilung (Ditetragonal-bipyramidale Klasse)

Eine tetragonal-isomorphe Achsenschar steht senkrecht auf einer und parallel zu vier Symmetrieebenenscharen. Eine Schar von Symmetriezentren, sowie vier Scharen von digonalen Achsen stellen sich ein.

Die Raumgruppen $\mathfrak{D}_{4h}{}^1 - \mathfrak{D}_{4h}{}^{16}$ können auf ein einfach primitives Elementarparallelepiped a, a, c ($\alpha = \beta = \gamma = 90^0$) bezogen werden. Das eventuell auch verwendbare basiszentrierte, doppeltprimitive Parallelepiped würde sich davon im Punkt-Absorptionsvermögen, der Stellung und im Achsenverhältnis unterscheiden, das einfachprimitive Basisdiagonalparallelepiped in der Stellung und im Achsenverhältnis. Da wir den nachfolgenden Darlegungen den ersteren Fall zugrunde legen, sind die drei ersten Decktransformationsbedingungen für $\mathfrak{D}_{4h}{}^1 - \mathfrak{D}_{4h}{}^{16}$ gegeben durch:

I.) a, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) 0, a, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.
III.) 0, 0, c; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

a_x, a_y, c ist primitives Tripel.

Von den Untergruppen werden außer den auf die Parallelachsen bezüglichen nur die tetragonalen und rhombisch holoedrischen angegeben.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{4h}{}^1$

Ihre einfachsten Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_4{}^1$, $\mathfrak{C}_s{}^1$, $\mathfrak{C}_s{}^1\,\mathfrak{C}_s{}^1$, $\mathfrak{C}_s{}^3\,\mathfrak{C}_s{}^3$, $\mathfrak{C}_2{}^1\,\mathfrak{C}_2{}^1$, $\mathfrak{C}_2{}^3\,\mathfrak{C}_2{}^3$. Die tetragonalen lauten: $\mathfrak{C}_4{}^1$ ($\mathfrak{S}_4{}^1$), $\mathfrak{C}_{4v}{}^1$, $\mathfrak{C}_{4h}{}^1$, ($\mathfrak{B}_d{}^1$), ($\mathfrak{B}_d{}^5$) $\mathfrak{D}_4{}^1$. Die rhombisch-holoedrischen Gruppen $\mathfrak{B}_h{}^1$ und $\mathfrak{B}_h{}^{19}$ lassen sich gleichfalls erkennen. Der Koordinatenanfangspunkt falle mit einem auf der tetragonalen Drehungsachse liegenden Symmetriezentrum zusammen.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe oben.

IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 0, 1. V.) 0, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, $\bar{1}$.
VI.) 0, 0, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

Durch Kombination ergeben sich die anderen.

Symmetrieelemente:

Symmetriezentren: I. $[\![0\,0\,0]\!]$. II. $[\![0\,0\,\tfrac{1}{2}]\!]$. III. $[\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,0]\!]$.
IV. $[\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}]\!]$. V. $[\![0\,\tfrac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}\,0\,0]\!]$. VI. $[\![0\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}\,0\,\tfrac{1}{2}]\!]$.

Tetragonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$; $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen:

$(001)_0$; $(001)_{\frac{1}{2}}$. $(100)_0$ $(010)_0$; $(100)_{\frac{1}{2}}$ $(010)_{\frac{1}{2}}$; $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$.

Gleitspiegelebenen: $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: $^{00}[010]\ [100]^{00}$; $^{\frac{1}{2}0}[010]\ [100]^{\frac{1}{2}0}$: $^{0\frac{1}{2}}[010]\ [100]^{0\frac{1}{2}}$; $^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[010]\ [100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[110]^{00}\ [1\bar{1}0]^{00}$; $[110]^{0\frac{1}{2}}\ [1\bar{1}0]^{0\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen: $[110]^{\frac{1}{2}0}\ [1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}0}$; $[110]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\ [1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

(Siehe Fig. 150.)

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]\ [\![\bar{n}, \bar{m}, p]\!]\ [\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]\ [\![\bar{n}, m, p]\!]\ [\![m, n, \bar{p}]\!]\ [\![n, \bar{m}, \bar{p}]\!]\ [\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]\ [\![\bar{n}, m, \bar{p}]\!]$
$[\![\bar{m}, n, p]\!]\ [\![\bar{n}, \bar{m}, p]\!]\ [\![m, \bar{n}, p]\!]\ [\![n, m, p]\!]\ [\![\bar{m}, n, \bar{p}]\!]\ [\![\bar{n}, \bar{m}, \bar{p}]\!]\ [\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]\ [\![n, m, \bar{p}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad. I, II, III, IV von Symmetriezentren sind jeweilen einzählig mit der Symmetriebedingung $= D_{4h}$. Sie bilden Gitter von der einfachen Form des Elementarparallelepipeds. Die

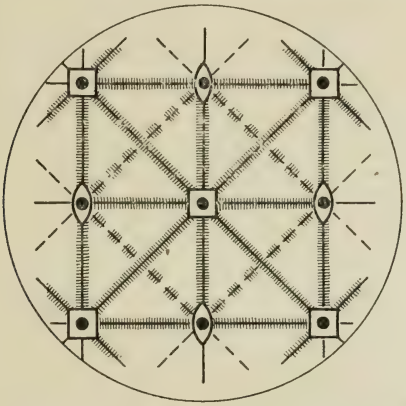


Fig. 150. $\mathfrak{D}_{4h}^{1}$ Ebene $(001)_0$, mit den darauf senkrecht stehenden Achsen und Symmetrieebenen, sowie den in ihr liegenden Symmetriezentren und Achsen. $(001)_0$ selbst ist Spiegelebene. (Großer Kreis.)

Symmetriezentrumslagen V und VI sind jede für sich zweizählig mit der Symmetriebedingung $= V_h$. Sie geben zu Gittern von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierter Basis Veranlassung.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Punktlagen $[\![0\ 0\ p]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ p]\!]$ sind zweizählig. Symmetriebedingung $= C_{4v}$.
2. Beliebige Punktlagen auf irgend einer der übrigen (digonalen) Drehungsachsen besitzen die Zähligkeit 4, entsprechend einer Symmetriebedingung C_{2v}.

Jede Drehungsachse ist somit Schnittlinie zweier Spiegelebenen.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Sie gehören in beliebiger Lage den Spiegelebenen an. Die Zähligkeit ist 8.

Punkte mit drei Freiheitsgraden besitzen ohne Symmetriebedingung die Zähligkeit 16.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{4h}^{2}$

Die Untergruppen lauten: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_4^1$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_2^1\,\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$. Tetragonale Untergruppen sind $\mathfrak{C}_4^1$, $(\mathfrak{S}_4^1)\,\mathfrak{C}_{4h}^1$, $\mathfrak{C}_{4v}^5$, $(\mathfrak{B}_d^2\,\mathfrak{B}_d^6)\,\mathfrak{D}_4^1$. Als rhombisch-holoedrische Gruppen lassen sich $\mathfrak{B}_h^3$ und $\mathfrak{B}_h^{20}$ erkennen. Der Koordinatenanfangspunkt soll durch den Schnittpunkt einer tetragonalen Drehungsachse mit vier digonalen Drehungsachsen markiert sein.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 304.

IV.) $0,0,0;\ 0,1,0;\ \bar{1},0,0;\ 0,0,1$. V.) $0,0,\frac{c}{2};\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,\bar{1}$.

VI.) $0,0,0;\ \bar{1},0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,\bar{1}$.

Symmetrieelemente. Alle Achsen, ob Drehungsachsen oder Schraubenachsen, besitzen gleiche Lage wie in $\mathfrak{D}_{4h}^{1}$; die senkrecht übereinander stehenden horizontalen digonalen Achsen (0 und $\frac{1}{2}$ als zweite Kennziffer) sind lediglich zusammengehörig.

Symmetriezentren: I. $= [\![0\,0\,\tfrac{1}{4}]\!]\ [\![0\,0\,\tfrac{3}{4}]\!]$. II. $= [\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{4}]\!]\ [\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{4}]\!]$.
III. $= [\![\tfrac{1}{2}\,0\,\tfrac{1}{4}]\!]\ [\![0\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{4}]\!]\ [\![\tfrac{1}{2}\,0\,\tfrac{3}{4}]\!]\ [\![0\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{4}]\!]$.

Spiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}\ (001)_{\frac{3}{4}}$.

Gleitspiegelebenen:

$(100)_0\ (010)_0$; $(100)_{\frac{1}{2}}\ (010)_{\frac{1}{2}}$. $(110)_0\ (1\bar{1}0)_0$; $(110)_{\frac{1}{2}}\ (1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]\ [\![n, \bar{m}, p]\!]\ [\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]\ [\![\bar{n}, m, p]\!]$

$[\![m, n, \bar{p}+\tfrac{1}{2}]\!]\ [\![n, \bar{m}, \bar{p}+\tfrac{1}{2}]\!]\ [\![\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}+\tfrac{1}{2}]\!]\ [\![\bar{n}, m, \bar{p}+\tfrac{1}{2}]\!]$

$[\![\bar{m}, n, p+\tfrac{1}{2}]\!]\ [\![\bar{n}, \bar{m}, p+\tfrac{1}{2}]\!]\ [\![m, \bar{n}, p+\tfrac{1}{2}]\!]\ [\![n, m, p+\tfrac{1}{2}]\!]$

$[\![\bar{m}, n, p]\!]\ [\![n, \bar{m}, \bar{p}]\!]\ [\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]\ [\![n, m, \bar{p}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]\ [\![0\,0\,\tfrac{1}{2}]\!]$
2. $[\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,0]\!]\ [\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}]\!]$

} Zähligkeit jeweilen $= 2$. Symmetriebedingung $= D_4$.

3. $[\![0\,0\,\tfrac{1}{4}]\!]\ [\![0\,0\,\tfrac{3}{4}]\!]$
4. $[\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{4}]\!]\ [\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{4}]\!]$

} Zähligkeit ebenfalls $= 2$. Symmetriebedingung $= C_{4h}$.

Diese Punktlagen bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Kanten [001].

5. $[\![0\,\tfrac{1}{2}\,0]\!]\ [\![\tfrac{1}{2}\,0\,0]\!]\ [\![0\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}]\!]\ [\![\tfrac{1}{2}\,0\,\tfrac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit $= 4$. Symmetriebeding. $=$ V.
6. $[\![0\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{4}]\!]\ [\![\tfrac{1}{2}\,0\,\tfrac{1}{4}]\!]\ [\![0\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{4}]\!]\ [\![\tfrac{1}{2}\,0\,\tfrac{3}{4}]\!]$. Zähligkeit $= 4$. Symmetriebeding. $= C_{2h}$.

5 und 6 bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung, zentrierter Basis und zentrierten Kanten [001].

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Auf den tetragonalen Drehungsachsen herrscht bei beliebiger Lage Vierzähligkeit. Die Symmetriebedingung ist durch C_4 gegeben. Auf den digonalen Drehungsachsen (C_2) herrscht Achtzähligkeit.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Es sind das lediglich Punkte $[\![m, n, \frac{1}{4}]\!]$ oder $[\![m, n, \frac{3}{4}]\!]$. Bei beliebiger Lage auf diesen Spiegelebenen stellt sich die Zähligkeit 8 ein. Alle übrigen Punkte sind mit drei Freiheitsgraden 16zählig.

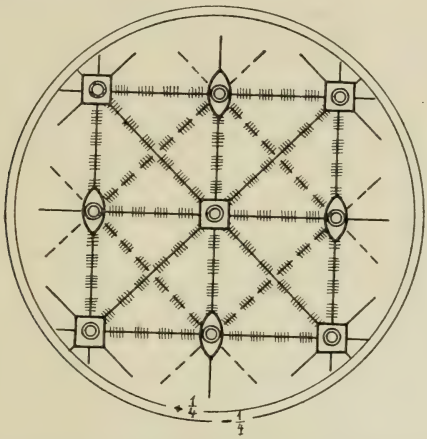


Fig. 151. $\mathfrak{D}_{4h}^2$ Ebene $(001)_0$. Analoge Darstellung wie Fig. 150. Die Symmetriezentren und die Spiegelebenen (001) befinden sich in $\frac{c}{4}$ über und unter der Achsenebene $(001)_0$.

Die Fig. 151 soll die Symmetrieebenenverteilung zur bildlichen Darstellung bringen. Die horizontalen Spiegelebenen liegen nicht mehr in der Ebene der horizontalen Achsen, sondern in $\frac{1}{4}c$ darüber und darunter, ebenso die Symmetriezentren. Alle vertikalstehenden Symmetrieebenen sind Gleitspiegelebenen.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{4h}^3$

Ihre Untergruppen lauten: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_4^1$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^2$ $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^1$ $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$. Von tetragonalem Charakter sind: $\mathfrak{C}_4^1$ ($\mathfrak{S}_4^1$) $\mathfrak{C}_{4v}^2$, $\mathfrak{C}_{4h}^3$, ($\mathfrak{B}_d^7$ $\mathfrak{B}_d^1$) $\mathfrak{D}_4^1$. $\mathfrak{B}_h^4$ $\mathfrak{B}_h^{21}$ sind die darin enthaltenen rhombisch-holoedrischen Untergruppen. Die Lage des Koordinatenanfangspunktes sei mit der von $\mathfrak{D}_{4h}^2$ ident.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 304.

IV.) $0, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, 0, 1$. V.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0;\ 1, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, \bar{1}$.

VI.) $0, 0, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, \bar{1}$.

Symmetrieelemente: Die Lage der Achsen entspricht genau derjenigen der beiden vorhergehenden Gruppen. Die Zusammengehörigkeit ist lediglich geändert. Auch sind die digonalen Drehungsachsen [001] tetragonale Drehspiegelachsen geworden.

Symmetriezentren: I. $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ 0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ 0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ 0]\!]$.

II. $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}]\!]$.

Gleitspiegelebene: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{1}{4}}$; $(100)_{\frac{3}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$. $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$.

Drehspiegelebenen für die Achsen $[001]_{0\,\frac{1}{2}}$ und $[010]_{\frac{1}{2}\,0}$ sind $(001)_0$ und $(001)_{\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, p]\!]$

$[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$

$[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, p]\!]$

$[\![\bar{m}, n, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, \bar{p}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![n, m, \bar{p}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

1. $[\![0\ 0\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$
2. $[\![0\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$

} Zähligkeit jeweilen = 2. Symmetriebedingung = D_4.

3. $[\![0\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ 0]\!]$
4. $[\![0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$

} Zähligkeit jeweilen = 2. Symmetriebedingung = V_d.

Alle diese Punktlagen bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierter Basisfläche.

5. $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ 0]\!]$ usw. (siehe Symmetriezentren I). Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_{2h}.
6. $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}]\!]$ usw. (siehe Symmetriezentren II). Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_{2h}.

Diese Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierter Basis und zentrierten Kanten des Basisquadrates.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Zu $[\![0\ 0\ p]\!]$ gehören $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \bar{p}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ p]\!]$ $[\![0\ 0\ \bar{p}]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_4. Zu $[\![0\ \frac{1}{2}\ p]\!]$ gehören $[\![\frac{1}{2}\ 0\ p]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ \bar{p}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ \bar{p}]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_{2v}. Auf den übrigen digonalen Drehungsachsen sind die Punktlagen achtzählig gemäß der einfachen Symmetriebedingung = C_2.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden gehören den Spiegelebenen $(110)_{\frac{1}{2}}$ bezw. $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$ an (sowie den ihnen identischen Ebenen). Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = C_s.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden 16zählig. Die Figur 152 ist nach dem Vorhergehenden ohne weiteres verständlich.

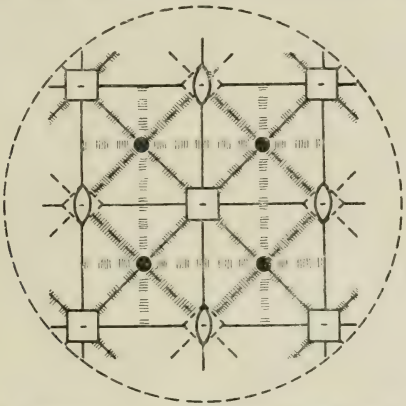


Fig. 152. $\mathfrak{D}_{4h}^3$ Ebene $(001)_0$ = Gleitspiegelebene mit den darinliegenden und den darauf senkrecht stehenden Symmetrieelementen.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{4h}^4$

Die Untergruppen lauten: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_4^1$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_2^1\,\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$. Von tetragonalem Charakter sind: $\mathfrak{C}_4^1$, $(\mathfrak{S}_4^1)$, $\mathfrak{C}_{4v}^6$, $\mathfrak{C}_{4h}^3$, $(\mathfrak{V}_d^2\,\mathfrak{V}_d^8)$, $\mathfrak{D}_4^1$. Die rhombisch holoedrischen heißen diesmal $\mathfrak{V}_h^2$, $\mathfrak{V}_h^{22}$. Der Koordinatenanfangspunkt besitze gleiche Lage wie in $\mathfrak{D}_{4h}^3$.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 304.

IV.) $0,0,0;\ 0,1,0;\ \bar{1},0,0;\ 0,0,1$. V.) $\frac{a}{2},\ \frac{a}{2},\ \frac{c}{2};\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,\bar{1}$.

VI.) $0,0,0;\ \bar{1},0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,\bar{1}$.

Alle Achsen besitzen, abgesehen von der neuen Zusammengehörigkeit, gleiche Lage wie in $\mathfrak{D}_{4h}^1$. Die digonalen Drehungsachsen [001] sind tetragonale Drehspiegelachsen.

Symmetriezentren:

$[\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]$ $[\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]$ $[\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]$ $[\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]$ $[\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]$ $[\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]$ $[\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]$ $[\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]$.

Gleitspiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$.

$(100)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$. $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$; $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(110)_{\frac{1}{2}}$.

Zu den Achsen $[001]_{\frac{1}{2}\,0}$ $[001]_{0\,\frac{1}{2}}$ gehören die Drehspiegelebenen $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![n, m, p]\!]$

$[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![\bar{m}, n, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, \bar{p}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![n, m, \bar{p}]\!]$.

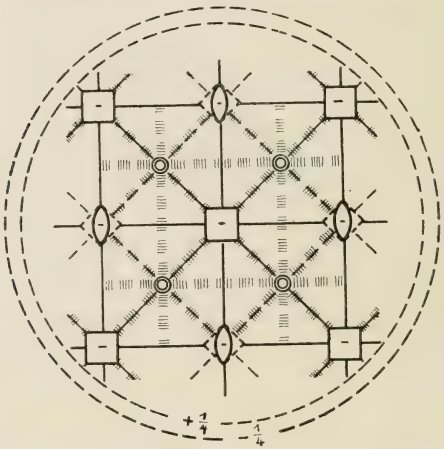


Fig. 153. $\mathfrak{D}_{4h}^{4}$ Ebene $(001)_0$. Die Hauptspiegelebenen und Symmetriezentren liegen in $\frac{c}{4}$ darüber und darunter.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$
2. $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$

} Zähligkeit jeweilen = 2. Symmetriebedingung = D_4.

Die Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung.

3. $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = V.
4. $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = S_4.
5. Die acht zusammengehörigen Symmetriezentren. Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung $1Z = C_i$.

3 und 4 bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung, zentrierten Flächen (001) und Kanten [001].

Die Symmetriezentren bilden dem Elementarparallelepiped ähnliche Gitter von $\frac{1}{8}$ Volumen der Gittermasche.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Sie sind vierzählig auf den tetragonalen Drehungsachsen, achtzählig auf den digonalen Drehungsachsen.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden sind keine vorhanden, die mit drei Freiheitsgraden sind 16zählig.

In der Figur 153 bedeuten die Doppelkreise der Symmetriezentren Lagen $\frac{1}{4}c$ oberhalb bezw. unterhalb der Achsenebene. Die großen gestrichelten Doppelkreise bezeichnen die in gleicher Lage befindlichen Gleitspiegelebenen und Drehspiegelebenen.

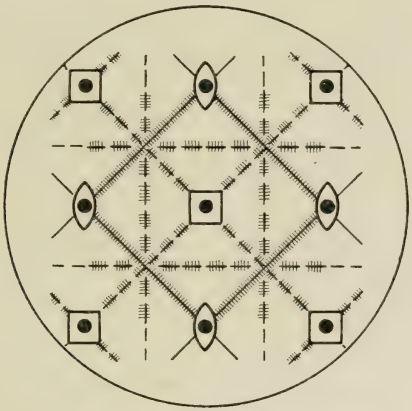


Fig. 154. $\mathfrak{D}_{4h}^5$ Ebene $(001)_0$.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{4h}^5$

Ihr gehören die Untergruppen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_4^1$, $\mathfrak{C}_8^1$, $\mathfrak{C}_8^2$ $\mathfrak{C}_8^2$, $\mathfrak{C}_8^3$ $\mathfrak{C}_8^3$, $\mathfrak{C}_2^2$ $\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$ an. Die tetragonalen Untergruppen lauten: $\mathfrak{C}_4^1$, $(\mathfrak{S}_4)$: $\mathfrak{C}_{4v}^2$, $\mathfrak{C}_{4h}^3$. $(\mathfrak{B}_d^3\ \mathfrak{B}_d^7)$ $\mathfrak{D}_4^2$. Rhombisch holoedrisch sind die Gruppen, $\mathfrak{B}_h^9$ $\mathfrak{B}_h^{19}$. Ein auf einer tetragonalen Drehungsachse liegendes Symmetriezentrum wird Koordinatenanfangspunkt.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe S. 304.

IV.) $0,0,0;\ 0,1,0;\ \bar{1},0,0;\ 0,0,1$. V.) $0,0,0;\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,\bar{1}$.

VI.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0;\ \bar{1},0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,\bar{1}$.

Symmetriezentren: I. $= [\![0\,0\,0]\!]\ [\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$. II. $= [\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]\ [\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$.
III. $= [\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]\ [\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$. IV. $= [\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]\ [\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$.

Tetragonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$; $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Spiegelebene: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$. $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$. $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[110]^{\frac{1}{2}\,0}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\,0}$; $[110]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen: $[110]^{00}$ $[1\bar{1}0]^{00}$; $[110]^{0\,\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}0]^{0\,\frac{1}{2}}$.
$^{\frac{1}{4}\,0}[010]$ $^{\frac{3}{4}\,0}[010]$ $[100]^{\frac{1}{4}\,0}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,0}$. $^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}[010]$ $[100]^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[m, n, p]$ $[\bar{n}, \bar{m}, p]$ $[\bar{m}, \bar{n}, p]$ $[\bar{n}, m, p]$ $[m, n, \bar{p}]$ $[\bar{n}, \bar{m}, \bar{p}]$ $[\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}]$ $[\bar{n}, m, \bar{p}]$
$[\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]$ $[\bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p]$ $[m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]$ $[n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, p]$
$[\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]$ $[\bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{p}]$ $[m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]$ $[n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, \bar{p}]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[0\,0\,0]$ $[\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]$
2. $[0\,0\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]$

} Zähligkeit jeweilen = 2. Symmetriebedingung = C_{4h}.

3. $[0\,\frac{1}{2}\,0]$ $[\frac{1}{2}\,0\,0]$
4. $[0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]$

} Zähligkeit jeweilen = 2. Symmetriebedingung = V_h.

Die Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierter Basis.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Auf den tetragonalen Drehungsachsen: Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_4.
2. Auf $[001]_{0\,\frac{1}{2}}$ oder $[001]_{\frac{1}{2}\,0}$ oder $[110]^{\frac{1}{2}\,0}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\,0}$ bezw. $[110]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_{2v}.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Sie gehören den Spiegelebenen an und sind achtzählig.

16zählig sind die Punktlagen mit drei Freiheitsgraden.

Fig. 154 gibt über die Verteilung der Symmetrieelemente Aufschluß.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{4h}^6$

Ihre Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_4^1$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^2$ $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_2^2$ $\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$. Tetragonale Untergruppen: $(\mathfrak{S}_4^1)$ $\mathfrak{C}_4^1$, $\mathfrak{C}_{4h}^1$, $\mathfrak{C}_{4v}^6$ $(\mathfrak{V}_d^4\ \mathfrak{V}_d^8)$ $\mathfrak{D}_4^2$. Rhombisch holoedrisch sind $\mathfrak{V}_h^{12}$ und $\mathfrak{V}_h^{20}$. Ein auf einer tetragonalen Drehungsachse liegendes Symmetriezentrum wird Koordinatenanfangspunkt.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 304.

IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; 1, 0, 0; 0, 0, 1. V.) 0, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

VI.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2}$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

Symmetriezentren: I. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$. II. $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$.
III. $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$.

Tetragonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{\frac{1}{2}\,0}$ $[001]_{0\,\frac{1}{2}}$.

Spiegelebene: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen:

$(100)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$. $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$; $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[110]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}}$ $[110]^{\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}}$.
$^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}}[010]$ $^{\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}}[010]$ $[100]^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}}$.

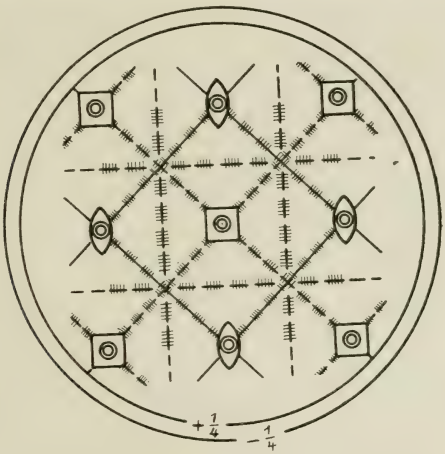


Fig. 155. $\mathfrak{D}_{4h}^6$ bezogen auf die Ebene $(001)_{\frac{1}{4}}$, die Achsenebene.
Die Hauptspiegelebenen sind $(001)_0$ und $(001)_{\frac{1}{2}}$, darin liegen auch die Symmetriezentren.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![\bar{m}, n, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, p]\!]$ $[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, n, p]\!]$ $[\![n, m, p]\!]$
$[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$
2. $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$

} Zähligkeit jeweilen = 2. Symmetriebedingung = C_{4h}.

Die Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung.

3. $[\![\frac{1}{2}\ 0\ 0]\!]\ [\![0\ \frac{1}{2}\ 0]\!]\ [\![0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]\ [\![\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = C_{2h}.
4. $[\![\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{4}]\!]\ [\![0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}]\!]\ [\![0\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{4}]\!]\ [\![\frac{1}{2}\ 0\ \frac{3}{4}]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = V.

3 und 4 bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung, Basisflächenzentrierung und Zentrierung der Kanten [001].

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Vierzähligkeit ist auf den tetragonalen Drehungsachsen vorhanden (C_4); Achtzähligkeit auf den digonalen Drehungsachsen (C_2).

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Punkte $[\![m, n, 0]\!]$ oder $[\![m, n, \frac{1}{2}]\!]$ sind achtzählig (C_s).

Alle anderen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden 16zählig. Figur 155 ist so zu verstehen, daß die Achsenebene in die Zeichnungsebene zu liegen gekommen ist, dann befinden sich die horizontalen Spiegelebenen und die Symmetriezentren im Abstande $\frac{c}{4}$ darüber und darunter.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{4h}^{7}$

Ihre Untergruppen lauten: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_4^1$, $\mathfrak{C}_4^2$, $\mathfrak{C}_s^1$ $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^2$ $\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$. Von tetragonalem Charakter sind: $\mathfrak{C}_4^1$ ($\mathfrak{S}_4^1$), $\mathfrak{C}_{4h}^3$, $\mathfrak{C}_{4v}^1$ ($\mathfrak{B}_d^5$ $\mathfrak{B}_d^3$) $\mathfrak{D}_4^2$. Rhombisch holoedrisch sind: $\mathfrak{B}_h^{13}$ $\mathfrak{B}_h^{21}$. Der Koordinatenanfangspunkt falle mit einem Schnittpunkt einer digonalen Drehungsachse [001] (die zugleich tetragonale Drehspiegelachse ist) und der zugehörigen Drehspiegelebene zusammen.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) Siehe Seite 304.

IV.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0$; 0, 1, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 0, 1. V.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

VI.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0$; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

Symmetrieelemente:

Symmetriezentren: I. $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ 0]\!]\ [\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ 0]\!]\ [\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ 0]\!]\ [\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ 0]\!]$.
II. $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}]\!]\ [\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{2}]\!]\ [\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}]\!]\ [\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{2}]\!]$.

Tetragonale Drehungsachsen: $[001]_{0\,\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\,0}$.

Digonale Drehungsachsen (Drehspiegelachsen): $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$. $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$.

Digonale Drehungsachsen: $[110]^{00}$ $[1\bar{1}0]^{00}$; $[110]^{0\,\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}0]^{0\,\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen: $[110]^{\frac{1}{2}\,0}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\,0}$; $[110]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$. $^{\frac{1}{4}\,0}[010]$ $^{\frac{3}{4}\,0}[010]$ $[100]^{\frac{1}{4}\,0}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,0}$; $^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}[010]$ $[100]^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}$.

Drehspiegelebenen: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, p]\!]$
$[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![n, \bar{m}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}, m, \bar{p}]\!]$
$[\![\bar{m}, n, p]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, p]\!]$
$[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![n, m, \bar{p}]\!]$.

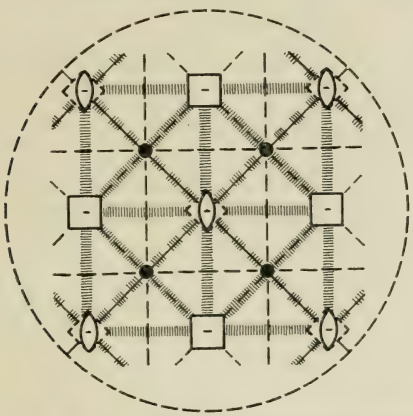


Fig. 156. $\mathfrak{D}_{4h}^7$ Ebene $(001)_0$. Gewöhnliche Darstellung.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$
2. $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$

} Zähligkeit jeweilen = 2. Symmetriebedingung = V_d.

Die Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung.

3. $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ usw. = Symmetriezentren I.
4. $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ usw. = Symmetriezentren II.

} Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_{2h}.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Zu $[\![\frac{1}{2}\,0\,p]\!]$ gehört $[\![0\,\frac{1}{2}\,\bar{p}]\!]$. Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung = C_{4v}.
2. Zu $[\![0\,0\,p]\!]$ gehören $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,p]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\bar{p}]\!]$ $[\![0\,0\,\bar{p}]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_{2v}.
3. Auf den übrigen digonalen Drehungsachsen sind die Punktlagen achtzählig (C_2).

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Sie gehören bei Achtzähligkeit den Spiegelebenen an.

Die übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden 16zählig. Figur 156 stellt das Raumsystem in gewohnter Weise dar.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{4h}^{8}$

Ihr gehören die Untergruppen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_4^1$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_2^2\,\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$ an. Von tetragonalem Charakter sind $\mathfrak{C}_4^1$, $(\mathfrak{S}_4^1)$, $\mathfrak{C}_{4h}^3$, $\mathfrak{C}_{4v}^5$, $(\mathfrak{V}_d^4\,\mathfrak{V}_d^6)$ $\mathfrak{D}_4^2$. Rhombisch holoedrische Untergruppen wären $\mathfrak{V}_h^{10}$ und $\mathfrak{V}_h^{22}$. Der Koordinatenanfangspunkt falle mit einem Schnittpunkt dreier digonaler Drehungsachsen zusammen.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 304.

IV.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0;\ 0, 1, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, 0, 1.$ V.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2};\ 1, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, 1.$

VI.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, \bar{1}.$

Achsenlage (abgesehen von der Zusammengehörigkeit) gleich wie in $\mathfrak{D}_{4h}^{7}$. (Siehe Fig. 157.)

Symmetriezentren:

$[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$.

Gleitspiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$.

$(100)_0$ $(010)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ $(010)_{\frac{1}{2}}$. $(1\bar{1}0)_0$ $(1\bar{1}0)_0$; $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$.

Drehspiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, p]\!]$
$[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n, \bar{m}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}, m, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{m}, n, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}, m, \bar{p}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = V.
2. $[\![0\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = S_4.
   Beide Punktlagen bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung, zentrierten Basisflächen und zentrierten Kanten [001].
3. Die Symmetriezentren: Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = C_i. Es werden dem Elementarparallelepiped ähnliche Gitter von $\frac{1}{8}$ Volumen der Masche gebildet.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Auf den tetragonalen Drehungsachsen ist Vierzähligkeit vorhanden. Zu $[\![\frac{1}{2}, 0, p]\!]$ gehören $[\![0, \frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![0, \frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}, 0, p+\frac{1}{2}]\!]$.
2. Auf den digonalen Drehungsachsen herrscht Achtzähligkeit.

Alle übrigen Punktlagen besitzen drei Freiheitsgrade und sind 16zählig.

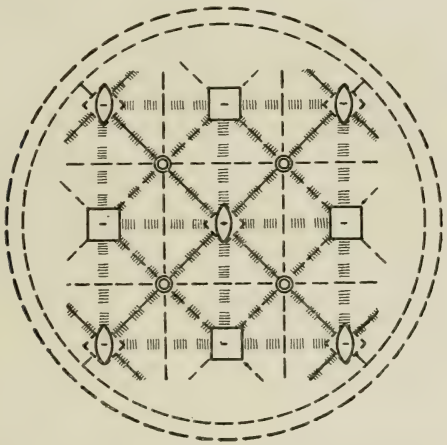


Fig. 157. $\mathfrak{D}_{4h}^{8}$ Ebene $(001)_0$. Gewöhnliche Darstellung.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{4h}^{9}$

Folgende Untergruppen sind vorhanden: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_4^3$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^1$ $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_2^1$ $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$. Tetragonale Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_4^3$ $(\mathfrak{S}_4^1)$, $\mathfrak{C}_{4h}^2$, $\mathfrak{C}_{4v}^7$, $(\mathfrak{B}_d^2\ \mathfrak{B}_d^5)$ $\mathfrak{D}_4^5$. Rhombisch holoedrischen Charakter besitzen: $\mathfrak{B}_h^1$ und $\mathfrak{B}_h^{20}$. Der Koordinatenanfangspunkt falle auf den Schnittpunkt der tetragonalen Schraubenachse mit zwei digonalen Drehungsachsen.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 304.

IV.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $0, 1, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 0, 1$. V.) $0, 0, 0$; $1, 0, 0$: $0, 1, 0$: $0, 0, \bar{1}$.

VI.) $0, 0, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, 1$.

Symmetriezentren: I. $= [\![0\ 0\ 0]\!]$ $[\![0\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$. II. $= [\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$.
III. $= [\![\frac{1}{2}\ 0\ 0]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$. IV. $= [\![0\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$.

Tetragonale Schraubenachsen (digonale Drehungsachsen):
$[001]_{00}$; $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{0\,\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\,0}$.

Spiegelebenen: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$. $(100)_0$ $(010)_0$; $(100)_{\frac{1}{2}}$ $(010)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$; $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: ${}^{00}[010]$ $[100]^{0\,\frac{1}{2}}$; ${}^{0\,\frac{1}{2}}[010]$ $[100]^{00}$; ${}^{\frac{1}{2}\,0}[010]$ $[100]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$; ${}^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}[010]$ $[100]^{\frac{1}{2}\,0}$; $[110]^{0\,\frac{1}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{0\,\frac{3}{4}}$; $[110]^{0\,\frac{3}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{0\,\frac{1}{4}}$.

Digonale Schraubenachsen: $[110]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}}$ $[110]^{\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}}$; $[110]^{\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}}$.

Drehspiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, p+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![m, n, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}, m, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{m}, n, p]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p]\!]$ $[\![n, m, p+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{m}, n, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![n, m, p+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$
2. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$

} Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung = V_h.

3. $[\![0\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{3}{4}]\!]$
4. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$

} Zähligkeit ebenfalls = 2. Symmetriebedingung = V_d.

Diese Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Kanten [001].

5. $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$
6. $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$

} Zähligkeit jeweilen = 2. Symmetriebedingung wie bei 1 und 2 = V_h.

5 und 6 bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Auf den digonalen Drehungsachsen [001] sind die beliebigen Punktlagen vierzählig; sie müssen der Symmetriebedingung = C_{2v} genügen.
2. Gleich verhalten sich die digonalen Drehungsachsen [010] und [100].
3. Auf den übrigen digonalen Drehungsachsen sind, gemäß der Symmetriebedingung C_2, die Punktlagen achtzählig.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Sie gehören den Spiegelebenen an (C_s) und sind ebenfalls achtzählig, währenddem die Punkte allgemeinster Lage 16zählig sind.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{4h}{}^{10}$

Als Untergruppen ergeben sich: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_4{}^3$, $\mathfrak{C}_s{}^1$, $\mathfrak{C}_s{}^2$ $\mathfrak{C}_s{}^2$, $\mathfrak{C}_s{}^3$ $\mathfrak{C}_s{}^3$, $\mathfrak{C}_2{}^1$ $\mathfrak{C}_2{}^1$, $\mathfrak{C}_2{}^3$ $\mathfrak{C}_2{}^3$. Tetragonal sind speziell: $\mathfrak{C}_4{}^3$ ($\mathfrak{S}_4{}^1$), $\mathfrak{C}_{4h}{}^2$, $\mathfrak{C}_{4v}{}^3$, ($\mathfrak{V}_d{}^1$ $\mathfrak{V}_d{}^6$) $\mathfrak{D}_4{}^5$. Rhombisch holoedrisch sind: $\mathfrak{V}_h{}^3$ $\mathfrak{V}_h{}^{19}$. Der Koordinatenanfangs-

punkt liege auf einer tetragonalen Schraubenachse im Schnittpunkt mit zwei digonalen Drehungsachsen der Richtungen [100] [010].

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 304.

IV.) $0,0,\frac{c}{2}$: $0,1,0$; $\bar{1},0,0$; $0,0,1$. V.) $0,0,\frac{c}{2}$; $1,0,0$; $0,1,0$; $0,0,\bar{1}$.

VI.) $0,0,0$; $\bar{1},0,0$; $0,1,0$; $0,0,\bar{1}$.

Alle Achsen besitzen gleiche Lage wie in $\mathfrak{D}_{4h}^{9}$.

Symmetriezentren: I. $[\![0\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{3}{4}]\!]$. II. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$.
III. $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$.

Spiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$. $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$.

Gleitspiegelebenen: $(100)_0$ $(010)_0$; $(100)_{\frac{1}{2}}$ $(010)_{\frac{1}{2}}$; $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$.

Drehspiegelebenen: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, p+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![m, n, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n, \bar{m}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}, m, \bar{p}]\!]$
$[\![\bar{m}, n, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, p]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n, m, p]\!]$
$[\![\bar{m}, n, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![n, m, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$
2. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ } Zähligkeit jeweilen = 2. Symmetriebedingung = V_d.
3. $[\![0\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{3}{4}]\!]$
4. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ } Zähligkeit jeweilen = 2. Symmetriebedingung = V_h.

Alle diese Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit zentrierten Kanten [001].

5. Symmetriezentren III. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_{2h}.
Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung, Basisflächenzentrierung und Zentrierung der Kanten [001] werden gebildet.
6. Ebenfalls vierzählig: $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$. Symmetriebedingung = V.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Zu $[\![0, 0, p]\!]$ gehören $[\![0, 0, \bar{p}]\!]$ $[\![0, 0, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0, 0, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_{2v}.
2. Auf den übrigen digonalen Drehungsachsen ist die Zähligkeit 8 maßgebend (C_2).

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Sie gehören den Spiegelebenen an und sind achtzählig.

Die allgemeine Lage ist 16zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{4h}^{11}$

Ihre Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_4^3$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_2^1\,\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$. Von tetragonalem Charakter lassen sich erkennen: $\mathfrak{C}_4^3$, $(\mathfrak{S}_4^1)$, $\mathfrak{C}_{4h}^4$, $\mathfrak{C}_{4v}^8$, $(\mathfrak{B}_d^2\,\mathfrak{B}_d^7)$ $\mathfrak{D}_4^5$. Die folgenden rhombisch-holoedrischen Gruppen sind darin enthalten: $\mathfrak{B}_h^4$ $\mathfrak{B}_h^{22}$. Der Koordinatenanfangspunkt besitze gleiche Lage wie in $\mathfrak{D}_{4h}^{10}$.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 304.

IV.) $0,0,\frac{c}{2}$; $0,1,0$; $\bar{1},0,0$; $0,0,1$. V.) $\frac{a}{2},\frac{a}{2},0$; $1,0,0$; $0,1,0$; $0,0,\bar{1}$.

VI.) $0,0,0$; $1,0,0$; $0,1,0$; $0,0,\bar{1}$.

Die Achsenlage stimmt (abgesehen von der Zusammengehörigkeit) mit der von $\mathfrak{D}_{4h}^{10}$ überein. Die gewöhnlichen digonalen Drehungsachsen [001] sind nun tetragonale Drehspiegelachsen.

Symmetriezentren:

$[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$.

Gleitspiegelebenen: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$.

$(100)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$. $(1\bar{1}0)_0$ $(11\bar{0})_0$; $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$.

Drehspiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, p+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![m, n, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![n, m, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$
2. $[\![0\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$
3. $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$

Zähligkeit jeweilen = 4. Symmetriebedingung = V.

4. $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = S_4.

Diese Punktlagen bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung, zentrierter Basis und zentrierten Kanten [001].

5. Die Symmetriezentren. Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = C_i. Die entstehenden Gitter sind dem Elementarparallelepiped ähnlich, aber von $\frac{1}{8}$ Volumen der Gittermasche.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Alle den digonalen Drehungsachsen angehörige, beliebige Punktlagen sind achtzählig.

Außerdem gibt es nur noch Punktlagen mit drei Freiheitsgraden. Sie sind 16zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{4h}^{12}$

Ihre Untergruppen lauten: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_4^3$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^2$ $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^1$ $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$. Ferner sind in ihr enthalten: $\mathfrak{C}_4^3$ ($\mathfrak{S}_4^1$), $\mathfrak{C}_{4h}^1$, $\mathfrak{C}_{4v}^4$ ($\mathfrak{V}_d^1$ $\mathfrak{V}_d^8$) $\mathfrak{D}_4^5$ und $\mathfrak{V}_h^2$, $\mathfrak{V}_h^{21}$. Der Koordinatenanfangspunkt entspricht einem Punkte mit der Symmetrie $\mathfrak{V}_d$ auf den digonalen Drehungsachsen der tetragonalen Schar.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 304. (Abbildung von $\mathfrak{V}_h^2$ auf Seite 189, von $\mathfrak{V}_h^{21}$ auf Seite 209.)

IV.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2}$; $0, 1, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 0, 1$. V.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2}$; $1, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

VI.) $0, 0, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

Symmetriezentren:

I. $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$. II. $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$.

Tetragonale Schraubenachsen (digonale Drehungsachsen):

$[001]_{\frac{1}{2}\,0}$ $[001]_{0\,\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen (tetragonale Drehspiegelachsen):

$[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$.

Spiegelebenen: $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$.

Gleitspiegelebenen:

$(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$. $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: ${}^{00}[010]$ ${}^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}[010]$ $[100]^{00}$ $[100]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$; ${}^{\frac{1}{2}\,0}[010]$ ${}^{0\,\frac{1}{2}}[010]$ $[100]^{\frac{1}{2}\,0}$ $[100]^{0\,\frac{1}{2}}$; $[110]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}}$ $[110]^{\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}}$.

Digonale Schraubenachsen: $[110]^{0\,\frac{1}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{0\,\frac{3}{4}}$ $[110]^{0\,\frac{3}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{0\,\frac{1}{4}}$.

Drehspiegelebenen: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n, \bar{m}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}, m, \bar{p}]\!]$
$[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, p]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n, m, p]\!]$
$[\![\bar{m}, n, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\ 0\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$
2. $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![0\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$

} Zähligkeit jeweilen = 2. Symmetriebedingung = V_d.

Die Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung.

3. $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ } Zähligkeit jeweilen = 4. Symmetrie-
4. $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ } bedingung = V.

5. Symmetriezentren I
6. Symmetriezentren II } Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_{2h}.

3 und 4 bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung, Basisflächenzentrierung und Zentrierung der Kanten [001].

5 und 6 bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit allseitiger Flächenzentrierung.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Auf $[001]_{00}$ und $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ müssen sie der Bedingung C_{2v} gehorchen, sind daher vierzählig. Im übrigen sind die Punktlagen auf den digonalen Drehungsachsen achtzählig.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Sie gehören den Spiegelebenen an und sind achtzählig. 16zählig sind die Punkte allgemeiner Lage.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{4h}{}^{13}$

Als Untergruppen lassen sich erkennen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_4{}^3$, $\mathfrak{C}_s{}^1$, $\mathfrak{C}_s{}^2\,\mathfrak{C}_s{}^2$, $\mathfrak{C}_s{}^4\,\mathfrak{C}_s{}^4$, $\mathfrak{C}_2{}^2\,\mathfrak{C}_2{}^2$, $\mathfrak{C}_2{}^3\,\mathfrak{C}_2{}^3$. Von tetragonalem Charakter sind: $\mathfrak{C}_4{}^3$, $(\mathfrak{S}_4{}^1)$, $\mathfrak{C}_{4h}{}^2$, $\mathfrak{C}_{4v}{}^8$, $(\mathfrak{V}_d{}^4\,\mathfrak{V}_d{}^7)$ $\mathfrak{D}_4{}^6$. Die beiden eingeschlossenen rhombisch holoedrischen Raumgruppen lauten: $\mathfrak{V}_h{}^9$. $\mathfrak{V}_h{}^{20}$. Der Koordinatenanfangspunkt besitzt die Lage eines Symmetriezentrums auf den tetragonalen Schraubenachsen.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 304. (Abbildung von $\mathfrak{V}_h{}^{20}$ auf Seite 207.)

IV.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $0, 1, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 0, 1$. V.) $0, 0, 0$; $1, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

VI.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

Symmetriezentren: I. $= [\![0\,0\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$.
II. $= [\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$.

Tetragonale Schraubenachsen und Drehspiegelachsen (digonale Drehungsachsen): $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen:

$(100)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$. $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$; $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[110]^{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$ $[110]^{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$ $[110]^{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$.

Digonale Schraubenachsen: $[110]^{0\,\frac{1}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{0\,\frac{3}{4}}$ $[110]^{0\,\frac{3}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{0\,\frac{1}{4}}$; $^{\frac{1}{4}\,0}[010]$ $^{\frac{3}{4}\,0}[010]$ $[100]^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}$; $^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}[010]$ $[100]^{\frac{3}{4}\,0}$ $[100]^{\frac{1}{4}\,0}$.

Drehspiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$$[\![m, n, p]\!] \quad [\![\bar{n}, m, p+\tfrac{1}{2}]\!] \quad [\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!] \quad [\![n, \bar{m}, p+\tfrac{1}{2}]\!].$$

$$[\![m, n, \bar{p}]\!] \quad [\![\bar{n}, m, \bar{p}+\tfrac{1}{2}]\!] \quad [\![\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}]\!] \quad [\![n, \bar{m}, \bar{p}+\tfrac{1}{2}]\!]$$

$$[\![\bar{m}+\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}, p]\!] \quad [\![\bar{n}+\tfrac{1}{2}, \bar{m}+\tfrac{1}{2}, p+\tfrac{1}{2}]\!] \quad [\![m+\tfrac{1}{2}, \bar{n}+\tfrac{1}{2}, p]\!] \quad [\![n+\tfrac{1}{2}, m+\tfrac{1}{2}, p+\tfrac{1}{2}]\!]$$

$$[\![\bar{m}+\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}, \bar{p}]\!] \quad [\![\bar{n}+\tfrac{1}{2}, \bar{m}+\tfrac{1}{2}, \bar{p}+\tfrac{1}{2}]\!] \quad [\![m+\tfrac{1}{2}, \bar{n}+\tfrac{1}{2}, \bar{p}]\!] \quad [\![n+\tfrac{1}{2}, m+\tfrac{1}{2}, \bar{p}+\tfrac{1}{2}]\!].$$

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = C_{2h}.
2. $[\![0\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = S_4.
3. $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = C_{2h}.
4. $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = V.

Alle diese Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung, zentrierter Basis und zentrierten Kanten [001].

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Sie gehören denjenigen Achsen an, die digonale Drehungsachsen sind und zeigen bei beliebiger Lage Achtzähligkeit. (C_2.)

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden sind durch die allgemeinen Symbole $[\![m, n, 0]\!]$ oder $[\![m, n, \frac{1}{2}]\!]$ gekennzeichnet. Zähligkeit = 8.

Drei Freiheitsgrade und 16-Zähligkeit sind zusammengehörig.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{4h}^{14}$

Ihre Untergruppen ergeben sich zu: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_4^3$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^2\,\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^2\,\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_3^3$. Von tetragonalem Charakter sind: $\mathfrak{C}_4^3$, $(\mathfrak{S}_4^1)$ $\mathfrak{C}_{4h}^2$, $\mathfrak{C}_{4v}^1$, $(\mathfrak{V}_d^3\,\mathfrak{V}_d^3)$ $\mathfrak{D}_4^6$. Als Repräsentanten der rhombisch-holoedrischen Gruppen treten $\mathfrak{V}_h^{12}$ und $\mathfrak{V}_h^{19}$ auf. Der Koordinatenanfangspunkt besitze die Lage eines Symmetriezentrums auf einer digonalen Drehungsachse der tetragonalen Schar, die zugleich Schnittlinie zweier Spiegelebenen ist.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 304. (Abbildung von $\mathfrak{V}_h^{19}$ auf Seite 205.)

IV.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2}$; 0, 1, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 0, 1. V.) 0, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

VI.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2}$; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

Symmetriezentren: I. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$. II. $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$.
III. $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$.

Tetragonale Schraubenachsen (Drehspiegelachsen) digonale Drehungsachsen: $[001]_{0\,\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\,0}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$. $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$.

Gleitspiegelebenen: $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$. $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[110]^{00}$ $[1\bar{1}0]^{0\,\frac{1}{2}}$; $[110]^{0\,\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}0]^{00}$.

Digonale Schraubenachsen: $[110]^{\frac{1}{2}\,0}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$; $[110]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\,0}$.
$^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}}[010]$ $^{\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}}[010]$ $[100]^{\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}}$.

Drehspiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{1}{4}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![m, n, \bar{p}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, n, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, p]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n, m, \bar{p}]\!]$
$[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n, m, \bar{p}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$
2. $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$

} Zähligkeit jeweilen = 2. Symmetriebedingung = V_h.

Die Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung.

3. Symmetriezentren III. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_{2h}.
4. $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = S_4.

3 und 4 bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung, zentrierten Basisflächen und zentrierten Kanten [001].

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Sie sind gemäß der Bedingung C_{2v} vierzählig auf $[001]_{00}$ bezw. $[001]_{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$.
2. Auf den übrigen digonalen Drehungsachsen besitzen beliebige Punkte Achtzähligkeit.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Sie gehören entweder den Spiegelebenen $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$ oder $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$ an. Die Zähligkeit ist, der Symmetriebedingung C_s entsprechend, 8.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden 16zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{4h}^{15}$

Sie enthält die Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_4^3$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^1$ $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_2^2$ $\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$. Von tetragonalem Charakter sind: $\mathfrak{C}_4^3$, $(\mathfrak{S}_4^1)$ $\mathfrak{C}_{4h}^4$, $\mathfrak{C}_{4v}^7$, $(\mathfrak{V}_d^4\ \mathfrak{V}_d^5)$ $\mathfrak{D}_4^6$. Die rhombisch holoedrischen Untergruppen müssen als $\mathfrak{V}_h^{13}$ $\mathfrak{V}_h^{22}$ bezeichnet werden. Der Koordinatenanfangspunkt liege im Schnittpunkt dreier digonaler Drehungsachsen.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 304. (Abbildung von $\mathfrak{V}_h^{22}$ auf Seite 211.)

IV.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2}$; $0, 1, 0$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 0, 1$. V.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2}$; $1, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

VI.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2}$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

Symmetrieelemente: Die Achsenlage stimmt (abgesehen von der Zusammengehörigkeit) mit der von $\mathfrak{D}_{4h}^{14}$ überein. Die gewöhnlichen digonalen Achsen [001] sind diesmal tetragonale Drehspiegelachsen.

Symmetriezentren:

$[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$.

Gleitspiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$.

Spiegelebenen: $(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$; $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$.

Drehspiegelebenen: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n, m, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}, m, \bar{p}]\!]$
$[\![\bar{m}, n, p]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, \bar{p}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n, m, \bar{p}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$
2. $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$

} Zähligkeit jeweilen = 2. Symmetriebedingung = V_d.

Die Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung.

3. Die Symmetriezentren. Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = C_i.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Auf den vertikalen digonalen Drehungsachsen herrscht Vierzähligkeit, da die Symmetriebedingung C_{2v} ist. Auf den Drehungsachsen [110] [1$\bar{1}$0] sind die Punktlagen achtzählig (C_s).

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Dazu gehören die Punkte [[m, 0, p]] [[m, $\frac{1}{2}$, p]] bezw. [[0, n, p]] [[$\frac{1}{2}$, n, p]]. Die betreffenden Punktlagen sind achtzählig und besitzen die Symmetriebedingung C_s.

16zählig sind die Punkte mit drei Freiheitsgraden.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{4h}^{16}$

Diesmal lauten die Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_4^3$, $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^2$ $\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^2$ $\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$. Vertreter der tetragonalen Unterklassen sind: $\mathfrak{C}_4^3$ ($\mathfrak{S}_4^1$), $\mathfrak{C}_{4h}^4$, $\mathfrak{C}_{4v}^3$, ($\mathfrak{V}_d^3$ $\mathfrak{V}_d^6$) $\mathfrak{D}_4^6$. Rhombisch holoedrischen Charakter besitzen $\mathfrak{V}_h^{10}$ $\mathfrak{V}_h^{21}$. Wiederum sei der Schnittpunkt dreier digonaler Drehungsachsen Koordinatenanfangspunkt.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 304.

IV.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2}$; 0, 1, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 0, 1. V.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}$, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

VI.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2}$; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

Abgesehen von der Zusammengehörigkeit ist gleiche Achsenlage wie in der vorhergehenden Gruppe vorhanden.

Symmetriezentren: I. [[$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ 0]] [[$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$]] [[$\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$ 0]] [[$\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$]].
II. [[$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$]] [[$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$ 0]] [[$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$]] [[$\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$ 0]].

Gleitspiegelebenen: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$. $(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$.

Drehspiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$. Die gewöhnlichen digonalen Drehungsachsen [001] sind tetragonale Drehspiegelachsen.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

[[m, n, p]] [[n + $\frac{1}{2}$, $\bar{m}$ + $\frac{1}{2}$, p + $\frac{1}{2}$]] [[$\bar{m}$, $\bar{n}$, p]] [[$\bar{n}$ + $\frac{1}{2}$, m + $\frac{1}{2}$, p + $\frac{1}{2}$]]
[[m + $\frac{1}{2}$, n + $\frac{1}{2}$, $\bar{p}$]] [[u, $\bar{m}$, $\bar{p}$ + $\frac{1}{2}$]] [[$\bar{m}$ + $\frac{1}{2}$, $\bar{n}$ + $\frac{1}{2}$, $\bar{p}$]] [[$\bar{n}$, m, $\bar{p}$ + $\frac{1}{2}$]]
[[m, n, p + $\frac{1}{2}$]] [[$\bar{n}$ + $\frac{1}{2}$, $\bar{m}$ + $\frac{1}{2}$, p]] [[m, $\bar{n}$, p + $\frac{1}{2}$]] [[n + $\frac{1}{2}$, m + $\frac{1}{2}$, p]]
[[$\bar{m}$ + $\frac{1}{2}$, n + $\frac{1}{2}$, $\bar{p}$ + $\frac{1}{2}$]] [[$\bar{n}$, m, $\bar{p}$]] [[m + $\frac{1}{2}$, $\bar{n}$ + $\frac{1}{2}$, $\bar{p}$ + $\frac{1}{2}$]] [[n, m, $\bar{p}$]].

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. [[0 0 0]] [[$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$]] [[$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ 0]] [[0 0 $\frac{1}{2}$]]. Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = V.
2. [[0 0 $\frac{1}{4}$]] [[$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$]] [[$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$]] [[0 0 $\frac{3}{4}$]]. Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = S_4.

Die Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung, zentrierter Basis und zentrierten Kanten [0 0 1].

3. Symmetriezentren I. } Zähligkeit jeweilen = 4.
4. Symmetriezentren II. } Symmetriebedingung = C_{2h}.

Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit allseitiger Flächenzentrierung werden gebildet.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Vierzähligkeit herrscht auf den tetragonalen Schraubenachsen (C_{2v}). Achtzähligkeit ist auf den übrigen digonalen Drehungsachsen vorhanden (C_2).

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Sie liegen auf den Spiegelebenen und sind achtzählig. 16zählig sind alle übrigen Punktarten.

Die Raumgruppen $\mathfrak{D}_{4h}^{17} - \mathfrak{D}_{4h}^{20}$ müssen auf ein innenzentriertes oder allseitig flächenzentriertes Elementarparallelepiped bezogen werden. Die erstere einfachere Möglichkeit wird hier befolgt. Das primitive Tripel läßt sich dann jeweilen zu $\frac{a_x}{2}+\frac{a_y}{2}+\frac{c}{2}$, $\frac{a_x}{2}-\frac{a_y}{2}+\frac{c}{2}$, c angeben. Die gemeinsamen drei ersten Decktransformationsbedingungen lauten:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. V.) $\frac{a}{2}, \frac{\bar{a}}{2}, \frac{c}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

III.) 0, 0, c; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{4h}^{17}$

Ihre Untergruppen lauten: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_1^5$, $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$. Tetragonal sind: $\mathfrak{C}_4^5$, $(\mathfrak{S}_4^2)$, $\mathfrak{C}_{4h}^5$, $\mathfrak{C}_{4v}^9$, $(\mathfrak{B}_d^9\,\mathfrak{B}_d^{11})$, $\mathfrak{D}_4^9$. Rhombisch holoedrischen Charakter besitzen: $\mathfrak{B}_h^{23}\,\mathfrak{B}_h^{25}$. Der Koordinatenanfangspunkt habe die Lage eines auf einer tetragonalen Drehungsachse liegenden Symmetriezentrums.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe oben.

IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; 1, 0, 0; 0, 0, 1. V.) 0, 0, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

VI.) 0, 0, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

Symmetriezentren:

I. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$. II. $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$. III. $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$.

IV. $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$.

Tetragonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Tetragonale Schraubenachsen (digonale Drehungsachsen): $[001]_{0\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$.

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$.

Spiegelebenen: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$.

Spiegelebenen: $(100)_0$ $(010)_0$ $100)_{\frac{1}{2}}$ $(010)_{\frac{1}{2}}$; $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$.

Gleitspiegelebenen: $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$; $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen:

$^{00}[010]$ $^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[010]$ $[100]^{00}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $^{\frac{1}{2}0}[010]$ $^{0\frac{1}{2}}[010]$ $[100]^{\frac{1}{2}0}$ $[100]^{0\frac{1}{2}}$;

$[110]^{00}$ $[1\bar{1}0]^{00}$; $[110]^{0\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}0]^{0\frac{1}{2}}$. $[110]^{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$ $[110]^{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$.

Ferner die zugehörigen digonalen Schraubenachsen. (Siehe z. B. $\mathfrak{D}_4{}^9$.)

Drehspiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, m, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, p]\!]$ $[\![m, n, \bar{p}]\!]$ $[\![n, m, \bar{p}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}, m, \bar{p}]\!]$
$[\![\bar{m}, n, p]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, p]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p]\!]$ $[\![n, m, p]\!]$ $[\![\bar{m}, n, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}, m, \bar{p}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![n, m, \bar{p}]\!]$.

Ferner zu jedem dieser Werte: $[\![x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2}, z + \frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$
2. $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$

} Zähligkeit jeweilen = 2. Symmetriebedingung = D_{4h}.

Die Punkte bilden Gitter von der Form des innenzentrierten Elementarparallelepipeds.

3. Symmetriezentren III. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = V_h.
4. $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = V_d.
5. Symmetriezentren IV. Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = C_{2h}.

3 und 4 bilden Gitter von der Form des innenzentrierten Elementarparallelepipeds mit Basisflächenzentrierung und zentrierten Kanten [001].

5 ergibt dem einfachen Elementarparallelepiped ähnliche Gitter von $\frac{1}{8}$ Volumen.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Auf den vierzähligen Drehungsachsen herrscht bei beliebiger Lage Vierzähligkeit entprechend der Symmetriebedingung C_{4v}.
2. Auf den digonalen Drehungsachsen, mit Ausnahme von $[110]^{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$ usw., herrscht der Symmetriebedingung C_{2v} gemäß Achtzähligkeit.
3. 16zählig sind die Punktlagen auf den Drehungsachsen $[110]^{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$ usw.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden gehören den Spiegelebenen an und sind 16zählig. Die allgemeine Lage ist 32zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{4h}^{18}$

Ihre Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_4^5$, $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$. Den tetragonalen Klassen gehören an: $\mathfrak{C}_4^5$ ($\mathfrak{S}_4^2$), $\mathfrak{C}_{4h}^5$ $\mathfrak{C}_{4v}^{10}$, ($\mathfrak{V}_d^{11}$ $\mathfrak{V}_d^{10}$) $\mathfrak{D}_4^9$. Die rhombisch holoedrischen Untergruppen lauten. $\mathfrak{V}_h^{23}$, $\mathfrak{V}_h^{26}$. Der Koordinatenanfangspunkt ist Schnittpunkt einer tetragonalen Drehungsachse mit vier digonalen Drehungsachsen.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 327.

IV.) 0, 0, 0: 0, 1, 0: $\bar{1}$, 0, 0; 0, 0, 1. V.) 0, 0, $\frac{c}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

VI.) 0, 0, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

Abgesehen von der Zusammengehörigkeit entspricht die Achsenlage der von $\mathfrak{D}_{4h}^{17}$. (Abbildung von $\mathfrak{V}_h^{26}$ auf Seite 217.)

Spiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$.

Gleitspiegelebenen: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(100)_0$ $(010)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ $(010)_{\frac{1}{2}}$.

$(100)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$. $(110]_0$ $(1\bar{1}0)_0$.

Drehspiegelebenen: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$.

Symmetriezentren:

I. $[\![0\,0\,\tfrac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,0\,\tfrac{3}{4}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{4}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{4}]\!]$. II. $[\![\tfrac{1}{2}\,0\,\tfrac{1}{4}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}\,0\,\tfrac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{4}]\!]$.

III. $[\![\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\tfrac{1}{4}\,\tfrac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\tfrac{3}{4}\,\tfrac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{4}\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\tfrac{3}{4}\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{2}]\!]$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}, p]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}, m, p]\!]$

$[\![m, n, \bar{p}+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![n, \bar{m}, \bar{p}+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}, m, \bar{p}+\tfrac{1}{2}]\!]$

$[\![\bar{m}, n, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![n, m, p+\tfrac{1}{2}]\!]$

$[\![\bar{m}, n, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}, \bar{p}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![n, m, \bar{p}]\!]$.

Ferner gehört zu jedem dieser Werte ein Wert $[\![x+\tfrac{1}{2}, y+\tfrac{1}{2}, z+\tfrac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,0]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = D_4.
2. Symmetriezentren I. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_{4h}.
3. Symmetriezentren II. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = V_h.
4. $[\![\tfrac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2}\,0\,\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\tfrac{1}{2}\,0]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = V_d.

Die Punkte bilden Gitter von der Form des innenzentrierten Elementarparallelepipeds mit zusätzlicher Zentrierung der Basisflächen und der c-Kanten.

5. Symmetriezentren III. Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = C_{2h}. Diese Gitter sind dem einfachen Elementarparallelepiped ähnlich, die Masche besitzt aber nur $\frac{1}{8}$ des Volumens.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Auf den tetragonalen Drehungsachsen ist die Zähligkeit 8 maßgebend, damit verknüpft ist die Symmetriebedingung C_4.
2. Ebenfalls achtzählig sind die beliebigen Punktlagen auf den tetragonalen Schraubenachsen, die der Symmetriebedingung C_{2v} gehorchen müssen. Gleicherweise verhalten sich die Punkte auf den $[110]^{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$ entsprechenden digonalen Drehungsachsen.
3. Sonst ist mit einfachen digonalen Drehungsachsen 16-Zähligkeit verbunden.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Den Spiegelebenen zugehörig sind sie 16zählig. Die allgemeine Lage ist 32zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{4h}{}^{19}$

Ihr gehören die Untergruppen: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_4{}^6$, $\mathfrak{C}_s{}^4$, $\mathfrak{C}_s{}^3\,\mathfrak{C}_s{}^3$, $\mathfrak{C}_s{}^4\,\mathfrak{C}_s{}^4$, $\mathfrak{C}_2{}^3\,\mathfrak{C}_2{}^3$, $\mathfrak{C}_2{}^3\,\mathfrak{C}_2{}^3$ an. Tetragonalen Charakter besitzen: $\mathfrak{C}_4{}^6$ ($\mathfrak{S}_4{}^2$) $\mathfrak{C}_{4h}{}^6$, $\mathfrak{C}_{4v}{}^{11}$, ($\mathfrak{V}_d{}^{12}$, $\mathfrak{V}_d{}^9$) $\mathfrak{D}_4{}^{10}$. Rhombisch holoedrisch sind: $\mathfrak{V}_h{}^{28}$ $\mathfrak{V}_h{}^{24}$. Der Koordinatenanfangspunktes stimme mit dem Schnittpunkt dreier digonaler Drehungsachsen überein.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 327. (Abbildung von $\mathfrak{V}_h{}^{28}$ auf Seite 221.)

IV.) $0, \frac{a}{2}, \frac{c}{4}$; $0,1,0$; $\bar{1},0,0$; $0,0,1$. V.) $0, \frac{a}{2}, \frac{c}{4}$; $1,0,0$; $0,1,0$; $0,0,\bar{1}$.

VI.) $0, \frac{a}{2}, \frac{3c}{4}$; $\bar{1},0,0$; $0,1,0$; $0,0,\bar{1}$.

Symmetriezentren:

I. $[0,\frac{1}{4},\frac{1}{8}]$ $[\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{8}]$ $[0,\frac{3}{4},\frac{1}{8}]$ $[\frac{1}{4},0,\frac{7}{8}]$ $[\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{5}{8}]$ $[\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{8}]$ $[\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{5}{8}]$ $[\frac{3}{4},0,\frac{7}{8}]$.

II. $[\frac{1}{4},0,\frac{3}{8}]$ $[0,\frac{1}{4},\frac{5}{8}]$ $[\frac{3}{4},0,\frac{3}{8}]$ $[\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}]$ $[\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{7}{8}]$ $[\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{1}{8}]$ $[\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{7}{8}]$ $[0,\frac{3}{4},\frac{5}{8}]$.

Tetragonale Schraubenachsen: $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$; $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.
Dazu die digonalen Schraubenachsen.

Gleitspiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{8}}$ $(001)_{\frac{5}{8}}$; $(001)_{\frac{3}{8}}$ $(001)_{\frac{7}{8}}$.

Spiegelebenen: $(100)_0$ $(010)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ $(010)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen:
$(100)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$. $(110)_{\frac{1}{4}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{4}}$; $(110)_{\frac{3}{4}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{3}{4}}$.

Digonale Drehungsachsen:

$^{\frac{1}{4}\,\frac{7}{8}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\,\frac{7}{8}}[010]$ $^{\frac{1}{4}\,\frac{3}{8}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\,\frac{3}{8}}[010]$ $[100]^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{8}}$ $[100]^{\frac{1}{4}\,\frac{5}{8}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,\frac{5}{8}}$.

$[110]^{00}$ $[110]^{0\,\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}}$. $[110]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}}$ $[110]^{\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{00}$ $[1\bar{1}0]^{0\,\frac{1}{2}}$.

Ferner die dazugehörigen digonalen Schraubenachsen (siehe beispielsweise $\mathfrak{D}_4^{10}$).

Drehspiegelebenen: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$ $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, m, p+\frac{3}{4}]\!]$

$[\![m+\frac{1}{2}, n, \bar{p}+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}, \bar{p}+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\bar{n}, m, \bar{p}]\!]$

$[\![\bar{m}, n, p]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, m, p+\frac{3}{4}]\!]$

$[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n, \bar{p}+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}, \bar{p}+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![n, m, \bar{p}]\!]$.

Außerdem gehört zu jedem Wert ein Wert $[\![x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ } Zähligkeit jeweilen = 4. Symmetrie-
2. $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ } bedingung = V_d.
3. Symmetriezentren I. Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = C_{2h}.
4. Symmetriezentren II. Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = C_{2h}.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Achtzählig sind mit der Bedingung C_{2v} die Punkte auf den digonalen Drehungsachsen parallel [001]. Sonst ist die Zähligkeit auf den digonalen Drehungsachsen 16.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Sie gehören den Spiegelebenen an und sind 16zählig.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden 32zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{4h}^{20}$

Die zugehörigen Untergruppen lauten: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_4^6$, $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_s^4\,\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3$. Von tetragonalem Charakter sind: $\mathfrak{C}_4^6$ $(\mathfrak{S}_4^2)$ $\mathfrak{C}_{4h}^6$, $\mathfrak{C}_{4v}^{12}$ $(\mathfrak{V}_d^{10}\,\mathfrak{V}_d^{12})$ $\mathfrak{D}_4^{10}$. Rhombisch holoedrische Symmetrie besitzen die Untergruppen $\mathfrak{V}_h^{24}$ $\mathfrak{V}_h^{27}$. Der Koordinatenanfangspunkt ist Schnittpunkt dreier digonaler Drehungsachsen.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 327.

IV.) $0, \frac{a}{2}, \frac{c}{4}$; $0, 1, 0$; $1, 0, 0$; $0, 0, 1$. V.) $0, \frac{a}{2}, \frac{3c}{4}$; $1, 0, 0$; $0, 1, 0$: $0, 0, \bar{1}$.

VI.) $\frac{a}{2}\,0, \frac{3c}{4}$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

Die Achsenlage entspricht (abgesehen von Zusammengehörigkeiten) der von $\mathfrak{D}_{4h}^{19}$.

Symmetriezentren:

$[\![\frac{1}{4}\ 0\ \frac{1}{8}]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ 0\ \frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ 0\ \frac{5}{8}]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{4}\ \frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ 0\ \frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{8}]\!]$
$[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\ \frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{5}{8}]\!]$ $[\![0\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{8}]\!]$ $[\![0\ \frac{3}{4}\ \frac{7}{8}]\!]$.

Gleitspiegelebenen:

$(001)_{\frac{1}{8}}$ $(001)_{\frac{3}{8}}$ $(001)_{\frac{5}{8}}$ $(001)_{\frac{7}{8}}$; ferner $(100)_0$ $(010)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ $(010)_{\frac{1}{2}}$.

$(100)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$. $(110)_{\frac{1}{4}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{4}}$; $(110)_{\frac{3}{4}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{3}{4}}$.

Drehspiegelebenen: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$ $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, m, p+\frac{3}{4}]\!]$
$[\![m+\frac{1}{2}, n, \bar{p}+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}, p+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\bar{n}, m, p+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{m}, n, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![m, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, m, p+\frac{1}{4}]\!]$
$[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n, \bar{p}+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}, \bar{p}+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![n, m, \bar{p}]\!]$.

Ferner zu jedem Werte $[\![x+\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}, z+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\ 0\ 0]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![0\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$.
   Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = V.
2. $[\![0\ 0\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\ 0\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{4}]\!]$.
   Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = S_4.
3. Symmetriezentren: Zähligkeit = 16. Symmetriebedingung = C_i.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Bei beliebiger Lage auf einer der digonalen Drehungsachsen stellt sich immer 16-Zähligkeit ein. (Symmetriebedingung C_2.)

Die mit drei Freiheitsgraden versehenen Punktlagen sind 32zählig.

Hexagonale Abteilung

Alle hiehergehörigen Raumsysteme lassen sich auf eine hexagonale Translationsgruppe beziehen. Ein orthohexagonales Elementarparallelepiped ermöglicht den Vergleich mit den übrigen Raumsystemen: $a = b\sqrt{3}$; $\alpha, \beta, \gamma = 90^0$. Ein primitives Tripel ist gegeben in $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$, $\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$, c. Über die Transformationsgleichungen wurde bereits bei Anlaß der Besprechung der rhomboedrischen Raumgruppen das Nötige mitgeteilt.

$\mathfrak{C}_{3h}$. Trigonale Tetartoedrie der hexagonalen Abteilung (Paramorphe Hemiedrie der trigonalen Abteilung) (Trigonal bipyramidale Klasse)

Eine Achsenschar, die einer trigonalen Achse isomorph ist, steht senkrecht auf einer Symmetrieebenenschar.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{3h}^1$

Als Untergruppen figurieren $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_3^1$, $\mathfrak{C}_s^1$. Der Schnittpunkt einer trigonalen Drehungsachse mit einer Spiegelebene ist Koordinatenanfangspunkt.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) $\frac{a}{2}, \frac{\bar{b}}{2}, 0$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

III.) 0, 0, c; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. IV.) $0, 0, 0; \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0; \frac{\overline{\sqrt{3}}}{2}, \frac{1}{2}, 0$: 0, 0, 1.

V.) 0, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

Trigonale Drehungsachsen:

$[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{2}{3}0}$ $[001]_{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{1}{3}0}$ $[001]_{\frac{5}{6}\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m_1, n_1, p]\!]$ $[\![m_2, n_2, p]\!]$ $[\![m_3, n_3, p]\!]$ $[\![m_1, n_1, p]\!]$ $[\![m_2, n_2, \bar{p}]\!]$ $[\![m_3, n_3, p]\!]$

$[\![m_1 + \frac{1}{2}, n_1 + \frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![m_2 + \frac{1}{2}, n_2 + \frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![m_3 + \frac{1}{2}, n_3 + \frac{1}{2}, p]\!]$

$[\![m_1 + \frac{1}{2}, n_1 + \frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![m_2 + \frac{1}{2}, n_2 + \frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![m_3 + \frac{1}{2}, n_3 + \frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$. 2. $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$. 3. $[\![\frac{2}{3}\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$.

4. $[\![\frac{2}{3}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$. 5. $[\![\frac{1}{3}\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$. 6. $[\![\frac{1}{3}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$.

Alle 6 Punktlagen sind zweizählig und besitzen die Symmetrie $= C_{3h}$. Sie bilden Gitter von der Form des basisflächenzentrierten Elementarparallelepipeds.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Sie liegen auf den trigonalen Drehungsachsen und sind vierzählig. (C_3 = Symmetriebedingung.) $[\![Zu\ \frac{2}{3}\,0\,p]\!]$ gehören beispielsweise $[\![\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,p]\!]$ $[\![\frac{2}{3}\,0\,\bar{p}]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,\bar{p}]\!]$.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden haben ihren Sitz auf den Spiegelebenen und sind bei beliebiger Lage 6zählig.

Zwölfzählig sind alle übrigen Punkte, die keiner Symmetriebedingung genügen müssen.

$\mathfrak{D}_{3h}$. Trigonale Hemiedrie der hexagonalen Abteilung (Trigonale Holoedrie der trigonalen Abteilung) (Ditrigonal bipyramidale Klasse)

Außer den Scharen von Symmetrieelementen, welche die soeben besprochene Klasse besitzt, sind senkrecht zu den trigonalen Achsen drei Scharen digonaler Achsen und parallel zu den Hauptachsen drei Scharen von Spiegelebenen vorhanden.

Auf das orthohexagonale Elementarparallelepiped bezogen lauten die drei ersten Decktransformationsbedingungen gemeinsam.

I.) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0;\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1.$ II.) $\frac{a}{2}, \frac{\bar{b}}{2}, 0;\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1.$

III.) $0,0,c;\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1.$

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{3h}^{1}$

Ihre Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_3^1$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$. Ferner sind vorhanden $\mathfrak{C}_{3h}^1$, $\mathfrak{C}_{3v}^1$, $\mathfrak{D}_3^1$. Der Koordinatenanfangspunkt besitze die volle Symmetrie der ditrigonal bipyramidalen Klasse.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe oben. (Abbildung von $\mathfrak{C}_{3v}^1$ auf Seite 233.)

IV.) $0,0,0;\ \frac{\bar{1}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0;\ \frac{\overline{\sqrt{3}}}{2}, \frac{\bar{1}}{2}, 0;\ 0,0,1.$ V.) $0,0,0;\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,\bar{1}.$

VI.) $0,0,0;\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1.$

Trigonale Drehungsachsen:

$[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{2}{3}0}$ $[001]_{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{1}{3}0}$ $[001]_{\frac{5}{6}\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(001)_0$; $(001)_{\frac{1}{2}}$. $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ $(310)_0$ $(310)_0$.

Gleitspiegelebenen: $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ $(310)_{\frac{1}{2}}$ $(\bar{3}10)_{\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen:

$[100]^{00}$ $[100]^{\frac{1}{2}0}$ $[130]^{00}$ $[130]^{00}$: $[100]^{0\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[130]^{0\frac{1}{2}}$ $[130]^{0\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen:

$[100]^{\frac{1}{4}0}$ $[100]^{\frac{3}{4}0}$ $[130]^{\frac{1}{2}0}$ $[1\bar{3}0]^{\frac{1}{2}0}$. $[100]^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}$ $[130]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[1\bar{3}0]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Symmetrielemente:

$[\![m_1, n_1, p]\!]$ $[\![m_2, n_2, p]\!]$ $[\![m_3, n_3, p]\!]$ $[\![m_1, n_1, \bar{p}]\!]$ $[\![m_2, n_2, \bar{p}]\!]$ $[\![m_3, n_3, \bar{p}]\!]$
$[\![m_1, \bar{n}_1, p]\!]$ $[\![m_2, \bar{n}_2, p]\!]$ $[\![m_3, \bar{n}_3, p]\!]$ $[\![m_1, \bar{n}_1, \bar{p}]\!]$ $[\![m_2, \bar{n}_2, \bar{p}]\!]$ $[\![m_3, \bar{n}_3, \bar{p}]\!]$.

Außerdem gehört zu jedem Wert $[\![x, y, z]\!]$ ein Wert $[\![x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z]\!]$. Die gewöhnliche kristallographische Aufstellung ist eine um 90° gedrehte. Eine Spiegelebene besitzt die Lage von (100). b- und a-Achse würden sich vertauschen. Wir behalten die eben mitgeteilte Aufstellung dennoch bei und erhalten:

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$. 2. $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$. 3. $[\![\frac{2}{3}\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$. 4. $[\![\frac{2}{3}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$.
5. $[\![\frac{1}{3}\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$. 6. $[\![\frac{1}{3}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$.

Alle diese 6 verschiedenen Punktlagen sind zweizählig. Die Symmetriebedingung = D_{3h} muß erfüllt sein. Gitter von der Form des basiszentrierten Elementarparallelepipeds werden gebildet.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Vierzähligkeit herrscht auf den trigonalen Drehungsachsen, daher ergibt sich die Symmetriebedingung zu C_{3v}. Sechszähligkeit ist beliebigen Punktlagen auf den digonalen Drehungsachsen eigen. Symmetriebedingung $= C_{2v}$.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Sie gehören den Spiegelebenen an und sind 12zählig (C_s). Die übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden 24zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{3h}^2$

Ihre Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_3^1$, $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$. Sie bilden unter sich $\mathfrak{C}_{3h}^1$, $\mathfrak{C}_{3v}^3$, $\mathfrak{D}_3^1$. Der Koordinatenanfangspunkt ist Schnittpunkt einer trigonalen Drehungsachse mit drei digonalen Drehungsachsen.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 334.

IV.) $0, 0, 0$; $\frac{\bar{1}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0$: $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\bar{1}}{2}, 0$: $0, 0, 1$. V.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $1, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$.

VI.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $1, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, 1$.

Achsenlage (abgesehen von der Zusammengehörigkeit) gleichwie in $\mathfrak{D}_{3h}^1$.

Spiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$.

Gleitspiegelebenen:

$(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ $(310)_0$ $(3\bar{1}0)_0$: $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ $(310)_{\frac{1}{2}}$ $(3\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m_1, n_1, p]\!]$ $[\![m_2, n_2, p]\!]$ $[\![m_3, n_3, p]\!]$ $[\![m_1, n_1, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m_2, n_2, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m_3, n_3, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![m_1, \bar{n}_1, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m_2, \bar{n}_2, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m_3, \bar{n}_3, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m_1, \bar{n}_1, \bar{p}]\!]$ $[\![m_2, \bar{n}_2, \bar{p}]\!]$ $[\![m_3, \bar{n}_3, \bar{p}]\!]$.

Außerdem gehört zu jedem Wert ein Wert $[\![x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1.	$[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$	Zähligkeit jeweilen $= 4$. Symmetriebedingung $= D_3$.
2.	$[\![\frac{2}{3}\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{2}{3}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$	
3.	$[\![\frac{1}{3}\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{3}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$	
4.	$[\![0\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$	Zähligkeit jeweilen $= 4$. Symmetriebedingung $= C_{3h}$.
5.	$[\![\frac{2}{3}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{2}{3}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$	
6.	$[\![\frac{1}{3}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{3}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$	

Alle diese Punkte bilden Gitter von der Form des basisflächenzentrierten Elementarparallelepipeds mit halb so großer Höhe.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Die beliebig auf den trigonalen Drehungsachsen liegenden Punkte sind 8zählig. Symmetrie-

bedingung $= C_3$. Diejenigen auf den digonalen Drehungsachsen sind 12zählig und müssen der Bedingung $= C_2$ genügen.

Ebenfalls zwölfzählig sind die Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden auf den Spiegelebenen (C_s). 24zählig sind alle übrigen Punkte.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{3h}^3$

Die Untergruppen lauten: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_3^1$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$. Unter sich bilden sie aber diesmal $\mathfrak{C}_{3v}^2$, $\mathfrak{D}_3^2$, $\mathfrak{C}_{3h}^1$. Die Aufstellung des Elementarparallelepipeds stimmt hier und in der folgenden Gruppe mit der üblichen kristallographischen Aufstellung überein. Der Koordinatenanfangspunkt besitzt die volle Symmetrie der zugehörigen Kristallklasse.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 334.

IV.) $0,0,0$; $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0$; $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0$; $0,0,1$. V.) $0,0,0$; $1,0,0$; $0,1,0$; $0,0,\bar{1}$.

VI.) $0,0,0$; $1,0,0$; $0,1,0$; $0,0,1$.

Trigonale Drehungsachsen:

$[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{2}{3}0}$ $[001]_{\frac{1}{3}0}$ $[001]_{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{5}{6}\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(001)_0$; $(001)_{\frac{1}{2}}$; $(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$.

Gleitspiegelebenen: $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen:

$^{00}[010]$ $^{\frac{1}{2}0}[010]$ $[110]^{00}$ $[1\bar{1}0]^{00}$; $^{0\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[010]$ $[110]^{0\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}0]^{0\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen:

$^{\frac{1}{4}0}[010]$ $^{\frac{3}{4}0}[010]$ $[110]^{\frac{1}{2}0}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}0}$. $^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}[010]$ $[110]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m_1, n_1, p]\!]$ $[\![m_2, n_2, p]\!]$ $[\![m_3, n_3, p]\!]$ $[\![m_1, n_1, \bar{p}]\!]$ $[\![m_2, n_2, \bar{p}]\!]$ $[\![m_3, n_3, \bar{p}]\!]$

$[\![\bar{m}_1, n_1, p]\!]$ $[\![\bar{m}_2, n_2, p]\!]$ $[\![\bar{m}_3, n_3, p]\!]$ $[\![\bar{m}_1, n_1, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}_2, n_2, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}_3, n_3, \bar{p}]\!]$.

Außerdem zu jedem Wert ein Wert $[\![x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$
2. $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$

} Zähligkeit jeweilen $= 2$. Symmetriebedingung $= D_{3h}$.

3. $[\![\frac{2}{3}\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{3}\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$
4. $[\![\frac{2}{3}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{3}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$

} Zähligkeit jeweilen $= 4$. Symmetriebedingung $= C_{3h}$.

1 und 2 bilden Gitter von der Form des basiszentrierten Elementarparallelepipeds.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Auf $[001]_{00}$ und $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ hat eine beliebige Punktlage die Zähligkeit 4. Die Symmetriebedingung lautet C_{3v}.

2. Auf den übrigen trigonalen Drehungsachsen ist eine Punktlage 8zählig und muß nun der Bedingung C_3 gehorchen.
3. Auf den digonalen Drehungsachsen liegen 6zählige Punkte. (Symmetriebedingung $= C_{2v}$.)

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Sie gehören den Spiegelebenen an und sind 12zählig.

Die allgemeine Punktlage ist 24zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{3h}^4$

Ihre Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_3^1$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$; ferner $\mathfrak{C}_{3v}^4$, $\mathfrak{D}_3^2$, $\mathfrak{C}_{3h}^1$. Der Schnittpunkt einer trigonalen mit drei digonalen Drehungsachsen wird Koordinatenanfangspunkt.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 334.

IV.) $0, 0, 0;\ \frac{\bar{1}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0;\ \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\bar{1}}{2}, 0;\ 0, 0, 1.$ V.) $0, 0, \frac{c}{2};\ 1, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, \bar{1}.$

VI.) $0, 0, \frac{c}{2};\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, 1.$

Achsen, abgesehen von der Zusammengehörigkeit, gleich wie in $\mathfrak{D}_{3h}^3$.

Spiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$.

Alle anderen Symmetrieebenen von $\mathfrak{D}_{3h}^3$ sind Gleitspiegelebenen geworden. $\left(\text{Gleitkomponente } \frac{c}{2}.\right)$

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m_1, n_1, p]\!]$ $[\![m_2, n_2, p]\!]$ $[\![m_3, n_3, p]\!]$ $[\![m_1, n_1, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m_2, n_2, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m_3, n_3, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{m}_1, n_1, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}_2, n_2, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}_3, n_3, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}_1, n_1, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}_2, n_2, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}_3, n_3, \bar{p}]\!]$.

Außerdem zu jedem Wert ein Wert $[\![x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\ 0\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![0\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit $= 4$. Symmetriebeding. $= D_3$.
2. $[\![0\ 0\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\ 0\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{4}]\!]$. Zähligkeit $= 4$. Symmetriebeding. $= C_{3h}$.
3. $[\![\frac{2}{3}\ 0\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{3}\ 0\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{5}{6}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{4}]\!]$ } Zähligkeit jeweilen $= 4$. Symmetrie-
4. $[\![\frac{2}{3}\ 0\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{3}\ 0\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{5}{6}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}]\!]$ } bedingung $= C_{3h}$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Auf den trigonalen Drehungsachsen herrscht 8-Zähligkeit (C_3). Auf den digonalen Drehungsachsen ist die Zähligkeit $= 12$. 12zählig sind auch die auf den Spiegelebenen liegenden Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. 24zählig sind alle übrigen Punktlagen.

Die Raumgruppen mit eigentlicher hexagonaler Achsenschar

Der Decktransformationsbedingung einer Drehung um 60^0 entspricht die Decktransformationsbedingung der Drehung um 120^0, verbunden mit derjenigen einer Drehung um 180^0 mittels der gleichen Achse. Diese von Schoenflies gewählte Darstellung hat den Vorzug, daß außer den drei vertauschbaren Werten m_1, m_2, m_3 usw. keine neuen Größen auftreten, die sich nicht lediglich durch Vorzeichen von den Ausgangswerten unterscheiden. Auch lassen sich in dieser Weise leicht die verschiedenen hexagonalen Schraubenachsen voneinander unterscheiden.

Für eine hexagonale Drehungsachse der c-Richtung würden wir die Decktransformationsbedingungen somit schreiben:

$$0,0,0;\ \tfrac{1}{2},\tfrac{\sqrt{3}}{2},0;\ \tfrac{\sqrt{3}}{2},\tfrac{1}{2},0;\ 0,0,1. \quad - \quad 0,0,0;\ \bar{1},0,0;\ 0,\bar{1},0;\ 0,0,1.$$

Alle Raumgruppen werden wiederum auf ein orthohexagonales Elementarparallelepiped bezogen, so daß die drei ersten Decktransformationsbedingungen gemeinsam lauten:

$$\text{I.)}\ \frac{a}{2},\frac{b}{2},0;\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1. \quad \text{II.)}\ \frac{a}{2},\frac{\bar{b}}{2},0;\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1.$$

$$\text{III.)}\ 0,0,c;\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1.$$

$\mathfrak{C}_6$. Tetartoedrische Klasse (mit hexagonaler Hauptachse) der hexagonalen Abteilung (Hexagonal pyramidale Klasse)

Eine einzige Achsenschar ist vorhanden. Sie ist einer hexagonalen Achse isomorph. Sie läuft der c-Richtung des Elementarparallelepipeds parallel.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_6^1$

Untergruppen $\mathfrak{C}_3$ und $\mathfrak{C}_2$ (hier z. B. $\mathfrak{C}_3^1$ und $\mathfrak{C}_2^1$) lassen sich immer erkennen; sie werden im folgenden jeweilen nicht angeführt. Der Koordinatenanfangspunkt besitzt beliebige Lage auf einer hexagonalen Drehungsachse.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe oben.

$$\text{IV.)}\ 0,0,0;\ \tfrac{1}{2},\tfrac{\sqrt{3}}{2},0;\ \tfrac{\sqrt{3}}{2},\tfrac{1}{2},0;\ 0,0,1. \quad - \quad 0,0,0;\ \bar{1},0,0;\ 0,\bar{1},0;\ 0,0,1.$$

Hexagonale Drehungsachse: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Trigonale Drehungsachsen: $[001]_{\frac{1}{3}0}$ $[001]_{\frac{5}{6}\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{2}{3}0}$ $[001]_{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen:

$$[001]_{\frac{1}{2}0}\ [001]_{0\frac{1}{2}}\ [001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}\ [001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}\ [001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}\ [001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}.$$

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m_1, n_1, p]\!]$ $[\![m_2, n_2, p]\!]$ $[\![m_3, n_3, p]\!]$ $[\![\bar{m}_1, \bar{n}_1, p]\!]$ $[\![\bar{m}_2, \bar{n}_2, p]\!]$ $[\![\bar{m}_3, \bar{n}_3, p]\!]$.

Außerdem gehört zu jedem Wert $[\![x, y, z]\!]$ der Wert $[\![x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2}, z]\!]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Die Zähligkeit ist 2 auf den hexagonalen Drehungsachsen (C_6); sie ist 4 auf den trigonalen und 6 auf den digonalen Drehungsachsen. (C_3 bezw. C_2.)

Alle übrigen Punkte sind mit drei Freiheitsgraden 12zählig. Die Achsenverteilung geht aus Fig. 38 Seite 68 hervor.

Raumgruppen $\mathfrak{C}_6^2$ und $\mathfrak{C}_6^3$

Die Achsenverteilung ist die gleiche wie vorhin. Alle Achsen sind aber Schraubenachsen. Die beiden Gruppen unterscheiden sich durch den Windungssinn der Schrauben.

Die IV.) Decktransformationsbedingungen lauten daher:

$$\left\{\begin{array}{l} 0, 0, \frac{c}{3};\ \frac{\bar{1}}{2}, \frac{\bar{3}}{2}, 0;\ \frac{\bar{3}}{2}, \frac{\bar{1}}{2}, 0;\ 0, 0, 1 \qquad 0, 0, \frac{2c}{3} \ldots . \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{bezw.} \\ 0, 0, \frac{c}{2};\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1 \qquad 0, 0, \frac{c}{2} \ldots . \end{array}\right.$$

Dementsprechend verändern sich die Koordinatenwerte, beispielsweise für $\mathfrak{C}_6^2$:

$[\![m_1, n_1, p]\!]$ $[\![m_2, n_2, p + \frac{1}{3}]\!]$ $[\![m_3, n_3, p + \frac{2}{3}]\!]$

$[\![\bar{m}_1, \bar{n}_1, p + \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}_2, \bar{n}_2, p + \frac{5}{6}]\!]$ $[\![\bar{m}_3, \bar{n}_3, p + \frac{1}{6}]\!]$.

Alle Punktlagen besitzen drei Freiheitsgrade. Sie sind ohne Symmetriebedingung 12zählig, da zu jedem $[\![x, y, z]\!]$ noch ein Wert $[\![x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2}, z]\!]$ gehört.

Raumgruppen $\mathfrak{C}_6^4$ und $\mathfrak{C}_6^5$

Auch für diese Raumgruppen ist die Achsenverteilung mit der von $\mathfrak{C}_6^1$ identisch, die hexagonalen Achsen sind als digonale Achsen Drehungsachsen, als trigonale Achsen Schraubenachsen. Dementsprechend sind alle übrigen trigonalen Achsen Schraubenachsen, alle übrigen digonalen Achsen Drehungsachsen. Die Gruppen unterscheiden sich durch den Windungssinn der trigonalen Achsen voneinander.

Die IV.) Decktransformationsbedingungen lauten demnach:

$$\left\{\begin{array}{l} 0, 0, \frac{c}{3};\ \frac{\bar{1}}{2}, \frac{\bar{3}}{2}, 0;\ \frac{\bar{3}}{2}, \frac{\bar{1}}{2}, 0;\ 0, 0, 1 \qquad 0, 0, \frac{2c}{3};\ \ldots . \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{bezw.} \\ 0, 0, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1 \qquad 0, 0, 0;\ \ldots . \end{array}\right.$$

Die Koordinatenwerte lassen sich nun leicht ableiten, beispielsweise für $\mathfrak{C}_6^5$:

$[\![m_1, n_1, p]\!]$ $[\![m_2, n_2, p + \frac{2}{3}]\!]$ $[\![m_3, n_3, p + \frac{1}{3}]\!]$

$[\![\bar{m}_1, \bar{n}_1, p]\!]$ $[\![\bar{m}_2, \bar{n}_2, p + \frac{2}{3}]\!]$ $[\![\bar{m}_3, \bar{n}_3, p + \frac{1}{3}]\!]$ usw.

Die Punktlagen mit einem Freiheitsgrad liegen auf den digonalen Drehungsachsen. Die Zähligkeit ist 6, die Gitterbildung ist eine verschiedene, je nachdem, ob die betreffende digonale Achse zugleich hexagonale Schraubenachse ist oder nicht.

Alle übrigen Punktlagen sind ohne Symmetriebedingung 12zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_6^6$

Wiederum entspricht die Achsenverteilung der von $\mathfrak{C}_6^1$. Die hexagonalen Achsen sind diesmal als trigonale Achsen Drehungsachsen, als digonale Achsen Schraubenachsen. Infolgedessen sind auch die übrigen digonalen Achsen Schraubenachsen, die trigonalen aber Drehungsachsen.

Die IV.) Decktransformationsbedingung lautet jetzt:

$$0,0,0;\ \tfrac{1}{2},\tfrac{\sqrt{3}}{2},0;\ \tfrac{\sqrt{3}}{2},\tfrac{1}{2},0;\ 0,0\,1. \quad -\quad 0,0,\frac{c}{2};\ \bar{1},0,0;\ 0,\bar{1},0;\ 0,0,1.$$

Die zusammengehörigen Koordinatenwerte sind:

$[\![m_1,n_1,p]\!]$ $[\![m_2,n_2,p]\!]$ $[\![m_3,n_3,p]\!]$ $[\![\bar{m}_1,\bar{n}_1,p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}_2,\bar{n}_2,p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}_3,\bar{n}_3,p+\tfrac{1}{2}]\!]$.

Außerdem ist, wie in allen diesen Gruppen, jedem Wert $[\![x,y,z]\!]$ ein Wert $[\![x+\tfrac{1}{2},y+\tfrac{1}{2},z]\!]$ beigeordnet.

Die Punktlagen mit einem Freiheitsgrad befinden sich auf den trigonalen Drehungsachsen, sie bilden verschiedene Gitter, je nachdem ob die betreffende trigonale Drehungsachse zugleich hexagonale Schraubenachse ist oder nicht.

So bilden einerseits $[\![0,0,p]\!]$ $[\![0,0,p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},p]\!]$ $[\![\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},p+\tfrac{1}{2}]\!]$, anderseits $[\![\tfrac{1}{3},0,p]\!]$ $[\![\tfrac{5}{6},\tfrac{1}{2},p]\!]$ $[\![\tfrac{2}{3},0,p+\tfrac{1}{2}]\!]$ $[\![\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{2},p+\tfrac{1}{2}]\!]$ zusammengehörige Komplexe. Die Zähligkeit ist somit 4, die Symmetriebedingung lautet C_3. Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden 12zählig.

$\mathfrak{C}_{6v}$. Hemimorph-hemiedrische Klasse der hexagonalen Abteilung (Dihexagonal pyramidale Klasse)

In einer zur hexagonalen Achsenrichtung parallelen Schnittlinie schneiden sich $3+3=6$ Symmetrieebenenscharen.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{6v}^1$

Ihre Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_6^1$, $\mathfrak{C}_3^1\,\mathfrak{C}_s^1\,\mathfrak{C}_3^2$, $\mathfrak{C}_3^1\,\mathfrak{C}_s^1\,\mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_3^2\,\mathfrak{C}_s^1\,\mathfrak{C}_s^2$. Der Koordinatenanfangspunkt liegt auf einer hexagonalen Drehungsachse.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 338.

IV.) $0,0,0;\ \tfrac{1}{2},\tfrac{\sqrt{3}}{2},0;\ \tfrac{\sqrt{3}}{2},\tfrac{1}{2}\,0;\ 0,0,1. \quad -\quad 0,0,0;\ \bar{1},0,0;\ 0,\bar{1},0;\ 0,0,1.$

V.) $0,0,0;\ \bar{1},0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1.$

Hexagonale Drehungsachse: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Trigonale Drehungsachse: $[001]_{\frac{1}{3}0}$ $[001]_{\frac{2}{3}0}$ $[001]_{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{5}{6}\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen:

$[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$.

Spiegelebenen:

$(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$; $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ $(310)_0$ $(\bar{3}10)_0$.

Gleitspiegelebenen:

$(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$; $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ $(310)_{\frac{1}{2}}$ $(\bar{3}10)_{\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m_1, n_1, p]\!]$ $[\![m_2, n_2, p]\!]$ $[\![m_3, n_3, p]\!]$ $[\![\bar{m}_1, \bar{n}_1, p]\!]$ $[\![\bar{m}_2, \bar{n}_2, p]\!]$ $[\![\bar{m}_3, \bar{n}_3, p]\!]$

$[\![\bar{m}_1, p_1, n]\!]$ $[\![\bar{m}_2, n_2, p]\!]$ $[\![\bar{m}_3, n_3, p]\!]$ $[\![m_1, \bar{n}_1, p]\!]$ $[\![m_2, \bar{n}_2, p]\!]$ $[\![m_3, \bar{n}_3, p]\!]$.

Außerdem ist jedem Wert $[\![x, y, z]\!]$ ein Wert $[\![x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2}, z]\!]$ zugeordnet. (Abgesehen von der Achsenschar die Figuren 110 und 111 auf Seite 233 gleichzeitig.)

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Auf den hexagonalen Drehungsachsen: Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung = C_{6v}.
2. Auf den trigonalen Drehungsachsen: Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_{3v}.
3. Auf den digonalen Drehungsachsen: Zähligkeit = 6. Symmetriebedingung = C_{2v}.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden bei beliebiger Lage auf den Spiegelebenen sind 12zählig. Alle anderen Punkte sind mit drei Freiheitsgraden 24zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{6v}^2$

Ihre Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_6^1$, $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$. Die Symmetrieelemente besitzen genau gleiche Lage wie in der Gruppe $\mathfrak{C}_{6v}^1$, doch sind alle Symmetrieebenen Gleitspiegelebenen.

Die V.) Decktransformationsbedingung lautet daher verschieden, nämlich:

$$0, 0, \frac{c}{2};\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, 1.$$

Demgemäß lautet die zweite Zeile der Koordinatenwerte:

$[\![\bar{m}_1, n_1, p + \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}_2, n_2, p + \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}_3, n_3, p + \frac{1}{2}]\!]$

$[\![m_1, \bar{n}_1, p + \frac{1}{2}]\!]$ $[\![m_3, \bar{n}_2, p + \frac{1}{2}]\!]$ $[\![m_3, \bar{n}_3, p + \frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad:

1. Auf den hexagonalen Drehungsachsen: Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_6.
2. Auf den trigonalen Drehungsachsen: Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = C_3.

3. Auf den digonalen Drehungsachsen: Zähligkeit = 12. Symmetriebedingung = C_2.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden 24zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{6v}^3$

Die Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_6^6$, $\mathfrak{C}_s^2$ $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$. Der Koordinatenanfangspunkt liege wieder auf einer hexagonalen Achse, die diesmal als Drehungsachse nur trigonal ist.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 338.

IV.) $0,0,0;\ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0;\ \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0;\ 0,0,1. — 0,0,\frac{c}{2};\ \bar{1},0,0;\ 0,\bar{1},0:\ 0,0,1.$

V.) $0,0,0;\ \bar{1},0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1.$

Trigonale Drehungsachsen:

$[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[001]_{\frac{1}{3}0}$ $[001]_{\frac{5}{6}\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{2}{3}0}$ $[001]_{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}$.

Hexagonale Schraubenachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen:

$[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$.

Spiegelebenen: $(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$.

Gleitspiegelebenen: $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(110)_{\frac{1}{2}}$;

$(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ $(310)_0$ $(\bar{3}10)_0$; $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ $(310)_{\frac{1}{2}}$ $(\bar{3}10)_{\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m_1, n_1, p]\!]$ $[\![m_2, n_2, p]\!]$ $[\![m_3, n_3, p]\!]$ $[\![\bar{m}_1, \bar{n}_1, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m_2, \bar{n}_2, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}_3, \bar{n}_3, p+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{m}_1, n_1, p]\!]$ $[\![m_2, n_2, p]\!]$ $[\![\bar{m}_3, n_3, p]\!]$ $[\![m_1, \bar{n}_1, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m_2, \bar{n}_2, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m_3, \bar{n}_3, p+\frac{1}{2}]\!]$.

Außerdem ist jedem Wert $[\![x, y, z]\!]$ ein Wert $[\![x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z]\!]$ zugeordnet.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Auf $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_{3v}.
2. Auf den trigonalen Drehungsachsen. Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = C_3.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden auf den Spiegelebenen (C_s) sind 12zählig; alle übrigen Punkte sind ohne Symmetriebedingung 24zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{6v}^4$

Die Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_6^6$, $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$. Gegenüber $\mathfrak{C}_{6v}^3$ haben lediglich Spiegelebenen und Gleitspiegelebenen ihre Rolle vertauscht. Die Achsenlage ist unverändert gleich, Spiegelebenen sind nun $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ $(310)_0$ $(\bar{3}10)_0$.

Die V.) Decktransformationsbedingung lautet:

$$0, 0, \frac{c}{2}; \quad \bar{1}, 0, 0; \quad 0, 1, 0; \quad 0, 0, 1.$$

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[m_1, n_1, p]$ $[m_2, n_2, p]$ $[m_3, n_3, p]$ $[\bar{m}_1, \bar{n}_1, p+\frac{1}{2}]$ $[\bar{m}_2, \bar{n}_2, p+\frac{1}{2}]$ $[\bar{m}_3, n_3, p+\frac{1}{2}]$
$[\bar{m}_1, n_1, p+\frac{1}{2}]$ $[\bar{m}_2, n_2, p+\frac{1}{2}]$ $[\bar{m}_3, n_3, p+\frac{1}{2}]$ $[m_1, \bar{n}_1, p]$ $[m_2, \bar{n}_2, p]$ $[m_3, \bar{n}_3, p]$.

Ferner zu jedem Wert $[x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z]$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Auf allen Achsen, die trigonale Drehungsachsen sind, ist die Zähligkeit 4, gemäß einer Symmetriebedingung C_{3v}.

Auf den Spiegelebenen sind die Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden 12zählig. Drei Freiheitsgrade sind mit 24-Zähligkeit verbunden.

$\mathfrak{C}_{6h}$. Paramorph-hemiedrische Klasse der hexagonalen Abteilung (Hexagonal-bipyramidale Klasse)

Senkrecht zu der hexagonalen Achsenschar ist eine Symmetrieebenenschar vorhanden. Sie bedingt gleichzeitig eine Schar von Symmetriezentren.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{6h}^1$

Ihre Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_6^1$, $\mathfrak{C}_s^1$. Der Schnittpunkt einer hexgonalen Drehungsachse mit einer Spiegelebene wird zur Nullecke des orthohexagonalen Elementarparallelepipeds.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 338.

IV.) $0, 0, 0; \ \frac{\bar{1}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0; \ \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\bar{1}}{2}, 0; \ 0, 0, 1.$ — $0, 0, 0; \ \bar{1}, 0, 0; \ 0, \bar{1}, 0; \ 0, 0, 1.$

V.) $0, 0, 0; \ 1, 0, 0; \ 0, 1, 0; \ 0, 0, \bar{1}.$

Achsenschar wie in $\mathfrak{C}_6^1$. Spiegelebenen: $(001)_0$; $(001)_{\frac{1}{2}}$.

Symmetriezentren: I. $[0\,0\,0]$ $[\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]$. II. $[0\,0\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]$.

III. $[\frac{1}{2}\,0\,0]$ $[0\,\frac{1}{2}\,0]$ $[\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,0]$ $[\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,0]$ $[\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,0]$ $[\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,0]$.

IV. $[\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]$ $[0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[m_1, n_1, p]$ $[m_2, n_2, p]$ $[m_3, n_3, p]$ $[\bar{m}_1, \bar{n}_1, p]$ $[\bar{m}_2, \bar{n}_2, p]$ $[\bar{m}_3, n_3, p]$
$[m_1, n_1, \bar{p}]$ $[m_2, n_2, \bar{p}]$ $[m_3, n_3, \bar{p}]$ $[\bar{m}_1, \bar{n}_1, \bar{p}]$ $[\bar{m}_2, n_2, \bar{p}]$ $[\bar{m}_3, \bar{n}_3, \bar{p}]$.

Dazu $[x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

1. Symmetriezentren I
2. Symmetriezentren II

} Zähligkeit jeweilen = 2. Symmetriebedingung = C_{6h}.

Gitter von der Form des basiszentrierten Elementarparallelepipeds werden gebildet.

3. $[\![\frac{1}{3}\ 0\ 0]\!]$ $[\![\frac{2}{3}\ 0\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![\frac{5}{6}\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ } Zähligkeit jeweilen = 4. Symmetrie-
4. $[\![\frac{1}{3}\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{2}{3}\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{5}{6}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$ } bedingung = C_{3h}.

5. Symmetriezentren III } Zähligkeit jeweilen = 6. Symmetrie-
6. Symmetriezentren IV } bedingung = C_{2h}.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Auf den hexagonalen Drehungsachsen: Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_6.
2. Auf den trigonalen Drehungsachsen: Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = C_3.
3. Auf den digonalen Drehungsachsen: Zähligkeit = 12. Symmetriebedingung = C_2.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden gehören den Spiegelebenen an und sind 12zählig.

24zählig sind diejenigen Punkte, die keiner Symmetriebedingung genügen müssen.

Raumgruppe $\mathfrak{C}_{6h}^2$

$\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_6^6$, $\mathfrak{C}_s^1$ sind die Scharenuntergruppen. Die Symmetriezentrumslage auf einer hexagonalen Schraubenachse (zugleich trigonale Drehungsachse) wird Nullpunkt.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe S. 338.

IV.) $0, 0, 0;\ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0;\ \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0;\ 0, 0, 1. -\ 0, 0, \frac{c}{2};\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1.$

V.) $0, 0, \frac{c}{2};\ 1, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, 1.$

Die Achsenlage entspricht der von $\mathfrak{C}_6^6$.

Spiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$.

Die Symmetriezentren haben gleiche Lage wie in $\mathfrak{C}_{6h}^1$, doch sind I und II als I′ zusammengehörig, III und IV als II′ ebenfalls.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m_1, n_1, p]\!]$ $[\![m_2, n_2, p]\!]$ $[\![m_3, n_3, p]\!]$ $[\![\bar{m}_1, \bar{n}_1, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}_2, \bar{n}_2, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}_3, \bar{n}_3, p+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![m_1, n_1, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m_2, n_2, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m_3, n_3, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}_1, \bar{n}_1, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}_2, \bar{n}_2, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}_3, \bar{n}_3, \bar{p}]\!]$.

Außerdem ist jedem Wert $[\![x, y, z]\!]$ ein Wert $[\![x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z]\!]$ zugeordnet.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. Symmetriezentren I′. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_{3i}.
2. $[\![0\ 0\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\ 0\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{4}]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = C_{3h}.
3. $[\![\frac{1}{3}\ 0\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{5}{6}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{2}{3}\ 0\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{4}]\!]$ } Zähligkeit jeweilen = 4. Symmetrie-
4. $[\![\frac{1}{3}\ 0\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{5}{6}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{2}{3}\ 0\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}]\!]$ } bedingung = C_{3h}.

5. Symmetriezentren II′. Zähligkeit = 12. Symmetriebedingung = C_i.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Alle Achsen, die trigonale Drehungsachsen sind, beherbergen 8zählige Punktlagen. Die Gitterbildung ist verschieden, je nachdem ob die Drehungsachse zugleich hexagonale Schraubenachse ist oder nicht.

Auf den Spiegelebenen liegen 12zählige Punkte mit zwei Freiheitsgraden. Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden 24zählig.

$\mathfrak{D}_6$. Enantiomorph-hemiedrische Klasse der hexagonalen Abteilung (Hexagonal trapezoedrische Klasse)

Senkrecht zu der hexagonalen Achsenschar stehen 3 + 3 Scharen digonaler Achsen.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_6^1$

Die Untergruppen lauten: $\mathfrak{C}_6^1$, $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$. Der Koordinatenanfangspunkt ist Schnittpunkt der hexagonalen und digonalen Drehungsachsen.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) Siehe Seite 338.

IV.) $0,0,0;\ \frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0;\ \frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0;\ 0,0,1.$ — $0,0,0;\ \bar{1},0,0;\ 0,\bar{1},0;\ 0,0,1.$

V.) $0,0,0;\ \bar{1},0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,\bar{1}.$

Zunächst alle Achsen von $\mathfrak{C}_6^1$. Ferner:

Digonale Drehungsachsen:

$^{00}[010]\ ^{\frac{1}{2}0}[010]\ [110]^{00}\ [1\bar{1}0]^{00};\ ^{0\frac{1}{2}}[010]\ ^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[010]\ [110]^{0\frac{1}{2}}\ [1\bar{1}0]^{0\frac{1}{2}};$

$[100]^{00}\ [100]^{\frac{1}{2}0}\ [130]^{00}\ [1\bar{3}0]^{00};\ [100]^{0\frac{1}{2}}\ [100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\ [130]^{0\frac{1}{2}}\ [1\bar{3}0]^{0\frac{1}{2}}.$

Digonale Schraubenachsen:

$^{\frac{1}{4}0}[010]\ ^{\frac{3}{4}0}[010]\ [110]^{\frac{1}{2}0}\ [1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}0};\ ^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}[010]\ ^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}[010]\ [110]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\ [1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}};$

$[100]^{\frac{1}{4}0}\ [100]^{\frac{3}{4}0}\ [130]^{\frac{1}{2}0}\ [1\bar{3}0]^{\frac{1}{2}0};\ [100]^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}\ [100]^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}\ [130]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\ [1\bar{3}0]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}.$

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m_1, n_1, p]\!]\ [\![m_2, n_2, p]\!]\ [\![m_3, n_3, p]\!]\ [\![m_1, \bar{n}_1, p]\!]\ [\![m_2, \bar{n}_2, p]\!]\ [\![m_3, \bar{n}_3, p]\!]$

$[\![\bar{m}_1, n_1, \bar{p}]\!]\ [\![\bar{m}_2, n_2, \bar{p}]\!]\ [\![\bar{m}_3, n_3, \bar{p}]\!]\ [\![m_1, \bar{n}_1, \bar{p}]\!]\ [\![m_2, \bar{n}_2, \bar{p}]\!]\ [\![m_3, \bar{n}_3, \bar{p}]\!].$

Außerdem gehört zu jedem Wert $[\![x, y, z]\!]$ ein Wert $[\![x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]\ [\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$
2. $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]\ [\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$

} Zähligkeit jeweilen = 2. Symmetriebedingung = D_6.

Gitter von der Form des basisflächenzentrierten orthohexagonalen Elementarparallelepipeds werden gebildet.

3. $[\![\frac{1}{3}\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{2}{3}\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $]\![\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ } Zähligkeit jeweilen = 4. Symmetrie-
4. $[\![\frac{1}{3}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{2}{3}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ } bedingung = D_3.
5. $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ } Zähligkeit jeweilen = 6.
6. $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ } Symmetriebedingung = V.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Auf den hexagonalen Drehungsachsen sind sie 4-, auf den trigonalen 8-, auf den digonalen 12zählig. (Symmetriebedingung C_6, C_3, C_2.)

Alle übrigen Punkte sind mit drei Freiheitsgraden 24zählig.

Raumgruppen $\mathfrak{D}_6^2$ und $\mathfrak{D}_6^3$

Ihre Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_6^2$, $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$, beziehungsweise $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_6^3$, $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$. Die Achsen der hexagonalen Schar zeigen die Verteilung $\mathfrak{C}_6^2$ beziehungsweise $\mathfrak{C}_6^3$. Die hexagonalen Achsen sind Schraubenachsen. Sie besitzen in den beiden Gruppen verschiedenen Windungssinn.

Für $\mathfrak{D}_6^2$ sind die horizontal liegenden digonalen Drehungsachsen folgendermaßen zu bezeichnen:

$^{00}[010]$ $^{\frac{1}{2}\,0}[010]$ $[110]^{0\,\frac{1}{6}}$ $[1\bar{1}0]^{0\,\frac{2}{6}}$ $^{0\,\frac{3}{6}}[010]$ $^{\frac{1}{2}\,\frac{3}{6}}[010]$ $^{0\,\frac{4}{6}}[110]$ $^{0\,\frac{5}{6}}[1\bar{1}0]$;

$[100]^{0\,\frac{3}{1\,2}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\,\frac{3}{1\,2}}$ $[1\bar{3}0]^{0\,\frac{5}{1\,2}}$ $[130]^{0\,\frac{7}{1\,2}}$ $[100]^{0\,\frac{9}{1\,2}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\,\frac{9}{1\,2}}$ $[1\bar{3}0]^{0\,\frac{1\,1}{1\,2}}$ $[130]^{0\,\frac{1}{1\,2}}$.

Dazu kommen die entsprechenden Schraubenachsen, die Gruppen $\mathfrak{C}_2^3$ mit den Drehungsachsen bilden.

Für $\mathfrak{D}_6^3$ ist lediglich die Reihenfolge der Achsen in bezug auf ihre Höhenlage, dem Windungssinn entsprechend, eine umgekehrte.

Zusammengehörige Koordinatenwerte für $\mathfrak{D}_6^2$:

$[\![m_1,\ n_1,\ p]\!]$ $[\![m_2,\ n_2,\ p+\frac{1}{3}]\!]$ $[\![m_3,\ n_3,\ p+\frac{2}{3}]\!]$

$[\![\bar{m}_1,\ \bar{n}_1,\ p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}_2,\ n_2,\ p+\frac{5}{6}]\!]$ $[\![m_3,\ n_3,\ p+\frac{1}{6}]\!]$

$[\![\bar{m}_1,\ n_1,\ \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}_2,\ n_2,\ \bar{p}+\frac{2}{3}]\!]$ $[\![\bar{m}_3,\ n_3,\ \bar{p}+\frac{1}{3}]\!]$

$[\![m_1,\ \bar{n}_1,\ \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m_2,\ \bar{n}_2,\ \bar{p}+\frac{1}{6}]\!]$ $[\![m_3,\ \bar{n}_3,\ \bar{p}+\frac{5}{6}]\!]$.

Dazu $[\![x+\frac{1}{2},\ x+\frac{1}{2},\ z]\!]$ auf jeden Wert bezüglich.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 338.

IV.) $0,\ 0,\ \frac{c}{3}$; $\bar{\frac{1}{2}},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0$; $\frac{\sqrt{3}}{2},\ \bar{\frac{1}{2}},\ 0$; $0,\ 0,\ 1$. — $0,\ 0,\ \frac{c}{2}$; $\bar{1},\ 0,\ 0$; $0,\ \bar{1},\ 0$; $0,\ 0,\ 1$.

III.) $0,\ 0,\ 0$; $\bar{1},\ 0,\ 0$; $0,\ 1,\ 0$; $0,\ 0,\ \bar{1}$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad liegen auf den digonalen Drehungsachsen. Sie sind 12zählig.

Alle anderen Punkte sind mit drei Freiheitsgraden 24zählig.

Raumgruppen $\mathfrak{D}_6^4$ und $\mathfrak{D}_6^5$

Ihre Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_6^4$, $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$ beziehungsweise $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_6^5$, $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$. Die hexagonalen Achsen sind digonale Drehungsachsen aber trigonale Schraubenachsen. Nach ihrem Windungssinn werden die beiden enantiomorphen Gruppen unterschieden. Die Lage der Achsen der hexagonalen Schar entspricht der von $\mathfrak{C}_6^4$ bezw. $\mathfrak{C}_6^5$.

Die horizontalen Drehungsachsen folgen für $\mathfrak{D}_6^4$ folgendermaßen aufeinander:

Digonale Drehungsachsen:

$^{00}[010]\ ^{\frac{1}{2}0}[010]\ [110]^{0\frac{1}{3}}\ [1\bar{1}0]^{0\frac{2}{3}};\ ^{0\frac{1}{2}}[010]\ ^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[010]\ [110]^{0\frac{5}{6}}\ [1\bar{1}0]^{0\frac{1}{6}};$

$[100]^{00}\ [100]^{\frac{1}{2}0}\ [1\bar{3}0]^{0\frac{1}{3}}\ [130]^{0\frac{2}{3}}.\ [100]^{0\frac{1}{2}}\ [100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\ [1\bar{3}0]^{0\frac{5}{6}}\ [130]^{0\frac{1}{6}}.$

Die dazugehörigen Schraubenachsen ergeben sich leicht.

Zu den Decktransformationsbedingungen von $\mathfrak{C}_6^4$ bezw. $\mathfrak{C}_6^5$ kommen noch die von V.) der vorhergehenden Gruppe.

Zusammengehörige Koordinatenwerte für $\mathfrak{D}_6^5$:

$[\![m_1, n_1, p]\!]\ [\![m_2, n_2, p+\tfrac{2}{3}]\!]\ [\![m_3, n_3, p+\tfrac{1}{3}]\!]\ [\![\bar{m}_1, \bar{n}_1, p]\!]\ [\![\bar{m}_2, \bar{n}_2, p+\tfrac{1}{3}]\!]\ [\![\bar{m}_3, \bar{n}_3, p+\tfrac{2}{3}]\!]$

$[\![\bar{m}_1, n_1, \bar{p}]\!]\ [\![\bar{m}_2, n_2, \bar{p}+\tfrac{1}{3}]\!]\ [\![\bar{m}_3, n_3, \bar{p}+\tfrac{2}{3}]\!]\ [\![m_1, \bar{n}_1, \bar{p}]\!]\ [\![m_2, \bar{n}_2, \bar{p}+\tfrac{2}{3}]\!]\ [\![m_3, \bar{n}_3, \bar{p}+\tfrac{1}{3}]\!].$

Ferner zu jedem Wert $[\![x, y, z]\!]$ ein Wert $[\![x+\tfrac{1}{2}, y+\tfrac{1}{2}, z]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad (für $\mathfrak{D}_6^5$):

1. $[\![0\,0\,0]\!]\ [\![0\,0\,\tfrac{1}{3}]\!]\ [\![0\,0\,\tfrac{2}{3}]\!]\ [\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,0]\!]\ [\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{3}]\!]\ [\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{2}{3}]\!]$ } Zähligkeit jeweilen = 6.
2. $[\![0\,0\,\tfrac{1}{2}]\!]\ [\![0\,0\,\tfrac{5}{6}]\!]\ [\![0\,0\,\tfrac{1}{6}]\!]\ [\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}]\!]\ [\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{5}{6}]\!]\ [\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{6}]\!]$ } Symmetriebedingung = V.
3. $[\![\tfrac{1}{2}\,0\,0]\!]\ [\![0\,\tfrac{1}{2}\,0]\!]\ [\![\tfrac{1}{4}\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{2}{3}]\!]\ [\![\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{2}{3}]\!]\ [\![\tfrac{3}{4}\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{3}]\!]\ [\![\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{3}]\!]$ } Zähligkeit jeweilen = 6.
4. $[\![\tfrac{1}{2}\,0\,\tfrac{1}{2}]\!]\ [\![0\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}]\!]\ [\![\tfrac{1}{4}\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{6}]\!]\ [\![\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{6}]\!]\ [\![\tfrac{3}{4}\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{5}{6}]\!]\ [\![\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{5}{6}]\!]$ } Symmetriebedingung = V.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Auf allen Achsen, die digonale Drehungsachsen sind, ist die Zähligkeit bei beliebiger Lage = 12, die Symmetriebedingung lediglich C_2.

Punktlagen mit drei Freiheitsgraden sind 24zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_6^6$

Ihre Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_6^6$, $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$. Koordinatenanfangspunkt ist der Schnittpunkt einer hexagonalen Schraubenachse (trigonalen Drehungsachse) mit drei digonalen Drehungsachsen.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 338.

IV.) $0, 0, 0;\ \bar{\tfrac{1}{2}}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}, 0;\ \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \bar{\tfrac{1}{2}}, 0;\ 0, 0, 1. - 0, 0, \frac{c}{2};\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1.$

V.) $0, 0, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, \bar{1}.$

Zunächst ist die Achsenschar von $\mathfrak{C}_6^6$ in unveränderter Lage vorhanden. Ferner:

Digonale Drehungsachsen:

$^{00}[010]$ $^{\frac{1}{2}\,0}[010]$ $[110]^{00}$ $[1\bar{1}0]^{00}$ $^{0\,\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}[010]$ $[110]^{0\,\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}0]^{0\,\frac{1}{2}}$;
$[100]^{0\,\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}}$ $[1\bar{3}0]^{0\,\frac{1}{4}}$ $[130]^{0\,\frac{1}{4}}$ $[100]^{0\,\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}}$ $[1\bar{3}0]^{0\,\frac{3}{4}}$ $[130]^{0\,\frac{3}{4}}$.

Dazu kommen die entsprechenden Schraubenachsen.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m_1, n_1, p]\!]$ $[\![m_2, n_2, p]\!]$ $[\![m_3, n_3, p]\!]$ $[\![\bar{m}_1, \bar{n}_1, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}_2, \bar{n}_2, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}_3, \bar{n}_3, p+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{m}_1, n_1, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}_2, n_2, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}_3, n_3, \bar{p}]\!]$ $[\![m_1, \bar{n}_1, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m_2, \bar{n}_2, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m_3, \bar{n}_3, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$.

Sowie zu jedem Wert $[\![x, y, z]\!]$ ein Wert $[\![x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$. Zähligkeit $= 4$. Symmetriebeding. $= D_3$.
   Die Punkte bilden Gitter von der Form des basiszentrierten Elementarparallelepipeds mit halber Höhe.
2. $[\![0\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$. Zähligkeit $= 4$. Symmetriebeding. $= D_3$.
   Gleiche Gitterbildung ist vorhanden wie für 1.
3. $[\![\frac{1}{3}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{2}{3}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$
4. $[\![\frac{1}{3}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{2}{3}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$

   Zähligkeit jeweilen $= 4$. Symmetriebedingung $= D_3$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Auf den trigonalen Drehungsachsen (und hexagonalen Schraubenachsen) sind die beliebigen Punktlagen 8zählig, gemäß der Symmetriebedingung C_3.
2. Den digonalen Drehungsachsen gehören 12zählige Punktlagen an. (C_2).

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden 24zählig.

$\mathfrak{D}_{6h}$. Holoedrische Klasse der hexagonalen Abteilung (Dihexagonale bipyramidale Klasse)

Jedes hierhergehörige Raumsystem enthält als Untergruppen Gruppen aus allen Klassen des rhomboedrischen und hexagonalen Kristallsystems. Zur Charakterisierung der Symmetrieelemente genügt die Angabe einer hexagonalen Achsenschar, verbunden mit je einer darauf senkrecht stehenden und einer parallelliegenden Symmetrieebenenschar. Fünf weitere Symmetrieebenenscharen, sechs digonale Achsenscharen und eine Symmetriezentrumsschar werden durch diese Kombination ohne weiteres bedingt. Das Elementarparallelepiped besitzt orthohexagonalen Habitus, die drei ersten Decktransformationsbedingungen sind auf Seite 338 hingeschrieben worden.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{6h}^1$

Ihre Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_6^1$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^2$ $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$. Ferner lassen sich unter anderem erkennen: $\mathfrak{C}_6^1$, $\mathfrak{C}_{6h}^1$, $\mathfrak{C}_{6v}^1$, $\mathfrak{D}_6^1$, $\mathfrak{C}_3^1$, $\mathfrak{C}_{3i}^1$, $\mathfrak{C}_{3v}^1$, $\mathfrak{C}_{3v}^2$, $\mathfrak{D}_3^1$ $\mathfrak{D}_3^2$, $\mathfrak{D}_{3d}^1$, $\mathfrak{D}_{3d}^3$, $\mathfrak{C}_{3h}^1$, $\mathfrak{D}_{3h}^1$, $\mathfrak{D}_{3h}^3$. Ein auf einer hexagonalen Drehungsachse liegendes Symmetriezentrum wird Koordinatenanfangspunkt.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 338.

IV.) $0,0,0;\ \frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0;\ \frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}0;\ 0,0,1.$ — $0,0,0;\ \bar{1},0,0;\ 0,\bar{1},0;\ 0,0,1.$

V.) $0,0,0;\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,\bar{1}.$ VI.) $0,0,0;\ \bar{1},0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1.$

Symmetriezentren: I. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$. II. $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$.
III. $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$.
IV. $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$.

Hexagonale Drehungsachsen: $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Trigonale Drehungsachsen: $[001]_{\frac{1}{3}0}$ $[001]_{\frac{5}{6}\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{2}{3}0}$ $[001]_{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen:
$[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$.

Spiegelebenen: $(001)_0$; $(001)_{\frac{1}{2}}$. $(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$;
$(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ $(310)_0$ $(\bar{3}10)_0$.

Gleitspiegelebenen:
$(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$; $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ $(310)_{\frac{1}{2}}$ $(\bar{3}10)_{\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen:
$^{00}[010]$ $^{\frac{1}{2}0}[010]$ $[110]^{00}$ $[1\bar{1}0]^{00}$; $[100]^{00}$ $[100]^{\frac{1}{2}0}$ $[130]^{00}$ $[1\bar{3}0]^{00}$;
$^{0\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[010]$ $[110]^{0\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}0]^{0\frac{1}{2}}$; $[100]^{0\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[130]^{0\frac{1}{2}}$ $[1\bar{3}0]^{0\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen:
$^{\frac{1}{4}0}[010]$ $^{\frac{3}{4}0}[010]$ $[110]^{\frac{1}{2}0}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}0}$; $[100]^{\frac{1}{4}0}$ $[100]^{\frac{3}{4}0}$ $[130]^{\frac{1}{2}0}$ $[1\bar{3}0]^{\frac{1}{2}0}$;
$^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}[010]$ $[110]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $[100]^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}$ $[130]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[1\bar{3}0]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m_1, n_1, p]\!]$ $[\![m_2, n_2, p]\!]$ $[\![m_3, n_3, p]\!]$ $[\![\bar{m}_1, \bar{n}_1, p]\!]$ $[\![\bar{m}_2, \bar{n}_2, p]\!]$ $[\![\bar{m}_3, \bar{n}_3, p]\!]$
$[\![\bar{m}_1, n_1, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}_2, n_2, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}_3, n_3, \bar{p}]\!]$ $[\![m_1, \bar{n}_1, \bar{p}]\!]$ $[\![m_2, \bar{n}_2, \bar{p}]\!]$ $[\![m_3, \bar{n}_3, \bar{p}]\!]$
$[\![m_1, n_1, \bar{p}]\!]$ $[\![m_2, n_2, \bar{p}]\!]$ $[\![m_3, n_3, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}_1, \bar{n}_1, p]\!]$ $[\![\bar{m}_2, \bar{n}_2, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}_3, \bar{n}_3, \bar{p}]\!]$
$[\![\bar{m}_1, n_1, p]\!]$ $[\![\bar{m}_2, n_2, p]\!]$ $[\![\bar{m}_3, n_3, p]\!]$ $[\![m_1, \bar{n}_1, p]\!]$ $[\![m_2, \bar{n}_2, p]\!]$ $[\![m_3, \bar{n}_3, p]\!]$.

Zu jedem Wert $[\![x, y, z]\!]$ gehört außerdem ein Wert $[\![x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. Symmetriezentren I. } Zähligkeit jeweilen = 4. Symmetrie-
2. Symmetriezentren II. } bedingung = D_{6h}.

Gitter von der Form des basisflächenzentrierten Elementarparallelepipeds werden gebildet.

3. $[\![\frac{1}{3}\ 0\ 0]\!]$ $[\![\frac{5}{6}\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![\frac{2}{3}\ 0\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ } Zähligkeit jeweilen = 4. Symmetrie-
4. $[\![\frac{1}{3}\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{5}{6}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{2}{3}\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$ } bedingung = D_{3h}.
5. Symmetriezentren III. } Zähligkeit jeweilen = 6. Symmetrie-
6. Symmetriezentren IV. } bedingung = V_h.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Auf den hexagonalen Drehungsachsen: Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_{6v}.
2. Auf den trigonalen Drehungsachsen: Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = C_{3v}.
3. Auf den digonalen Drehungsachsen: Zähligkeit = 12. Symmetriebedingung = C_{2v}.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Die den Spiegelebenen allein angehörigen (C_s) sind 24zählig.

Die Punktlagen mit drei Freiheitsgraden sind ohne Symmetriebedingung 48zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{6h}^2$

Ihre Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_6^1$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$. Von hexagonalem oder rhomboedrischem Charakter sind: $\mathfrak{C}_6^1$, $\mathfrak{C}_{6h}^1$, $\mathfrak{C}_{6v}^2$, $\mathfrak{D}_6^1$, $\mathfrak{C}_3^1$, $\mathfrak{C}_{3i}^1$, $\mathfrak{C}_{3v}^3$, $\mathfrak{C}_{3v}^4$, $\mathfrak{D}_3^1$ $\mathfrak{D}_3^2$, $\mathfrak{D}_{3d}^2$, $\mathfrak{D}_{3d}^4$, $\mathfrak{C}_{3h}^1$, $\mathfrak{D}_{3h}^2$ $\mathfrak{D}_{3h}^4$.

I.)—IV.) Decktransformationsbedingung wie in $\mathfrak{D}_{6h}^1$.

V.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $1, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, \bar{1}$. VI.) $0, 0, \frac{c}{2}$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, 1$.

Die Achsen besitzen (abgesehen von der Zusammengehörigkeit) genau gleiche Lage wie in $\mathfrak{D}_{6h}^1$.

Symmetriezentren: I. $[\![0\ 0\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\ 0\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{4}]\!]$.

II. $[\![\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$.

Spiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$.

Ferner sind die übrigen Spiegelebenen von $\mathfrak{D}_{6h}^1$ bei gleicher Lage Gleitspiegelebenen.

Zusammengehörige Koordinatenwerte: Die ersten Werte von $\mathfrak{D}_{6h}^1$ unverändert, die zweiten 12 Werte besitzen statt p oder $\bar{p}$ die Werte $p+\frac{1}{2}$, $\bar{p}+\frac{1}{2}$. Dazu kommen die Zusatztranslationen $\frac{1}{2}$ für m, n.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

1. $[0\,0\,0]$ $[\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]$ $[0\,0\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = D_6.
2. Symmetriezentren I. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_{6h}.
3. $[\frac{1}{3}\,0\,0]$ $[\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,0]$ $[\frac{2}{3}\,0\,0]$ $[\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,0]$ $[\frac{1}{3}\,0\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{2}{3}\,0\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]$. Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = D_3.
4. $[\frac{1}{3}\,0\,\frac{1}{4}]$ $[\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]$ $[\frac{2}{3}\,0\,\frac{1}{4}]$ $[\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]$ $[\frac{1}{3}\,0\,\frac{3}{4}]$ $[\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]$ $[\frac{2}{3}\,0\,\frac{3}{4}]$ $[\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]$. Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = C_{3h}.
5. $[0\,\frac{1}{2}\,0]$ $[\frac{1}{2}\,0\,0]$ $[\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,0]$ $[\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,0]$ $[\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,0]$ $[\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,0]$ $[0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]$. Die Zähligkeit ist 12, die Symmetriebeding. = V.
6. Symmetriezentren II. Zähligkeit = 12. Symmetriebedingung = C_{2h}.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Auf den hexagonalen Drehungsachsen. Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = C_6.
2. Auf den trigonalen Drehungsachsen. Zähligkeit = 16. Symmetriebedingung = C_3.
3. Auf den digonalen Drehungsachsen. Zähligkeit = 24. Symmetriebedingung = C_2.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Es sind das Punkte der allgemeinen Symbole $[m, n, \frac{1}{4}]$ bezw. $[m, n, \frac{3}{4}]$. Die Zähligkeit ist 24, die Symmetriebedingung = C_s.

Mit drei Freiheitsgraden sind die übrigen Punkte 48zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{6h}^3$

Ihre Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_6^6$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$. Von hexagonalem und trigonal rhomboedrischem Charakter sind: $\mathfrak{C}_6^6$, $\mathfrak{C}_{6h}^2$, $\mathfrak{C}_{6v}^3$, $\mathfrak{D}_6^6$, $\mathfrak{C}_3^1$, $\mathfrak{C}_{3i}^1$, $\mathfrak{C}_{3v}^2$ $\mathfrak{C}_{3v}^3$, $\mathfrak{D}_3^1$ $\mathfrak{D}_3^2$, $\mathfrak{D}_{3d}^1$ $\mathfrak{D}_{3d}^4$, $\mathfrak{C}_{3h}^1$, $\mathfrak{D}_{3h}^2$ $\mathfrak{D}_{3h}^3$. Der Koordinatenanfangspunkt ist Schnittpunkt einer hexagonalen Schraubenachse (trigonalen Drehungsachse) mit digonalen Drehungsachsen, von denen die eine die Richtung (010) besitzt.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 338.

IV.) $0, 0, 0;\ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0;\ \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0;\ 0, 0, 1.$ — $0, 0, \frac{c}{2};\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, 1.$

V.) $0, 0, 0;\ 1, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, \bar{1}.$ VI.) $0, 0, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, 1.$

Symmetriezentren: I. $[0\,0\,\frac{1}{4}]$ $[0\,0\,\frac{3}{4}]$ $[\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]$ $[\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]$.

II.) Die zwölf Symmetriezentren unter II von $\mathfrak{D}_{6h}^2$.

Hexagonale Schraubenachsen (trigonale Drehungsachsen): $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Trigonale Drehungsachsen: $[001]_{\frac{1}{3}0}$ $[001]_{\frac{2}{3}0}$ $[001]_{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{5}{6}\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen:

$[001]_{0\,\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\,0}$ $[001]_{\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}}$.

Spiegelebenen: $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$ $(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ $(11\bar{0})_0$ $(1\bar{1}0)_0$.

Gleitspiegelebenen: $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$
$(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ $(31\bar{0})_0$ $(\bar{3}10)_0$. $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ $(310)_{\frac{1}{2}}$ $(\bar{3}10)_{\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen:

$^{00}[010]$ $^{\frac{1}{2}\,0}[010]$ $[110]^{00}$ $[1\bar{1}0]^{00}$ $^{0\,\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}[010]$ $[110]^{0\,\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}0]^{0\,\frac{1}{2}}$
$[100]^{0\,\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}}$ $[1\bar{3}0]^{0\,\frac{3}{4}}$ $[130]^{0\,\frac{1}{4}}$ $[100]^{0\,\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}}$ $[1\bar{3}0]^{0\,\frac{3}{4}}$ $[130]^{0\,\frac{3}{4}}$.

Ferner die zugehörigen digonalen Schraubenachsen.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m_1, n_1, p]\!]$ $[\![m_2, n_2, p]\!]$ $[\![m_3, n_3, p]\!]$ $[\![\bar{m}_1, \bar{n}_1, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}_2, \bar{n}_2, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}_3, \bar{n}_3, p+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![m_1, n_1, \bar{p}]\!]$ $[\![m_2, n_2, \bar{p}]\!]$ $[\![m_3, n_3, \bar{p}]\!]$ $[\![m_1, n_1, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m_2, n_2, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m_3, n_3, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![m_1, n_1, \bar{p}]\!]$ $[\![m_2, n_2, \bar{p}]\!]$ $[\![m_3, n_3, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}_1, \bar{n}_1, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}_2, \bar{n}_2, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}_3, \bar{n}_3, p+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{m}_1, n_1, p]\!]$ $[\![\bar{m}_2, n_2, p]\!]$ $[\![\bar{m}_3, n_3, p]\!]$ $[\![m_1, \bar{n}_1, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m_2, \bar{n}_2, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m_3, \bar{n}_3, p+\frac{1}{2}]\!]$.

Außerdem zu jedem Wert $[\![x, y, z]\!]$ ein Wert $[\![x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = D_{3h}.
2. Symmetriezentren I. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = D_{3d}.
3. $[\![\frac{1}{3}\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{2}{3}\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{3}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{2}{3}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = C_{3h}.
4. $[\![\frac{1}{3}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{2}{3}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{3}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{2}{3}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$. Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = D_3.
5. Symmetriezentren II. Zähligkeit = 12. Symmetriebedingung = C_{2h}.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Auf den hexagonalen Schraubenachsen (= trigonalen Drehungsachsen) ist die Zähligkeit = 8, gemäß einer Symmetriebedingung C_{3v}.
2. Auf den übrigen trigonalen Drehungsachsen herrscht bei beliebiger Lage 16-Zähligkeit. (Symmetriebedingung C_3.)
3. Auf den in 0 und $\frac{1}{2}$ Höhe befindlichen digonalen Drehungsachsen sind die Punkte 12zählig. Sie müssen der Symmetriebedingung C_{2v} genügen.
4. Auf den übrigen digonalen Drehungsachsen herrscht 24-Zähligkeit. Bedingende Symmetrie ist C_2.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Sie gehören den Spiegelebenen an und sind 24zählig.

48zählig sind die übrigen Punktlagen mit drei Freiheitsgraden.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_{6h}^4$

Ihre Untergruppen sind: $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_6^6$, $\mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$. Von hexagonalem beziehungsweise trigonal-rhomboedrischem Charakter sind: $\mathfrak{C}_6^6$, $\mathfrak{C}_{6v}^4$, $\mathfrak{D}_6^6$, $\mathfrak{C}_{6h}^2$, $\mathfrak{C}_3^1$, $\mathfrak{C}_{3i}^1$, $\mathfrak{C}_{3v}^1$ $\mathfrak{C}_{3v}^4$, $\mathfrak{D}_3^1$ $\mathfrak{D}_3^2$, $\mathfrak{D}_{3d}^2$ $\mathfrak{D}_{3d}^3$, $\mathfrak{C}_{3h}^1$, $\mathfrak{D}_{3h}^1$ $\mathfrak{D}_{3h}^4$. Der Koordinatenanfangspunkt hat hinsichtlich der Achsen gleiche Lage wie in $\mathfrak{D}_{6h}^3$.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.)—III.) siehe Seite 338.

IV.) $0, 0, 0;\ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0;\ \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0;\ 0, 0, 1.$ — $0, 0, \frac{c}{2};\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, \bar{1}, 0;\ 0, 0, 1.$

V.) $0, 0, \frac{c}{2};\ 1, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, \bar{1}.$ VI.) $0, 0, \frac{c}{2};\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, 1.$

Die Achsen besitzen genau gleiche Lage wie in $\mathfrak{D}_{6h}^3$.

Symmetriezentren: I. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$.

II. $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$.

Spiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$; $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ $(310)_0$ $(\bar{3}10)_0$.

Die übrigen Symmetrieebenen sind bei unveränderter Lage Gleitspiegelebenen.

Zusammengehörige Koordinatenwerte: Die ersten 12 Werte entsprechen denen von $\mathfrak{D}_{6h}^3$, in den zweiten 12 Werten sind p und $p+\frac{1}{2}$ bezw. $\bar{p}$ und $\bar{p}+\frac{1}{2}$ vertauscht. Die Zusatzwerte $[\![x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z]\!]$ kommen auch hier vor.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = D_{3d}.
2. $[\![0\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = D_{3h}.
3. $[\![\frac{1}{3}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{2}{3}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = D_{3h}.
4. $[\![\frac{2}{3}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{3}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$. Zähligkeit = 4. Symmetriebeding. = D_{3h}.
5. Symmetriezentren II. Zähligkeit = 12. Symmetriebedingung = C_{2h}.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Auf allen trigonalen Drehungsachsen (inklusive hexagonalen Schraubenachsen) müssen die beliebigen Punkte der Symmetriebedingung C_{3v} genügen. Sie sind infolgedessen 8zählig.
2. Die in $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ Höhe befindlichen digonalen Drehungsachsen sind Schnittlinien zweier Spiegelebenen. Die Zähligkeit einer Punktlage ist daher 12, die Symmetriebedingung C_{2v}.
3. Auf den übrigen digonalen Drehungsachsen stellt sich 24Zähligkeit ein. (C_2.)

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Sie gehören den Spiegelebenen (C_s) an und sind 24zählig.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden 48zählig.

Kubische Abteilung

Das Elementarparallelepiped der kubischen Abteilung ist ein Würfel. Wenn er vierfachprimitiv, das heißt allseitig flächenzentriert, ist, so kann ein Punkt bis 192-zählig sein. Um die Darstellung zu vereinfachen, werden die von Zusatztranslationen freien Koordinatentripel gleichwertiger Punkte einer Klasse an den Anfang gesetzt und, wenn möglich, die Zusatztranslationen in allgemeinster Weise darauf bezogen. Auch werden eingehend nur mehr die Lagen der Drehungsachsen, Spiegelebenen, Drehspiegelachsen und Drehspiegelebenen (inkl. Symmetriezentren) erörtert. Wenn man die gleichgebauten tetragonalen, trigonalen oder rhombischen Untergruppen aufsucht, so findet man ohne weiteres die genauen Lagebeziehungen der zugehörigen Schraubenachsen und Gleitspiegelebenen.

$\mathfrak{T}$. Tetartoedrische Klasse der kubischen Abteilung (Tetraedrisch-pentagondodekaedrische Klasse)

Drei senkrecht aufeinander stehende Scharen gleichwertiger, digonaler Achsen bedingen vier gleichwertige Scharen polarer trigonaler Achsen. Die Winkel, welche die Achsen miteinander bilden, entsprechen den Winkeln der Kanten eines Würfels mit den vier Körperdiagonalen. Die gegenseitigen Richtungen der Achsen sind durch die Fig. 27 auf Seite 53 veranschaulicht. Den Körperdiagonalen gehen die trigonalen, den Würfelkanten die digonalen Achsen parallel.

Die von Zusatztranslationen freien Koordinatentripel der Tetardoedrie lauten:

(I). $[\![m\ n\ p]\!]$ $[\![m\ \bar{n}\ \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}\ n\ \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}\ \bar{n}\ p]\!]$
$[\![p\ m\ n]\!]$ $[\![\bar{p}\ m\ \bar{n}]\!]$ $[\![\bar{p}\ \bar{m}\ n]\!]$ $[\![p\ \bar{m}\ \bar{n}]\!]$
$[\![n\ p\ m]\!]$ $[\![\bar{n}\ \bar{p}\ m]\!]$ $[\![n\ \bar{p}\ \bar{m}]\!]$ $[\![\bar{n}\ p\ \bar{m}]\!]$.

Der erste Index bezieht sich immer auf die X-, der zweite auf die Y-, der dritte auf die Z-Achse. Der Vertauschung der Zahlenwerte m n p entspricht eine Vertauschbarkeit (Gleichwertigkeit) der Koordinatenachsen.

Raumgruppe $\mathfrak{T}^1$ (Fig. 158)

Die Scharenuntergruppen sind: $\mathfrak{C}_2^1$ $\mathfrak{C}_2^1$ $\mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_3^4$ $\mathfrak{C}_3^4$ $\mathfrak{C}_3^4$ $\mathfrak{C}_3^4$. In rhombischer Beziehung bilden die drei $\mathfrak{C}_2$ eine Untergruppe $\mathfrak{B}^1$. $\mathfrak{C}_2^2$ und $\mathfrak{C}_3^4$ im Winkel von 54° 44′ 8″ sind charakteristische Untergruppen.

Der Koordinatenanfangspunkt liegt im Schnittpunkt dreier digonaler Drehungsachsen. (Siehe Fig. 158.)

Einfachste Decktransformationsbedingungen: (Der Größe nach a = b = c).

I.) a, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) 0, a, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.
III.) 0, 0, a; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.
IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1; 1, 0, 0. V.) 0, 0, 0; 1, 0, 0; 0, $\bar{1}$, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

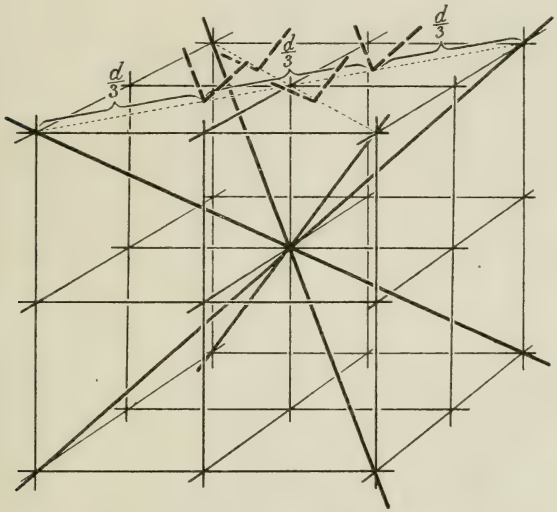


Fig. 158. $\mathfrak{T}^1$ Achsen im Elementarwürfel.
Die trigonalen Schraubenachsen sind nur auf der $(001)_1$-Fläche einstechend gezeichnet.
(Perspektivische Darstellung.)

Digonale Drehungsachsen:

$[100]^{00}$ $^{00}[010]$ $[001]_{00}$; $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[010]$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$;

$[100]^{\frac{1}{2}0}$ $^{0\frac{1}{2}}[010]$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$; $[100]^{0\frac{1}{2}}$ $^{\frac{1}{2}0}[010]$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Trigonale Drehungsachsen: $[111]^{00}$ $[1\bar{1}1]^{00}$ $[11\bar{1}]^{00}$ $[1\bar{1}\bar{1}]^{00}$.

Trigonale Schraubenachsen: Acht. Vier von linkem, vier von rechtem Windungssinn;

beispielsweise zu $[111]^{00}$ gehörig $[111]^{\frac{1}{3}\frac{2}{3}}$ und $[111]^{\frac{2}{3}\frac{1}{3}}$;
zu $[11\bar{1}]$ gehörig $[11\bar{1}]^{\frac{1}{3}\frac{1}{3}}$ und $[111]^{\frac{2}{3}\frac{2}{3}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte: Sie entsprechen den Tripeln der Tetardoedrie, ohne Zusatztranslationen (Seite 354).

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]$
2. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$

} Zähligkeit jeweilen = 1. Symmetriebedingung = T.

Die Punkte bilden Gitter von der Form des einfachen Elementarwürfels.

3. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$
4. $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$

} Zähligkeit jeweilen = 3. Symmetriebedingung = V.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Auf den trigonalen Drehungsachsen. Zähligkeit = 4. Symmetriebedingung = C_3. Es gehören beispielsweise zusammen:
$[\![m\ m\ m]\!]$ $[\![m\ \bar{m}\ \bar{m}]\!]$ $[\![\bar{m}\ m\ \bar{m}]\!]$ $[\![\bar{m}\ \bar{m}\ m]\!]$.
2. Auf den digonalen Drehungsachsen ist jede Punktlage (ausgenommen die speziellen Lagen ohne Freiheitsgrad) sechszählig. Die Symmetriebedingung ist = C_2. So sind mit $[\![m, 0, 0]\!]$ gleichwertig:
$[\![\bar{m}, 0, 0]\!]$ $[\![0, m, 0]\!]$ $[\![0, \bar{m}, 0]\!]$ $[\![0, 0, m]\!]$ $[\![0, 0, \bar{m}]\!]$.

Alle übrigen Punktlagen sind ohne Symmetriebedingung 12zählig und besitzen drei Freiheitsgrade.

Raumgruppe $\mathfrak{T}^2$

Die Scharenuntergruppen sind: $\mathfrak{C}_2{}^3$ $\mathfrak{C}_2{}^3$ $\mathfrak{C}_2{}^3$, $\mathfrak{C}_3{}^4$ $\mathfrak{C}_3{}^4$ $\mathfrak{C}_3{}^4$. In rhombischer Beziehung bilden die drei $\mathfrak{C}_2{}^3$ eine Untergruppe $\mathfrak{V}^7$. $\mathfrak{C}_2{}^3$ (mit rechten Winkeln wie in $\mathfrak{V}^7$) und $\mathfrak{C}_3{}^4$ im Winkel von $54^0\ 44'\ 8''$ sind charakteristische Untergruppen. Der Elementarwürfel ist vierfachprimitiv, flächenzentriert. Der Koordinatenanfangspunkt liegt im Schnittpunkt dreier digonaler Drehungsachsen.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0;\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1.$ II.) $\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2};\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1.$

III.) $0, \frac{a}{2}, \frac{a}{2};\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1.$

IV.) $0,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1;\ 1,0,0.$ V.) $0,0,0;\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1.$

Digonale Drehungsachsen:

$[100]^{00}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{1}{2}0}$ $[100]^{0\frac{1}{2}}$ $^{00}[010]$ $^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[010]$ $^{0\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{1}{2}0}[010]$
$[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$; $[100]^{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$
$^{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}[010]$ $^{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}[010]$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$.

Dazu kommen 24 digonale Schraubenachsen, die genau die gleiche Lage besitzen wie in $\mathfrak{V}^7$.

Trigonale Drehungsachsen:

$[111]^{00}$ $[111]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[111]^{0\frac{1}{2}}$ $[111]^{\frac{1}{2}0}$ $[1\bar{1}1]^{00}$ $[1\bar{1}1]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}1]^{0\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}1]^{\frac{1}{2}0}$

$[11\bar{1}]^{00}$ $[11\bar{1}]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[11\bar{1}]^{0\frac{1}{2}}$ $[11\bar{1}]^{\frac{1}{2}0}$ $[1\bar{1}\bar{1}]^{00}$ $[1\bar{1}\bar{1}]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}\bar{1}]^{0\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}\bar{1}]^{\frac{1}{2}0}$.

Dazu kommen 32 trigonale Schraubenachsen, 16 von linkem, 16 von rechtem Windungssinn.

Parallel [111] findet man beispielsweise folgende 2 Arten:

$[111]^{\frac{2}{3}\frac{1}{3}}$ $[111]^{\frac{1}{6}\frac{5}{6}}$ $[111]^{\frac{1}{6}\frac{1}{3}}$ $[111]^{\frac{2}{3}\frac{5}{6}}$ und $[111]^{\frac{1}{3}\frac{2}{3}}$ $[111]^{\frac{5}{6}\frac{1}{6}}$ $[111]^{\frac{1}{3}\frac{1}{6}}$ $[111]^{\frac{5}{6}\frac{3}{3}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte: Koordinatentripel der Tetartoedrie, dazu für jeden Wert: $[\![x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z]\!]$ $[\![x+\frac{1}{2}, y, z+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![x, y+\frac{1}{2}, z+\frac{1}{2}]\!]$, so daß im ganzen 48 zusammengehörige Punktlagen entstehen.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$
2. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ } Zähligkeit jeweilen = 4. Symmetrie-
3. $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ bedingung = T.
4. $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$

Diese Punktlagen bilden Gitter von der Form des flächenzentrierten Elementarparallelepipeds.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Auf den trigonalen Drehungsachsen ist die Zähligkeit 16, die Symmetriebedingung = C_3.
2. 24zählig sind die Punkte, die nur digonalen Drehungsachsen angehören.

Alle übrigen Punkte sind mit drei Freiheitsgraden, ohne Symmetriebedingung, im Elementarwürfel 48zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{T}^3$

Die Scharenuntergruppen sind denen von $\mathfrak{T}^2$ gleich, doch bilden $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$ $\mathfrak{C}_2^3$ eine rhombische Untergruppe $\mathfrak{V}^3$. Der Koordinatenanfangspunkt liegt im Schnittpunkt dreier digonaler Drehungsachsen. Der Elementarwürfel ist innenzentriert.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) $\frac{a}{2}, \frac{\bar{a}}{2}, \frac{a}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

III.) 0, 0, a; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1; 1, 0, 0. V.) 0, 0, 0; 1, 0, 0; 0, $\bar{1}$, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

Digonale Drehungsachsen:

$[100]^{00}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $^{00}[010]$ $^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[010]$ $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$;

$[100]^{\frac{1}{2}0}$ $[100]^{0\frac{1}{2}}$ $^{0\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{1}{2}0}[010]$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen wie in $\mathfrak{B}^8$; alle zusammengehörig.

Trigonale Drehungsachsen: $[111]^{00}$ $[1\bar{1}\bar{1}]^{00}$ $[1\bar{1}\bar{1}]^{00}$ $[\bar{1}\bar{1}\bar{1}]^{00}$.

Ferner $8 = 4 + 4$ trigonale Schraubenachsen wie in $\mathfrak{T}^1$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte: Die Koordinatentripel der Tetartoedrie (siehe Seite 354), ferner zu jedem Wert:

$$[\![x + \tfrac{1}{2},\ y + \tfrac{1}{2},\ z + \tfrac{1}{2}]\!].$$

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung = T.
   Die Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung.
2. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 6. Symmetriebedingung = V.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad:

1. Auf den trigonalen Achsen sind die Punkte achtzählig. Zu $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ gehören beispielsweise $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ allgemein zu $[\![m, m, m]\!]$ die Punkte $[\![m, m, \bar{m}]\!]$ $[\![m, \bar{m}, m]\!]$ $[\![\bar{m}, m, m]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}]\!]$. Die Symmetriebedingung ist $= C_3$.
2. Auf den digonalen Achsen herrscht Zwölfzähligkeit. Symmetriebedingung $= C_2$.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden im Elementarwürfel 24zählig und besitzen keinerlei Symmetriebedingungen.

Raumgruppe $\mathfrak{T}^4$

Die Scharenuntergruppen sind: $\mathfrak{C}_2^2$ $\mathfrak{C}_2^2$ $\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_3^4$ $\mathfrak{C}_3^4$ $\mathfrak{C}_3^4$ $\mathfrak{C}_3^4$. $\mathfrak{C}_2^2$ $\mathfrak{C}_2^2$ $\mathfrak{C}_2^2$ bilden in rhombischer Hinsicht eine Untergruppe $\mathfrak{B}^4$. $\mathfrak{C}_2^2$ mit $\mathfrak{C}_3^4$ im Winkel von $50^0\ 44'\ 8''$ sind charakteristisch. Der Koordinatenanfangspunkt liegt auf der trigonalen Achse im Schnittpunkt dreier digonaler Schraubenachsenebenen. Der Elementarwürfel ist einfachprimitiv.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.) a, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) 0, a, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.
III.) 0, 0, a; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1; 1, 0, 0. V.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}$, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Trigonale Drehungsachsen: $[111]^{00}$ $[1\bar{1}\bar{1}]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[\bar{1}1\bar{1}]^{\frac{1}{2}0}$ $[\bar{1}\bar{1}1]^{0\frac{1}{2}}$.

Ferner 8 trigonale Schraubenachsen pro Elementarparallelepiped.

Digonale Schraubenachsen:

$[100]^{\frac{1}{4}\,0}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}$ $^{0\,\frac{1}{4}}[010]$ $^{\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}}[010]$ $[001]_{\frac{1}{4}\,0}$ $[001]_{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}$;

$[100]^{\frac{3}{4}\,0}$ $[100]^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}$ $^{0\,\frac{3}{4}}[010]$ $^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}}[010]$ $[001]_{\frac{3}{4}\,0}$ $[001]_{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}$.

(Siehe auch Fig. 159.)

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}, n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}, p+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![p, m, n]\!]$ $[\![\bar{p}, m+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{p}+\frac{1}{2}, \bar{m}, n+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![p+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{n}]\!]$

$[\![n, p, m]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{p}, m+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}, \bar{m}]\!]$ $[\![\bar{n}, p+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}]\!]$.

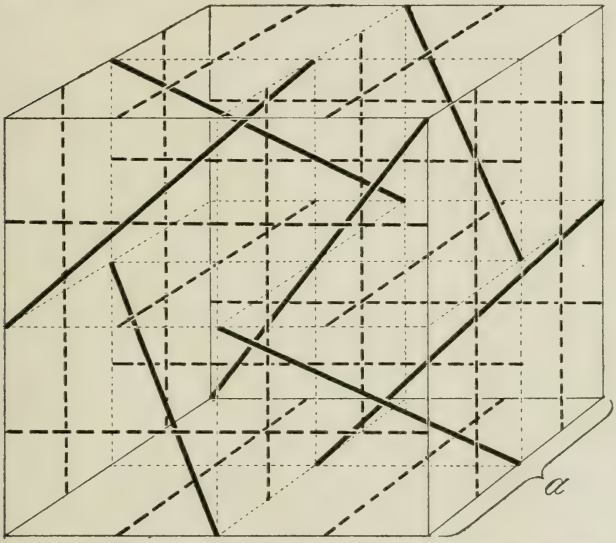


Fig. 159. $\mathfrak{T}^4$ Trigonale Drehungsachsen und digonale Schraubenachsen im Elementarwürfel. (Perspektivische Darstellung.)

Es sind keine Punktlagen ohne Freiheitsgrad vorhanden.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad finden sich auf den trigonalen Achsen. Ihre Zähligkeit ist 4, die Symmetriebedingung $= C_3$. Vier konstruktive Punktlagen sind dadurch ausgezeichnet, daß ihre gleichwertigen Komplexe Gitter von der Form des flächenzentrierten Elementarwürfels bilden. Es sind das als Ausgangslagen entweder $[\![0\,0\,0]\!]$ oder $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ oder $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ oder $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$.

Im übrigen besitzen alle Punktlagen drei Freiheitsgrade. Sie sind dann 12zählig. Die Lage der trigonalen Drehungsachsen und

digonalen Schraubenachsen ist gegenüber den Koordinatenachsen auch anders wählbar, die trigonalen Drehungsachsen beispielsweise wie folgt: $[111]^{00}$ $[1\bar{1}1]^{0\frac{1}{2}}$ $[11\bar{1}]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}\bar{1}]^{\frac{1}{2}0}$. Dem würde eine Verteilung der digonalen Achsen entsprechen, wie sie für das Raumsystem $\mathfrak{B}^4$ (siehe Seite 179) angenommen wurde.

Raumgruppe $\mathfrak{T}^5$

Die Scharenuntergruppen sind: $\mathfrak{C}_2{}^3$ $\mathfrak{C}_2{}^3$ $\mathfrak{C}_2{}^3$, $\mathfrak{C}_3{}^4$ $\mathfrak{C}_3{}^4$ $\mathfrak{C}_3{}^4$ $\mathfrak{C}_3{}^4$, doch bilden die digonalen Achsen diesmal eine Untergruppe $\mathfrak{B}^9$. Der Koordi-

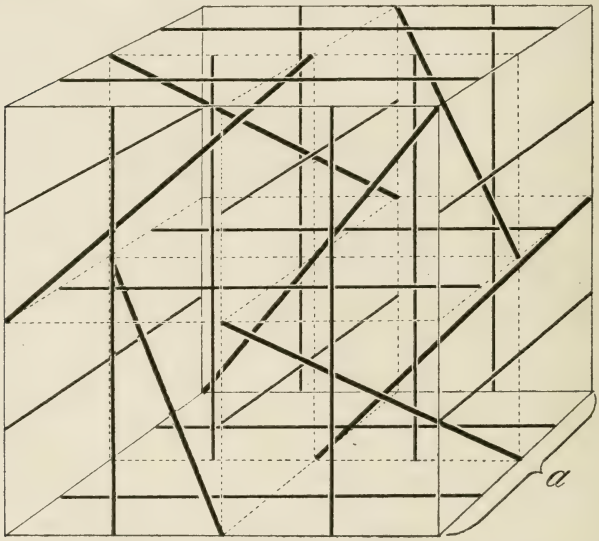


Fig. 160. $\mathfrak{T}^5$ Trigonale und digonale Drehungsachsen im Elementarwürfel. (Perspektivische Darstellung.)

natenanfangspunkt liege auf der trigonalen Achse im Schnittpunkt dreier Ebenen digonaler Drehungsachsen. Der Elementarwürfel ist doppeltprimitiv innenzentriert.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

III.) 0, 0, a; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1; 1, 0, 0. V.) 0, 0, $\frac{a}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Trigonale Achsen (polar) wie in $\mathfrak{T}^4$.

Digonale Drehungsachsen: $[100]^{0\,\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}}$ $[100]^{0\,\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}}$ $^{\frac{1}{4}\,0}[010]$ $^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\,0}[010]$ $^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}[010]$ $[001]_{0\,\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}}$ $[001]_{0\,\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}}$.

Digonale Schraubenachsen: Lage wie in $\mathfrak{T}^4$.

(Siehe auch Fig. 160.)

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

$[\![m, n, p]\!]$ $[\![m, \bar{n}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}+\frac{1}{2}, p]\!]$
$[\![p, m, n]\!]$ $[\![\bar{p}+\frac{1}{2}, m, \bar{n}]\!]$ $[\![\bar{p}, \bar{m}+\frac{1}{2}, n]\!]$ $[\![p, \bar{m}, \bar{n}+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![n, p, m]\!]$ $[\![\bar{n}, \bar{p}+\frac{1}{2}, m]\!]$ $[\![n, \bar{p}, \bar{m}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, p, \bar{m}]\!]$.

Ferner gehört zu jedem dieser Werte $[\![x, y, z]\!]$ ein Wert $[\![x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z+\frac{1}{2}]\!]$.

Keine Punkte ohne Freiheitsgrad.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Auf den trigonalen Drehungsachsen ist die Zähligkeit = 8. Die Symmetriebedingung lautet C_3. Die $[\![0\,0\,0]\!]$, sowie die $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ gleichwertigen Punkte bilden jeweilen Würfelgitter von $\frac{1}{8}$ Volumen des Elementarwürfels.
2. Die Punktlagen auf den digonalen Drehungsachsen (C_2) sind 12zählig.

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden 24zählig.

$\mathfrak{T}_h$. Paramorph-hemiedrische Klasse der kubischen Abteilung (Dyakisdodekaedrische Klasse)

Zu den Symmetrieelementen der Tetartoedrie kommen drei, auf den digonalen Achsenscharen senkrecht stehende, Symmetrieebenenscharen hinzu. Sie erzeugen nach Satz 10 Seite 57 Symmetriezentren und erweitern daher die trigonalen Achsenscharen zu hexagonalen Drehspiegelachsenscharen.

Die Koordinatentripel der paramorphen Hemiedrie ohne Zusatztranslationen sind:

(I). Die Koordinatentripel der Tetartoedrie (siehe Seite 354).

(II). $[\![\bar{m}\ \bar{n}\ \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}\ n\ p]\!]$ $[\![m\ \bar{n}\ p]\!]$ $[\![m\ n\ \bar{p}]\!]$
$[\![\bar{p}\ \bar{m}\ \bar{n}]\!]$ $[\![p\ \bar{m}\ n]\!]$ $[\![p\ m\ \bar{n}]\!]$ $[\![\bar{p}\ m\ n]\!]$
$[\![\bar{n}\ \bar{p}\ \bar{m}]\!]$ $[\![n\ p\ \bar{m}]\!]$ $[\![\bar{n}\ p\ m]\!]$ $[\![n\ \bar{p}\ m]\!]$.

Raumgruppe $\mathfrak{T}_h^1$

Für die Raumsysteme $\mathfrak{T}_h^1$, $\mathfrak{T}_h^2$ und $\mathfrak{T}_h^6$ ist der einfachprimitive Würfel Elementarparallelepiped. Die drei ersten Decktransformationsbedingungen lauten daher gemeinsam:

I.) a, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) 0, a, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.
III.) 0, 0, a; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Die Scharenuntergruppen von $\mathfrak{T}_h^1$ sind: $\mathfrak{C}_2^1\ \mathfrak{C}_2^1\ \mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_s^1\ \mathfrak{C}_s^1\ \mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_3^1\ \mathfrak{C}_3^1\ \mathfrak{C}_3^1\ \mathfrak{C}_3^1$, $\mathfrak{C}_i$. Die kubische Untergruppe ist $\mathfrak{T}^1$, die rhombisch-holoedrische Untergruppe $\mathfrak{V}_h^1\ \mathfrak{T}^1$ mit $\mathfrak{C}_s^1$ sind als charakteristisch anzusehen. Die IV.), V.) und VI.) Decktransformationsbedingungen können geschrieben werden:

IV.) $0,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1;\ 1,0,0$. V.) $0,0,0;\ 1,0,0;\ 0,\bar{1},0;\ 0,0,1$.

VI.) $0,0,0;\ \bar{1},0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1$.

Der Koordinatenanfangspunkt liegt im Schnittpunkt der trigonalen mit den digonalen Drehungsachsen.

Symmetrieelemente: Die gleichen in gleicher Lage wie in $\mathfrak{T}^1$. Dazu noch die folgenden:

Symmetriezentren: I. $[\![0\,0\,0]\!]$. II. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$.
III. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]\ [\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]\ [\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$. IV. $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]\ [\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]\ [\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$.

Spiegelebenen: $(100)_0\ (010)_0\ (001)_0$; ferner $(100)_{\frac{1}{2}}\ (010)_{\frac{1}{2}}\ (001)_{\frac{1}{2}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:
Die Koordinatentripel (I) und (II) der paramorphen Hemiedrie ohne Zusatztranslationen.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. Symmetriezentren I } Zähligkeit jeweilen = 1. Symmetrie-
2. Symmetriezentren II } bedingung = T_h.

Die beiden Punktlagen bilden jede für sich Gitter von der Form des einfachen Elementarparallelepipeds.

3. Symmetriezentren III } Zähligkeit jeweilen = 3. Symmetrie-
4. Symmetriezentren IV } bedingung = V_h.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Auf den digonalen Drehungsachsen, die zugleich Schnittlinien zweier Spiegelebenen sind (C_{2v}), ist die Zähligkeit = 6.
2. Auf den trigonalen Drehungsachsen ist achtfache Zähligkeit vorhanden (Symmetriebedingung C_3). Würfelgitter von $\frac{1}{8}$ Volumen des Elementarwürfels bilden die $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ gleichwertigen Punkte.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Sie gehören den Spiegelebenen an und sind 12zählig. (Symmetriebedingung = C_s.)

Alle übrigen Punkte sind mit drei Freiheitsgraden 24zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{T}_h^2$

Die Scharenuntergruppen sind: $\mathfrak{C}_2^1\ \mathfrak{C}_2^1\ \mathfrak{C}_2^1$, $\mathfrak{C}_s^2\ \mathfrak{C}_s^2\ \mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_3^1\ \mathfrak{C}_3^1\ \mathfrak{C}_3^1\ \mathfrak{C}_3^1$, $\mathfrak{C}_i$. $\mathfrak{T}^1$ mit $\mathfrak{C}_s^2$ dienen zur Ableitung. Die rhombisch holoedrische Untergruppe ist $\mathfrak{V}_h^2$. Der Koordinatenanfangspunkt liegt wiederum im Schnittpunkt der digonalen und trigonalen Drehungsachsen.

Der Elementarwürfel ist einfachprimitiv, die drei ersten Decktransformationsbedingungen sind denen von $\mathfrak{T}_h^1$ gleich (ebenso IV und V).

IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1; 1, 0, 0.

V.) 0, 0, 0; 1, 0, 0; 0, $\bar{1}$, 0; 0, 0, $\bar{1}$. VI.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}$; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Symmetrieelemente: Die gleichen wie in $\mathfrak{T}^1$, außerdem:

Symmetriezentren: I. $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$.

II. $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$.

Gleitspiegelebenen: $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{1}{4}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

Zunächst (I) unverändert wie in der Tetartoedrie (Seite 354). An Stelle von (II):

$[\![\bar{m}+\frac{1}{2},\bar{n}+\frac{1}{2},\bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2},\bar{n}+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{p}+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},\bar{n}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![p+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![p+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{p}+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{n}+\frac{1}{2},\bar{p}+\frac{1}{2},\bar{m}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2},\bar{m}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2},\bar{p}+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\ 0\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung = T.
2. Symmetriezentren I. } Zähligkeit jeweilen = 4. Symmetrie-
3. Symmetriezentren II. } bedingung = C_{3i}.

Die zweizähligen Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds mit Innenzentrierung, die vierzähligen von der Form des flächenzentrierten Elementarwürfels.

4. $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ 0]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![0\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$. Die Zähligkeit ist 6, die Symmetriebedingung = V.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Auf den trigonalen Achsen herrscht bei beliebiger Lage Achtzähligkeit (C_3). Die Punktlagen der digonalen Achsen für sich sind 12zählig (C_2).

Alle übrigen Punkte sind mit drei Freiheitsgraden 24zählig.

Die Raumgruppen $\mathfrak{T}_h^3$ und $\mathfrak{T}_h^4$ enthalten einen vierfachprimitiven flächenzentrierten Würfel als Elementarparallelepiped. Außerdem ist für beide $\mathfrak{T}^2$ eine Untergruppe. Die fünf ersten Decktransformationsbedingungen lauten daher für beide Gruppen gemeinsam:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) $\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

III.) $0, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1; 1, 0, 0. V.) 0, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Raumgruppe $\mathfrak{T}_h^3$

Ihre Scharenuntergruppen lauten: $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_4^3\,\mathfrak{C}_4^3\,\mathfrak{C}_4^3\,\mathfrak{C}_4^3$, $\mathfrak{C}_i$. $\mathfrak{T}^2$ mit $\mathfrak{C}_s^3$ sind charakteristisch. Die rhombisch-holoedrische Untergruppe ist $\mathfrak{V}_h^{23}$. Der Koordinatenanfangspunkt liegt im Schnittpunkt der Spiegelebenen mit digonalen und trigonalen Achsen.

Die VI.) Decktransformationsbedingung lautet:

VI.) $0, 0, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, 1.$

Die gleichen Symmetrieelemente wie in $\mathfrak{T}^2$, ferner die folgenden:

Symmetriezentren: I. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$.

II. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$.

III. $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\frac{1}{4}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$
$[\![0\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$.

Spiegelebenen: $(100)_0$ $100)_{\frac{1}{2}}$ $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte: Zunächst (I) und (II) der paramorphen Hemiedrie (siehe Seite 361) unverändert, außerdem zu jedem Wert: $[\![x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z]\!]$ $[\![x+\frac{1}{2}, y, z+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![x, y+\frac{1}{2}, z+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. Symmetriezentren I. } Zähligkeit jeweilen = 4. Symmetrie-
2. Symmetriezentren II. } bedingung = T_h.

   Die Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarwürfels mit Flächenzentrierung.

3. $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$. Diese Punktlage ist 8zählig und mit der Symmetriebedingung T verknüpft. Sie bildet Würfelgitter, deren Maschenvolumen $\frac{1}{8}$ des Elementarwürfels ist.
4. Alle unter III. stehenden Symmetriezentren gehören zusammen, sie bestimmen eine 24zählige Punktlage mit der Symmetriebedingung C_{2h}.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Die digonalen Drehungsachsen sind zum Teil Schnittlinien von Spiegelebenen, zum Teil liegen sie bloß in Gleitspiegelebenen. Auf den ersteren ist gemäß der Symmetriebedingung C_{2v} eine beliebige Punktlage 24zählig.
2. Auf den durch die 8zähligen Punktlagen gehenden digonalen Drehungsachsen ist bei beliebiger Lage ein Punkt 48zählig. (Symmetriebedingung C_2.)

3. Punkte, die nur den trigonalen Drehungsachsen angehören, sind mit der Symmetriebedingung C_3 32zählig.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden gehören den Spiegelebenen allein an und sind 48zählig. C_s.

Daraus folgt, daß Punktlagen mit drei Freiheitsgraden, ohne Symmetriebedingung, 96zählig sind.

Raumgruppe $\mathfrak{T}_h^4$

Die Scharenuntergruppen sind diesmal: $\mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_4^3\ \mathfrak{C}_4^3\ \mathfrak{C}_4^3\ \mathfrak{C}_i$. $\mathfrak{T}^2$ und $\mathfrak{C}_s^4$ charakterisieren das Raumsystem. Die rhombisch-holoedrische Untergruppe ist $\mathfrak{V}_h^{24}$. Hinsichtlich der Achsen gleiche Koordinatennullpunktswahl wie in $\mathfrak{T}_h^3$. Die fünf ersten Decktransformationsbedingungen findet man auf Seite 361, die VI.) lautet:

VI.) $\frac{a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{4}$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, 1$.

Symmetrieelemente: Die gleichen wie in $\mathfrak{T}^2$, außerdem:

Symmetriezentren (in der Reihenfolge wie in $\mathfrak{V}_h^{24}$):

I. $[\![\frac{1}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\ \frac{5}{8}\ \frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\ \frac{5}{8}\ \frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\ \frac{7}{8}\ \frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\ \frac{3}{8}\ \frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\ \frac{7}{8}\ \frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\ \frac{3}{8}\ \frac{5}{8}]\!]$
$[\![\frac{7}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\ \frac{5}{8}\ \frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\ \frac{5}{8}\ \frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\ \frac{7}{8}\ \frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\ \frac{3}{8}\ \frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\ \frac{7}{8}\ \frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\ \frac{3}{8}\ \frac{3}{8}]\!]$.

II. $[\![\frac{5}{8}\ \frac{5}{8}\ \frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\ \frac{5}{8}\ \frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\ \frac{3}{8}\ \frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\ \frac{7}{8}\ \frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\ \frac{3}{8}\ \frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\ \frac{7}{8}\ \frac{1}{8}]\!]$
$[\![\frac{3}{8}\ \frac{5}{8}\ \frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\ \frac{5}{8}\ \frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\ \frac{3}{8}\ \frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\ \frac{7}{8}\ \frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\ \frac{3}{8}\ \frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\ \frac{7}{8}\ \frac{7}{8}]\!]$.

Gleitspiegelebenen: $(100)_{\frac{1}{8}}$ $(100)_{\frac{5}{8}}$ $(010)_{\frac{1}{8}}$ $(010)_{\frac{5}{8}}$ $(001)_{\frac{1}{8}}$ $(001)_{\frac{5}{8}}$
$(100)_{\frac{3}{8}}$ $(100)_{\frac{7}{8}}$ $(010)_{\frac{3}{8}}$ $(010)_{\frac{7}{8}}$ $(001)_{\frac{3}{8}}$ $(001)_{\frac{7}{8}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

Zunächst die 12 Werte von (I) der Tetartoedrie, ohne Zusatztranslationen. An Stelle von (II) der paramorphen Hemiedrie die folgenden Symbole:

$[\![\bar{m}+\frac{1}{4}, n+\frac{1}{4}, \bar{p}+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{4}, n+\frac{1}{4}, p+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{4}, \bar{n}+\frac{1}{4}, p+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{4}, n+\frac{1}{4}, \bar{p}+\frac{1}{4}]\!]$
$[\![p+\frac{1}{4}, m+\frac{1}{4}, \bar{n}+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![p+\frac{1}{4}, \bar{m}+\frac{1}{4}, n+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![p+\frac{1}{4}, m+\frac{1}{4}, \bar{n}+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\bar{p}+\frac{1}{4}, m+\frac{1}{4}, n+\frac{1}{4}]\!]$
$[\![n+\frac{1}{4}, \bar{p}+\frac{1}{4}, \bar{m}+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{4}, p+\frac{1}{4}, \bar{m}+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{4}, p+\frac{1}{4}, m+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{4}, \bar{p}+\frac{1}{4}, m+\frac{1}{4}]\!]$.

Ferner zu jedem dieser 24 Werte:

$[\![x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z]\!]$ $[\![x+\frac{1}{2}, y, z+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![x, y+\frac{1}{2}, z+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\ 0\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$.
2. $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ 0]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![0\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$.

Jede dieser zwei Punktlagen ist somit 8zählig. Die Symmetriebedingung lautet: T. Die Gitterkomplexe können als „Diamantgitter" bezeichnet werden.

3. Symmetriezentren I. } Zähligkeit jeweilen = 16. Symmetrie-
4. Symmetriezentren II. } bedingung = C_{3i}.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Auf den trigonalen Drehungsachsen liegen 32zählige Punkte (C_3), auf den digonalen Drehungsachsen (C_2) 48zählige.

Punktlagen mit drei Freiheitsgraden sind daher 96zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{T}_h^5$

Die Raumgruppen $\mathfrak{T}_h^5$ und $\mathfrak{T}_h^7$ müssen auf einen innenzentrierten Elementarwürfel bezogen werden, so daß die drei ersten Decktransformationsbedingungen lauten:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) $\frac{a}{2}, \frac{\bar{a}}{2}, \frac{a}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

III.) 0, 0, a; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Die Scharenuntergruppen von $\mathfrak{T}_h^5$ sind: $\mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3\ \mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4$, $\mathfrak{C}_i$. $\mathfrak{T}^3$ mit $\mathfrak{C}_s^3$ ist bei der Ableitung zu verwenden. Die rhombisch-holoedrische Untergruppe lautet $\mathfrak{V}_h^{25}$. Der Koordinatenanfangspunkt, in den Schnittpunkt dreier Spiegelebenen gelegt, ergibt die weiteren Decktransformationsbedingungen:

IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1; 1, 0, 0. V.) 0, 0, 0; 1, 0, 0; 0, $\bar{1}$, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

VI.) 0, 0, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Symmetrieelemente: Die gleichen wie in $\mathfrak{T}_h^1$, doch zum Teil zusammengehörig. Außerdem als neue Symmetriezentren (zu denen von $\mathfrak{T}_h^1$):

III. $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$.

Als neue Schraubenachsen digonaler Art:

$$[100]^{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}\ [100]^{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}\ [100]^{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}\ [100]^{\frac{3}{4}\frac{1}{4}},$$

sowie die entsprechenden parallel [010] und [001].

Als Gleitspiegelebenen: $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte: Die 24 Koordinatenwerte der Tripel der paramorphen Hemiedrie ohne Zusatztranslationen. Außerdem zu jedem Wert: $[\![x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\ 0\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung = T_h.
2. $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ 0]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![0\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 6. Symmetriebedingung = V_h.
3. Symmetriezentren III. Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung = C_{3i}.

1 bildet Gitter von der Form des innenzentrierten Elementarwürfels, 3 bildet Würfelgitter mit dem Maschenvolumen von $\frac{1}{8}$ des Elementarvolumens.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Die digonalen Drehungsachsen sind zugleich Schnittlinien von Spiegelebenen, so daß, gemäß einer Symmetriebedingung C_{2v}, die daraufliegenden Punkte 12zählig sind. Auf den trigonalen Drehungsachsen liegen 16zählige Punkte (C_3).

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden gehören den Spiegelebenen an und sind 24zählig.

Die mit drei Freiheitsgraden behafteten Punkte sind 48zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{T}_h^6$

Die Scharenuntergruppen ergeben sich zu: $\mathfrak{C}_2^2\ \mathfrak{C}_2^2\ \mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_s^2\ \mathfrak{C}_s^2\ \mathfrak{C}_s^2$, $\mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4$, $\mathfrak{C}_i$. $\mathfrak{T}^4$ mit $\mathfrak{C}_s^2$ sind für das Raumsystem charakteristisch. Die rhombisch-holoedrische Untergruppe heißt $\mathfrak{V}_h^{15}$. Der Koordinatenanfangspunkt liegt im Symmetriezentrum, das, wie immer, wenn es in dieser Klasse auf trigonalen Achsen liegt, zugleich den Schnittpunkt einer hexagonalen Drehspiegelachse mit einer Drehspiegelebene darstellt. Der Elementarwürfel ist einfachprimitiv, die drei ersten Decktransformationsbedingungen sind bereits auf Seite 361 vermerkt worden.

IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1; 1, 0, 0.

V.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0$: 1, 0, 0; 0, $\bar{1}$, 0: 0, 0, $\bar{1}$. VI.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0$; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Symmetrieelemete: Trigonale und digonale Achsen wie in $\mathfrak{T}^4$. Dazu:

Symmetriezentren: I. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$.
II. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$.

Gleitspiegelebenen: $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

Zunächst an Stelle von (I) der paramorphen Hemiedrie die 12 Koordinatenwerte von $\mathfrak{T}^4$. Ferner an Stelle von (II):

$[\![\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, p]\!]$ $[\![m, \bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, n, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{p}, \bar{m}, \bar{n}]\!]$ $[\![p, \bar{m}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![p+\frac{1}{2}, m, \bar{n}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{p}+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, n]\!]$
$[\![\bar{n}, \bar{p}, \bar{m}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, p, \bar{m}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}, m]\!]$ $[\![n, \bar{p}+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

1. Symmetriezentren I.
2. Symmetriezentren II.

} Zähligkeit jeweilen = 4. Symmetriebedingung = C_{3i}.

Die Punktlagen bilden Gitter von der Form des flächenzentrierten Elementarwürfels.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Sie gehören den trigonalen Drehungsachsen an und sind gemäß der Symmetriebedingung C_3 achtzählig. Die konstruktive Lage $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ bildet mit den ihr gleichwertigen Punkten würfelförmige Gitter mit einem Maschenvolumen von $\frac{1}{8}$ des Elementarwürfels.

Die Punkte allgemeiner Lage, mit drei Freiheitsgraden, sind 24zählig. Sie besitzen keinerlei Symmetriebedingungen.

Raumgruppe $\mathfrak{T}_h^7$

Die Scharenuntergruppen sind: $\mathfrak{C}_2^3\mathfrak{C}_2^3\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_s^4\mathfrak{C}_s^4\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_3^4\mathfrak{C}_3^4\mathfrak{C}_3^4\mathfrak{C}_3^4$, $\mathfrak{C}_i$. $\mathfrak{T}^5$ mit $\mathfrak{C}_s^4$ sind für das Raumsystem charakteristisch. Die rhombisch-holoedrische Untergruppe ergibt sich zu $\mathfrak{V}_h^{27}$. Der Koordinatenanfangspunkt fällt in ein Symmetriezentrum. Der Elementarwürfel ist innenzentriert. Die drei ersten Decktransformationsbedingungen findet man unter $\mathfrak{T}_h^5$.

IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1; 1, 0, 0.

V.) $0, 0, \frac{a}{2}$; $1, 0, 0$; $0, \bar{1}, 0$; $0, 0, \bar{1}$. V.) $0, 0, \frac{a}{2}$; $\bar{1}, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, 1$.

Die Symmetrieelemente von $\mathfrak{T}^5$ sind (abgesehen von der Zusammengehörigkeit) in gleicher Lage vorhanden. Dazu kommen folgende:

Symmetriezentren:

I. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$.

II. $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$.

Gleitspiegelebenen: $(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$;

$(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$.

Außerdem, wie in allen Raumsystemen dieser Klasse, Drehspiegelebenen senkrecht zu den trigonalen Achsen.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

Zunächst die unter $\mathfrak{T}^5$ angegebenen Tripel als (I). Ferner an Stelle von (II) der paramorphen Hemiedrie:

$[\![m, \bar{n}, \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}, n, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{n}, p]\!]$ $[\![m, n+\frac{1}{2}, \bar{p}]\!]$

$[\![\bar{p}, \bar{m}, \bar{n}]\!]$ $[\![p+\frac{1}{2}, \bar{m}, n]\!]$ $[\![p, m+\frac{1}{2}, \bar{n}]\!]$ $[\![\bar{p}, m, n+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![\bar{n}, \bar{p}, \bar{m}]\!]$ $[\![n, p+\frac{1}{2}, \bar{m}]\!]$ $[\![\bar{n}, p, m+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, \bar{p}, m]\!]$.

Zu jedem dieser 24 Werte noch der Wert: $[\![x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. Symmetriezentren I.
2. Symmetriezentren II.

Zähligkeit jeweilen = 8. Symmetriebedingung = C_{3i}.

Beide Punktlagen bilden Gitter mit würfelförmigen Maschen von $\frac{1}{8}$ Volumen des Elementarwürfels.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Auf den trigonalen Drehungsachsen herrscht bei beliebiger Lage die Zähligkeit 16. (Symmetriebedingung C_3).
2. Die auf digonalen Drehungsachsen liegenden Punkte sind demgemäß 24zählig. (Symmetriebedingung C_2).

Alle übrigen Punktlagen sind mit drei Freiheitsgraden 48zählig.

$\mathfrak{T}_d$. Hemimorph-hemiedrische Klasse der kubischen Abteilung (Hexakistetraedrische Klasse)

Zu den Symmetrieelementen von $\mathfrak{T}$ kommen 6 gleichwertige Scharen von Symmetrieebenen, die den Winkel zweier ursprünglich digonalen Achsenscharen halbieren. Diese-digonalen Achsenscharen werden daher nach dem Satze 8 und 8a von Seite 56 einer tetragonalen Drehspiegelachse isomorph.

Die Koordinatentripel der hemimorphen Hemiedrie ohne Zusatztranslationen sind:

(I). Die 12 zusammengehörigen Werte der Klasse $\mathfrak{T}$ Seite 354.

(II). $[n\ m\ p]$ $[\bar{n}\ m\ \bar{p}]$ $[n\ \bar{m}\ \bar{p}]$ $[\bar{n}\ \bar{m}\ p]$
$[m\ p\ n]$ $[m\ \bar{p}\ \bar{n}]$ $[\bar{m}\ \bar{p}\ n]$ $[\bar{m}\ p\ \bar{n}]$
$[p\ n\ m]$ $[\bar{p}\ \bar{n}\ m]$ $[\bar{p}\ n\ \bar{m}]$ $[p\ \bar{n}\ \bar{m}]$.

Raumgruppe $\mathfrak{T}_d^1$

Die Scharenuntergruppen sind: $\mathfrak{S}_4^1$ $\mathfrak{S}_4^1$ $\mathfrak{S}_4^1$, $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_3^4$ $\mathfrak{C}_3^4$ $\mathfrak{C}_3^4$ $\mathfrak{C}_3^4$, $\mathfrak{C}_i$. $\mathfrak{T}^1$ mit $\mathfrak{C}_s^3$ charakterisieren das Raumsystem. Die tetragonal sphenoidisch-hemiedrische Untergruppe ist $\mathfrak{V}_d^1$. Der Elementarwürfel ist einfachprimitiv, der Koordinatenanfangspunkt Schnittpunkt der tetragonalen Drehspiegelachsen mit trigonalen Drehungsachsen.

Die Decktransformationsbedingungen lauten:

I.) a, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) 0, a, 0; $\frac{1}{2}$, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.
III.) 0, 0, a; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1; 1, 0, 0.
V.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

Trigonale Achsen wie $\mathfrak{T}^1$.

Tetragonale Drehspiegelachsen:

$[100]^{00}\ {}^{00}[010]$ $[001]_{00}$; $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\ {}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[010]$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen:

$[100]^{\frac{1}{2}0}$ $[100]^{0\frac{1}{2}}\ {}^{0\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{1}{2}0}[010]$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Spiegelebenen: $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$ $(011)_0$ $(0\bar{1}1)_0$ $(101)_0$ $(10\bar{1})_0$.

Gleitspiegelebenen: $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$ $(011)_{\frac{1}{2}}$ $(0\bar{1}1)_{\frac{1}{2}}$ $(101)_{\frac{1}{2}}$ $(\bar{1}01)_{\frac{1}{2}}$.

Ferner die zu den Drehspiegelachsen gehörigen Drehspiegelebenen.

Zusammengehörige Koordinatenwerte: (I) und (II) der kubischen hemimorphen Hemiedrie ohne Zusatztranslationen.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ | Zähligkeit jeweilen = 1. Symmetriebedingung = T_d.
2. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ |

Diese Punktlagen bilden Gitter von der Form des einfachen Elementarparallelepipeds.

3. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ | Zähligkeit jeweilen = 3. Symmetrie-
4. $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ | bedingung = V_d.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Auf den trigonalen Drehungsachsen herrscht Vierzähligkeit. (Symmetriebedingung C_{3v}.) Die Komplexe der $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ gleichwertigen, sowie die Komplexe der $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ gleichwertigen Punkte bilden Gitter von der Form der allseitig flächenzentrierten Elementarwürfel.
2. Die tetragonalen Drehspiegelachsen sind Schnittlinien je zweier Spiegelebenen. Punkte auf ihnen müssen der Symmetriebedingung C_{2v} genügen, sie sind sechszählig. So gehören
   zu $[\![0\,0\,p]\!]$ die Punkte $[\![0\,0\,\bar{p}]\!]$ $[\![p\,0\,0]\!]$ $[\![\bar{p}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,p\,0]\!]$ $[\![0\,\bar{p}\,0]\!]$;
   zu $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,p]\!]$ die Punkte $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\bar{p}]\!]$ $]\![p\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{p}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,p\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\bar{p}\,\frac{1}{2}]\!]$.
3. Auf den nur digonalen Achsen ist die Zähligkeit 12, die Symmetriebedingung C_2.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Auf den Spiegelebenen allein sind die Punktlagen 12zählig.

Im übrigen herrscht bei allgemeiner Lage mit drei Freiheitsgraden 24-Zähligkeit.

Raumgruppe $\mathfrak{T}_d^2$

Die Scharenuntergruppen sind: $\mathfrak{S}_1^2$ $\mathfrak{S}_1^2$ $\mathfrak{S}_1^2$, $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$ $\mathfrak{C}_s^3$, $\mathfrak{C}_3^4$ $\mathfrak{C}_3^4$ $\mathfrak{C}_3^4$ $\mathfrak{C}_3^4$. $\mathfrak{T}^2$ mit $\mathfrak{C}_s^3$ charakterisieren das Raumsystem. Die tetragonal-sphenoidisch-hemiedrische Untergruppe ist $\mathfrak{V}_d^9$. Der Elementarwürfel ist flächenzentriert. Die Nullpunktslage entspricht der von $\mathfrak{T}_d^1$.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) $\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

III.) $0, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1; 1, 0, 0. V.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

Trigonale Achsen wie in $\mathfrak{T}^2$.

Tetragonale Drehspiegelachsen:

$[100]^{00}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{1}{2}0}$ $[100]^{0\frac{1}{2}}$ $^{00}[010]$ $^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{1}{2}0}[010]$ $^{0\frac{1}{2}}[010]$
$[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

$[100]^{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $^{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}[010]$ $^{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}[010]$
$[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$.

Digonale Schraubenachsen:
$[001]_{\frac{1}{4}0}$ $[001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{3}{4}0}$ $[001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}$ $[001]_{0\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$ $[001]_{0\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$,
sowie die entsprechenden Achsen parallel [010] und [100].

Spiegelebenen: $(110)_0$ $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_0$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$
$(011)_0$ $(011)_{\frac{1}{2}}$ $(0\bar{1}1)_0$ $(0\bar{1}1)_{\frac{1}{2}}$ $(101)_0$ $(101)_{\frac{1}{2}}$ $(\bar{1}01)_0$ $(\bar{1}01)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(110)_{\frac{1}{4}}$ $(110)_{\frac{3}{4}}$ usw.

Senkrecht zu den Drehspiegelachsen sind natürlich Drehspiegelebenen vorhanden.

Zusammengehörige Koordinatenwerte: Die Koordinatentripel der kubischen hemimorphen Hemiedrie von Seite 369 zunächst ohne Zusatztranslationen. Ferner zu jedem dieser Werte [[x, y, z]] die Werte:

$$[[x+\tfrac{1}{2}, y+\tfrac{1}{2}, z]]\ [[x+\tfrac{1}{2}, y, z+\tfrac{1}{2}]]\ [[x, y+\tfrac{1}{2}, z+\tfrac{1}{2}]].$$

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. [[0 0 0]] [[$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ 0]] [[$\frac{1}{2}$ 0 $\frac{1}{2}$]] [[0 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$]]
2. [[$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$]] [[$\frac{1}{2}$ 0 0]] [[0 $\frac{1}{2}$ 0]] [[0 0 $\frac{1}{2}$]]
3. [[$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$]] [[$\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$]] [[$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$]] [[$\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$]]
4. [[$\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$]] [[$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$]] [[$\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$]] [[$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$]]

Zähligkeit jeweilen = 4. Symmetriebedingung = T_d.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Die trigonalen Drehungsachsen sind Schnittlinien dreier Spiegelebenen. Der Symmetriebedingung C_{3v} entspricht die Zähligkeit 16.
2. Die tetragonalen Drehspiegelebenen, die als Drehungsachsen digonalen Charakter besitzen, sind Schnittkanten zweier Spiegelebenen (C_{2v}). Darauf liegende, im übrigen beliebige Punkte sind 24zählig.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Sie gehören den Spiegelebenen an und sind 48zählig.

Die allgemeinste Lage tritt in 96facher Zusammengehörigkeit im Elementarwürfel auf.

Raumgruppe $\mathfrak{T}_d^3$

Die Scharenuntergruppen sind die gleichen wie in $\mathfrak{T}_d^2$, doch charakterisieren jetzt $\mathfrak{T}^3$ und $\mathfrak{C}_s^3$ das Raumsystem. Der Elementarwürfel ist innenzentriert. Die tetragonal sphenoidisch-hemiedrische Untergruppe ist $\mathfrak{B}_d^{11}$. Der Nullpunkt hat gleiche Lage wie in $\mathfrak{T}_d^1$.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) $\frac{a}{2}, \frac{\bar{a}}{2}, \frac{a}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

III.) 0, 0, a; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1; 1, 0, 0. V.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

Symmetrieelemente: Trigonale Achsen wie $\mathfrak{T}^3$.

Tetragonale Drehspiegelachsen:

a) $[100]^{00}$ $[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $^{00}[010]$ $^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[010]$ $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

b) $[100]^{\frac{1}{2}0}$ $[100]^{0\frac{1}{2}}$ $^{0\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{1}{2}0}[010]$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Digonale Schraubenachsen: $[100]_{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $[100]_{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[100]_{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}$ $[100]_{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$, sowie die entsprechenden parallel [010] und [001].

Spiegelebenen: $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$ $(011)_0$ $(0\bar{1}1)_0$ $(101)_0$ $(\bar{1}01)_0$.

Gleitspiegelebenen: $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$ $(011)_{\frac{1}{2}}$ $(0\bar{1}1)_{\frac{1}{2}}$ $(101)_{\frac{1}{2}}$ $(\bar{1}01)_{\frac{1}{2}}$. Ferner zu den Drehspiegelachsen gehörige Drehspiegelebenen.

Zusammengehörige Koordinatenwerte: $\widetilde{(\bar{I})}$ und $\widetilde{(II)}$ der kubischen hemimorphen Hemiedrie zunächst ohne Zusatztranslationen. Ferner zu jedem der 24 Werte ein Wert: $[\![x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung = T_d.
   Die Punkte bilden Gitter von der Form des innenzentrierten Elementarwürfels.
2. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 6. Die Symmetriebedingung ist V_d.
3. $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$. Die Zähligkeit ist 12, die Symmetriebedingung = S_4.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Auf den trigonalen Drehungsachsen sind die Punkte 8zählig und gehorchen der Symmetriebedingung C_{3v}. Die mit $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ gleichwertigen Punkte bilden würfelförmige Gitter mit einem Maschenvolumen von $\frac{1}{8}$ des Elementarwürfels.
2. Die tetragonalen Drehspiegelachsen a) sind Schnittlinien zweier Symmetrieebenen. Die Punkte auf ihnen besitzen eine Zähligkeit = 12. Sie müssen der Symmetriebedingung C_{2v} genügen.
3. 24zählig sind die Punkte auf den übrigen tetragonalen Drehspiegelachsen bei beliebiger Lage. Einzige Symmetriebedingung ist C_2.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden. Die den Spiegelebenen allein angehörigen Punkte sind 24zählig. 48zählig sind die mit drei Freiheitsgraden behafteten Punkte allgemeiner Lage.

Raumgruppe $\mathfrak{T}_d^4$

Die Scharenuntergruppen lauten: $\mathfrak{S}_4^1$ $\mathfrak{S}_4^1$ $\mathfrak{S}_4^1$, $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$ $\mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_3^4$ $\mathfrak{C}_3^4$ $\mathfrak{C}_3^1$ $\mathfrak{C}_3^1$. $\mathfrak{T}^1$ mit $\mathfrak{C}_s^4$ charakterisieren das Raumsystem. In tetragonal

sphenoidisch-hemiedrischer Hinsicht lassen sich Gruppen $\mathfrak{V}_d^2$ erkennen. Der Koordinatenanfangspunkt des einfachprimitiven Elementarwürfels ist Schnittpunkt dreier trigonaler Drehungsachsen.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.) a, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) 0, a, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

III.) 0, 0, a; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1; 1, 0, 0. V.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}$; 0, 1, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

Trigonale Achsen wie in $\mathfrak{T}^1$.

Tetragonale Drehspiegelachsen:

$[100]^{0\,\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\,0}$ ${}^{0\,\frac{1}{2}}[010]$ ${}^{\frac{1}{2}\,0}[010]$ $[001]_{0\,\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\,0}$.

Digonale Drehungsachsen:

$[100]^{00}$ $[100]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$ ${}^{00}[010]$ ${}^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}[001]$ $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen:

$(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$ $(011)_0$ $(0\bar{1}1)_0$ $(101)_0$ $(\bar{1}01)_0$

$(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$ $(011)_{\frac{1}{2}}$ $(0\bar{1}1)_{\frac{1}{2}}$ $(101)_{\frac{1}{2}}$ $(\bar{1}01)_{\frac{1}{2}}$.

Die zu den Drehspiegelachsen gehörigen Drehspiegelachsen sind elementar von 4. Ordnung.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

(I). Die 12 ersten Werte der Koordinatentripel der hemimorphen Hemiedrie unverändert (ohne Zusatztranslationen), also wie in der Tetartoedrie (siehe Seite 354).

An Stelle von (II) der hemimorphen Hemiedrie treten die folgenden Werte:

$[\![n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![m+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, \bar{p}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![p+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{p}+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{p}+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![p+\frac{1}{2}, \bar{n}+\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung = T.
2. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 6. Die Symmetriebedingung lautet = V.
3. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$.
4. $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$.

Jede dieser zwei letzteren 6zähligen Punktlagen besitzt die Symmetriebedingung S_4. Einfache Gitter von der Form des innenzentrierten Elementarwürfels bildet nur 1.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Auf den trigonalen Drehungsachsen sind die Punkte 8zählig. Die $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ gleichwertigen Punkte bilden würfelförmige Gitter, deren Masche $\frac{1}{8}$ Volumen des Elementarwürfels einnimmt. Die Symmetriebedingung ist C_3.
2. Auf den digonalen Drehungsachsen und tetragonalen Drehspiegelachsen gehören bei beliebiger Lage (ausgenommen die erwähnten Örter ohne Freiheitsgrad) die Punkte einem 12zähligen Komplex an. (Symmetriebedingung C_2.)

Alle übrigen Punkte sind mit drei Freiheitsgraden 24zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{T}_d^5$

Die Scharenuntergruppen sind diesmal: $\mathfrak{S}_4^2\ \mathfrak{S}_4^2\ \mathfrak{S}_4^2$, $\mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4\ \mathfrak{C}_s^4$, $\mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4$. $\mathfrak{T}^2$ mit $\mathfrak{C}_s^4$ charakterisieren das System. Die tetragonal sphenoidisch-hemiedrischen Untergruppen sind mit $\mathfrak{V}_d^{10}$ zu bezeichnen. Der Elementarwürfel ist vierfachprimitiv, der Koordinatenanfangspunkt ist Schnittpunkt von vier trigonalen Drehungsachsen.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0;\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1.$ II.) $\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2};\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1.$

III.) $0, \frac{a}{2}, \frac{a}{2};\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1.$

IV.) $0,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1;\ 1,0,0.$ V.) $0,0,\frac{a}{2};\ 0,1,0;\ \bar{1},0,0;\ 0,0,\bar{1}.$

Symmetrieelemente: Abgesehen von der Zusammengehörigkeit gleiche Achsenlage wie in $\mathfrak{T}_d^2$. Hingegen haben sich die zu den Drehspiegelachsen gehörigen Drehspiegelebenen vertauscht und sind alle Symmetrieebenen Gleitspiegelebenen geworden.

Zusammengehörige Koordinatenwerte: Gleiche Koordinatenwerte wie in $\mathfrak{T}_d^4$, doch gehören zu jedem Punktsymbol noch die Symbole: $[\![x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z]\!]$ $[\![x+\frac{1}{2}, y, z+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![x, y+\frac{1}{2}, z+\frac{1}{2}]\!]$, so daß im ganzen $24 \cdot 4 = 96$ zusammengehörige allgemeine Punktlagen in einem Elementarwürfel auftreten.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

1. $[\![0\ 0\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ 0]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![0\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$.
2. $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$.

   Jede dieser zwei 8zähligen Punktlagen besitzt die Symmetriebedingung T. Würfelgitter mit einem Maschenvolumen von $\frac{1}{8}$ des Elementarvolumens werden gebildet.
3. $[\![0\ 0\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\ 0\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}]\!]$
   $[\![\frac{1}{4}\ 0\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ 0\ 0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$
   $[\![0\ \frac{1}{4}\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\ 0]\!]$ $[\![0\ \frac{3}{4}\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ 0]\!]$.

Alle diese 24 Punktlagen sind zusammengehörig. Die Symmetriebedingung ist S_4. In genau gleicher Weise bilden:

4. $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ 0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ 0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}]\!]$
$[\![0\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$
$[\![\frac{1}{4}\ 0\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ 0\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ 0\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ 0\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}]\!]$
einen zusammengehörigen Komplex, mit der Einzelsymmetriebedingung S_4.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Die Zähligkeit von Punkten, die nur den trigonalen Drehungsachsen angehören, ist 32 für den Elementarwürfel.

Die tetragonalen Drehspiegelachsen sind als Drehungsachsen digonal, so daß willkürlich auf ihnen liegende Punkte (immer ausgenommen die bereits abgeleiteten) 48zählig sind und einzig der Symmetriebedingung C_2 gehorchen müssen.

96zählig sind alle jene Punkte, denen drei Freiheitsgrade der Lageänderung zukommen.

Raumgruppe $\mathfrak{T}_d^6$

Die Scharenuntergruppen sind denen von $\mathfrak{T}^5$ gleich, doch ist $\mathfrak{T}^5$ mit $\mathfrak{C}_8^4$ charakteristisch. $\mathfrak{V}_d^{12}$ läßt sich als tetragonal sphenoidisch-hemiedrische Untergruppe erkennen. Der Elementarwürfel ist innenzentriert. Hier empfiehlt sich ein Abweichen von unserer Regel der Koordinatennullpunktswahl. Da alle drei Achsenscharen $\mathfrak{S}_4^2$ einander gleichwertig sind, sich aber nicht schneiden, würde es der Bevorziehung einer Schar gleichkommen, wenn der Anfangspunkt in den Schnittpunkt einer Drehspiegelachse mit einer Drehspiegelebene gelegt würde. Wir verlassen somit, im Einklang mit Schoenflies, das Prinzip der niedrigstzähligen Punktlagen und wählen als Koordinatenanfangspunkt den Schnittpunkt der trigonalen Achse mit den Gleitspiegelebenen.

Einfachste Decktransformationsbedingungen:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) $\frac{a}{2}, \frac{\bar{a}}{2}, \frac{a}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

III.) 0, 0, a; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1; 1, 0, 0. V.) $\frac{a}{4}, \frac{3a}{4}, \frac{a}{4}$; 0, 1, 0; 1, 0, 0; 0, 0, 1.

Symmetrieelemente: Trigonale Achsen wie in $\mathfrak{T}^5$.

Die digonalen Drehungsachsen von $\mathfrak{T}^5$ sind nun tetragonale Drehspiegelachsen. Die digonalen Schraubenachsen haben gleiche Lage wie in $\mathfrak{T}^5$.

Gleitspiegelebenen. Sie besitzen die Lage der Spiegelebenen und Gleitspiegelebenen von $\mathfrak{T}_d^3$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

An Stelle von (I) der Koordinatentripel der hemimorphen Hemiedrie die 12 Punktsymbole von $\mathfrak{T}^5$.

An Stelle von (II):

$[\![n+\frac{1}{4}, m+\frac{1}{4}, p+\frac{1}{4}]\!]\ [\![\bar{n}+\frac{1}{4}, m+\frac{1}{4}, \bar{p}-\frac{1}{4}]\!]\ [\![n+\frac{1}{4}, m-\frac{1}{4}, p+\frac{1}{4}]\!]\ [\![\bar{n}-\frac{1}{4}, m+\frac{1}{4}, p+\frac{1}{4}]\!]$
$[\![m+\frac{1}{4}, p+\frac{1}{4}, n+\frac{1}{4}]\!]\ [\![m+\frac{1}{4}, \bar{p}-\frac{1}{4}, \bar{n}+\frac{1}{4}]\!]\ [\![\bar{m}-\frac{1}{4}, \bar{p}+\frac{1}{4}, n+\frac{1}{4}]\!]\ [\![\bar{m}+\frac{1}{4}, p+\frac{1}{4}, \bar{n}-\frac{1}{4}]\!]$
$[\![p+\frac{1}{4}, n+\frac{1}{4}, m+\frac{1}{4}]\!]\ [\![\bar{p}-\frac{1}{4}, \bar{n}+\frac{1}{4}, m+\frac{1}{4}]\!]\ [\![\bar{p}+\frac{1}{4}, n+\frac{1}{4}, \bar{m}-\frac{1}{4}]\!]\ [\![p+\frac{1}{4}, \bar{n}-\frac{1}{4}, \bar{m}+\frac{1}{4}]\!]$.

Nennen wir irgend eines dieser 24 Wertetripel $[\![x, y, z]\!]$, so gehört dem gleichwertigen Komplex auch $[\![x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z+\frac{1}{2}]\!]$ an. Es entstehen so 48 zusammengehörige Symbole allgemeinster Art pro Elementarwürfel.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

1. $[\![0\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{8}]\!]\ [\![0\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{8}]\!]\ [\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{5}{8}]\!]\ [\![\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\ \frac{7}{8}]\!]\ [\![\frac{3}{8}\ 0\ \frac{1}{4}]\!]\ [\![\frac{1}{8}\ 0\ \frac{3}{4}]\!]\ [\![\frac{5}{8}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}]\!]\ [\![\frac{7}{8}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{4}]\!]\ [\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{8}\ 0]\!]\ [\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{8}\ 0]\!]$
$[\![\frac{1}{4}\ \frac{5}{8}\ \frac{1}{2}]\!]\ [\![\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\ \frac{7}{8}]\!]\ [\![\frac{7}{8}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{4}]\!]\ [\![\frac{3}{4}\ \frac{7}{8}\ \frac{1}{2}]\!]$;
2. $[\![0\ \frac{1}{4}\ \frac{7}{8}]\!]\ [\![0\ \frac{3}{4}\ \frac{5}{8}]\!]\ [\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}]\!]\ [\![\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{8}]\!]\ [\![\frac{7}{8}\ 0\ \frac{1}{4}]\!]\ [\![\frac{5}{8}\ 0\ \frac{3}{4}]\!]\ [\![\frac{1}{8}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}]\!]\ [\![\frac{3}{8}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{4}]\!]\ [\![\frac{1}{4}\ \frac{7}{8}\ 0]\!]\ [\![\frac{3}{4}\ \frac{5}{8}\ 0]\!]$
$[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{2}]\!]\ [\![\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{8}]\!]\ [\![\frac{3}{8}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{4}]\!]\ [\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{8}\ \frac{1}{2}]\!]$.

Jede dieser zwei Punktlagen ist 12zählig und enthält die Symmetriebedingung S_4. Durch diese Punkte sind also auch die Drehspiegelebenen bestimmt.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Auf den trigonalen Drehungsachsen ist irgend ein Punkt 16zählig; insonderheit bildet der Komplex des Nullpunktes innenzentrierte Würfelgitter von $\frac{1}{8}$ Volumen des Elementarwürfels. Außerhalb der Drehspiegelebenen ist eine tetragonale Drehspiegelachse nur als digonale Achse wirksam, so daß Punkte dieser Lagen 24zählig sind. (Symmetriebedingung C_2.)

Die mit drei Freiheitsgraden behafteten Punkte sind 48zählig.

$\mathfrak{D}$. Enantiomorph-hemiedrische Klasse der kubischen Abteilung (Pentagonikositetraedrische Klasse)

Die Koordinatentripel der enantiomorphen Hemiedrie, frei von Zusatztranslationen, lauten:

(I). $[\![m\ n\ p]\!]\ [\![m\ \bar{n}\ \bar{p}]\!]\ [\![m\ n\ \bar{p}]\!]\ [\![m\ \bar{n}\ p]\!]$
$[\![p\ m\ n]\!]\ [\![\bar{p}\ m\ \bar{n}]\!]\ [\![\bar{p}\ m\ n]\!]\ [\![p\ \bar{m}\ \bar{n}]\!]$
$[\![n\ p\ m]\!]\ [\![\bar{n}\ \bar{p}\ m]\!]\ [\![n\ \bar{p}\ \bar{m}]\!]\ [\![\bar{n}\ p\ \bar{m}]\!]$.

(II). $[\![\bar{n}\ m\ \bar{p}]\!]\ [\![n\ \bar{m}\ p]\!]\ [\![\bar{n}\ m\ p]\!]\ [\![n\ m\ \bar{p}]\!]$
$[\![m\ \bar{p}\ \bar{n}]\!]\ [\![\bar{m}\ p\ n]\!]\ [\![m\ p\ \bar{n}]\!]\ [\![m\ \bar{p}\ n]\!]$
$[\![\bar{p}\ n\ \bar{m}]\!]\ [\![p\ n\ \bar{m}]\!]\ [\![p\ \bar{n}\ m]\!]\ [\![\bar{p}\ n\ m]\!]$.

Raumgruppe $\mathfrak{O}^1$

Die Raumgruppen $\mathfrak{O}^1$, $\mathfrak{O}^2$, $\mathfrak{O}^6$, $\mathfrak{O}^7$ stehen mit einem einfachprimitiven Elementarwürfel in Verbindung. Die drei ersten Decktransformationsbedingungen lauten daher gemeinsam:

I.) a, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) 0, a, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.
III.) 0, 0, a; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Die Scharenuntergruppen von $\mathfrak{O}^1$ sind: $\mathfrak{C}_4^1\,\mathfrak{C}_4^1\,\mathfrak{C}_4^1$, $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_3^4\,\mathfrak{C}_3^4\,\mathfrak{C}_3^4\,\mathfrak{C}_3^4$. $\mathfrak{C}_4^1$ mit $\mathfrak{C}_3^4$ sind charakteristisch. Die tetragonal enantiomorphen Untergruppen sind $\mathfrak{D}_4^1$. Der Koordinatenanfangspunkt liegt im Schnittpunkt der tetragonalen Drehungsachsen. Die IV.) und V.) Decktransformationsbedingung lassen sich in der Form:

IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1; 1, 0, 0. V.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 0, 1

aufstellen.

Symmetrieelemente:

Tetragonale Drehungsachsen: $[100]^{00}$ $^{00}[010]$ $[001]_{00}$.
$[100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[010]$ $[001]_{00}$.

Digonale Drehungsachsen:

$[100]^{\frac{1}{2}0}$ $[100]^{0\frac{1}{2}}$ $^{0\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{1}{2}0}[010]$ $[001]_{\frac{1}{2}0}$ $[001]_{0\frac{1}{2}}$.

Trigonale Drehungsachsen: $[111]^{00}$ $[1\bar{1}1]^{00}$ $[11\bar{1}]^{00}$ $[1\bar{1}\bar{1}]^{00}$.
Dazu $8 = 4 + 4$ trigonale Schraubenachsen wie in $\mathfrak{T}^1$.

Digonale Drehungsachsen:

$[110]^{00}$ $[1\bar{1}0]^{00}$ $[101]^{00}$ $[10\bar{1}]^{00}$ $[011]^{00}$ $[0\bar{1}1]^{00}$;
$[110]^{0\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}0]^{0\frac{1}{2}}$ $[101]^{\frac{1}{2}0}$ $[10\bar{1}]^{\frac{1}{2}0}$ $^{\frac{1}{2}0}[011]$ $^{\frac{1}{2}0}[0\bar{1}1]$.

Digonale Schraubenachsen:

$[110]^{\frac{1}{2}0}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}0}$ usw. $[110]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ usw.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

(I) und (II) der enantiomorphen Hemiedrie frei von Zusatztranslationen. (Siehe Seite 376.)

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]$
2. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$

Zähligkeit jeweilen = 1. Symmetriebedingung = O.

Die Punkte bilden Gitter von der Form des Elementarparallelepipeds.

3. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$
4. $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$

Zähligkeit jeweilen = 3. Symmetriebedingung = D_4.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Auf den tetragonalen Drehungsachsen stellt sich bei beliebiger Lage 6-Zähligkeit ein. Die Symmetriebedingung ist C_4. So gehören beispielsweise zusammen: $[\![p\,0\,0]\!]$ $[\![\bar{p}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,p\,0]\!]$ $[\![0\,\bar{p}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,p]\!]$ $[\![0\,0\,\bar{p}]\!]$.
2. Die trigonalen Drehungsachsen beherbergen 8zählige Punkte. (Symmetriebedingung $= C_3$.) Die mit $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ gleichwertigen Lagen bilden Würfelgitter von $\frac{1}{8}$ Volumen des Elementarwürfels.
3. Die digonalen Drehungsachsen sind der geometrische Ort von 12zähligen Punkten. Die den tetragonalen Achsen parallelen Drehungsachsen verhalten sich nur hinsichtlich des zusammengehörigen Gitterkomplexes von denen der Nebenachsen verschieden.

Alle übrigen Punkte sind mit drei Freiheitsgraden 24zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{D}^2$

Die Scharenuntergruppen sind: $\mathfrak{C}_4^3\ \mathfrak{C}_4^3\ \mathfrak{C}_4^3$, $\mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4$. $\mathfrak{C}_4^3$ mit $\mathfrak{C}_3^4$ charakterisieren das Raumsystem. Die tetragonal-enantiomorphen Untergruppen müssen $\mathfrak{D}_4^5$ sein. Der Koordinatenanfangspunkt stimmt mit dem Schnittpunkt von vier trigonalen Drehungsachsen des einfachprimitiven Elementarwürfels überein, so daß die IV.) und V.) Decktransformationsbedingungen lauten:

IV.) 0, 0, 0: 0, 1, 0; 0, 0, 1; 1, 0, 0. V.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}$; 0, 1, 0; 1, 0, 0; 0, 0, 1.

Symmetrieelemente: Trigonale Achsen wie in $\mathfrak{D}^1$.

Tetragonale Schraubenachsen, zugleich digonale Drehungsachsen: $[100]^{\frac{1}{2}\,0}\ {}^{0\,\frac{1}{2}}[010]$ $[001]_{\frac{1}{2}\,0}$: $[100]^{0\,\frac{1}{2}}\ {}^{\frac{1}{2}\,0}[010]$ $[001]_{0\,\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen:

$[100]^{00}$ $[100]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}\ {}^{00}[010]$ ${}^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}[010]$ $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$;

ferner: $[110]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}}$ $[101]^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}$ $[10\bar{1}]^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}$ ${}^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}[011]$ ${}^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}[0\bar{1}1]$;

$[110]^{\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}}$ $[101]^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}$ $[10\bar{1}]^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}$ ${}^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}[011]$ ${}^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}[0\bar{1}1]$.

Dazu Schraubenachsen wie $[110]^{0\,\frac{1}{4}}$ $[110]^{0\,\frac{3}{4}}$ usw.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

(I) der enantiomorphen Hemiedrie (Seite 376) unverändert.

An Stelle von (II):

$[\![\bar{n}+\frac{1}{2},\bar{m}+\frac{1}{2},\bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2},\bar{m}+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},\bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{m}+\frac{1}{2},\bar{p}+\frac{1}{2},\bar{n}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2},\bar{n}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2},\bar{p}+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{p}+\frac{1}{2},\bar{n}+\frac{1}{2},\bar{m}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![p+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2},\bar{m}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![p+\frac{1}{2},\bar{n}+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{p}+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung = T.
Gitter von der Form eines innenzentrierten Elementarwürfels werden gebildet.

2. $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$
3. $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ } Zähligkeit jeweilen = 4.

Die Symmetriebedingung ist D_3. Die Punkte bilden Gitter von der Form allseitig flächenzentrierter Elementarwürfel.

4. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$.
5. $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$.
6. $[\![\frac{1}{4}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$.

Jede dieser drei letzteren Punktlagen ist, wie ersichtlich, 6zählig. Sie besitzen alle die Symmetriebedingung V.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

1. Nur den trigonalen Drehungsachsen angehörige Punkte sind 8zählig und besitzen die einfache Symmetriebedingung C_3.
2. Nur den digonalen Drehungsachsen angehörige Punkte bilden einen 12zähligen Komplex im Elementarwürfel.

Beispielsweise gehören zu:

$$[\![\mathrm{m}\,0\,0]\!]\quad [\![\bar{\mathrm{m}}\,0\,0]\!]\quad [\![0\,\mathrm{m}\,0]\!]\quad [\![0\,\bar{\mathrm{m}}\,0]\!]\quad [\![0\,0\,\mathrm{m}]\!]\quad [\![0\,0\,\bar{\mathrm{m}}]\!]$$

$$[\![\tfrac{1}{2},\mathrm{m}+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}]\!]\ [\![\tfrac{1}{2},\bar{\mathrm{m}}+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}]\!]\ [\![\mathrm{m}+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}]\!]\ [\![\bar{\mathrm{m}}+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}]\!]\ [\![\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\mathrm{m}+\tfrac{1}{2}]\!]\ [\![\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\bar{\mathrm{m}}+\tfrac{1}{2}]\!].$$

Die Punktlagen mit drei Freiheitsgraden sind 24zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{O}^3$

$\mathfrak{O}^3$ und $\mathfrak{O}^4$ enthalten einen vierfachprimitiven, allseitig flächenzentrierten Würfel als Elementarparallelepiped. Die drei ersten Decktransformationsbedingungen sind demgemäß:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0$: 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) $\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

III.) $0, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Die Scharenuntergruppen sind: $\mathfrak{C}_4^5\ \mathfrak{C}_4^5\ \mathfrak{C}_4^5$, $\mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4$. $\mathfrak{C}_4^5$ mit $\mathfrak{C}_3^4$ in Anordnung $\mathfrak{T}^2$ charakterisieren das Raumsystem. Die tetragonal enantiomorphen Untergruppen entsprechen $\mathfrak{D}_4^9$. Der Koordinatenanfangspunkt ist Schnittpunkt von vier trigonalen Drehungsachsen.

Die IV.) und V.) Decktransformationsbedingungen ergeben sich zu:

IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1; 1, 0, 0. V.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; 1, 0, 0; 0, 0, 1.

Symmetrieelemente: Trigonale Achsen wie $\mathfrak{T}^2$.

16 Drehungsachsen, 16 linke, 16 rechte Schraubenachsen.

Tetragonale Drehungsachsen: $[100]^{00}$ $[100]^{\frac{1}{2}\,0}$ $[100]^{0\,\frac{1}{2}}$ $[001]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$ $^{00}[010]$ $^{0\,\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{1}{2}\,0}[010]$ $^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}[010]$ $[001]_{00}$ $[001]_{\frac{1}{2}\,0}$ $[001]_{0\,\frac{1}{2}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$.

Tetragonale Schraubenachsen, die zugleich digonale Drehungsachsen sind: $[100]^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}}$ $^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}}[010]$ $^{\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}}[010]$ $[001]_{\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}}$.

Digonale Schraubenachsen gleicher Richtung: $[100]^{0\,\frac{1}{4}}$ $[100]^{0\,\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{4}\,0}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,0}$ $[100]^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}}$, sowie die entsprechenden Achsen parallel [010] und [001].

Digonale Drehungsachsen:

$[110]^{00}$ $[110]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}0]^{00}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$ $[101]^{00}$ $[101]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$ $[10\bar{1}]^{00}$ $[10\bar{1}]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$ $^{00}[011]$ $^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}[011]$ $^{00}[0\bar{1}1]$ $^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}[0\bar{1}1]$; $[110]^{0\,\frac{1}{2}}$ $[110]^{\frac{1}{2}\,0}$ $[1\bar{1}0]^{0\,\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\,0}$ $[101]^{0\,\frac{1}{2}}$ $[101]^{\frac{1}{2}\,0}$ $[10\bar{1}]^{0\,\frac{1}{2}}$ $[10\bar{1}]^{\frac{1}{2}\,0}$ $^{0\,\frac{1}{2}}[011]$ $^{\frac{1}{2}\,0}[011]$ $^{0\,\frac{1}{2}}[0\bar{1}1]$ $^{\frac{1}{2}\,0}[0\bar{1}1]$.

Ferner ihnen parallel digonale Schraubenachsen wie:

$[110]^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}}$ $[110]^{\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}}$ $[110]^{\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}}$ $[110]^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}}$ usw.

Zusammengehörige Koordinatenwerte: Zunächst die Koordinatentripel (I) und (II) der enantiomorphen Hemiedrie (Seite 376) ohne Zusatztranslationen. Zu jedem dieser mit $[\![x, y, z]\!]$ bezeichneten Symbole die Symbole $[\![x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z]\!]$ $[\![x+\frac{1}{2}, y, z+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![x, y+\frac{1}{2}, z+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ } Zähligkeit jeweilen = 4. Symmetrie-
2. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ } bedingung = O.

Die Punkte bilden Gitter von der Form des flächenzentrierten Elementarwürfels.

3. $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$. Die Zähligkeit ist 8, die Symmetriebedingung = T. Die Punkte bilden würfelförmige Gitter von $\frac{1}{8}$ Volumen des Elementarwürfels.

4. $[\![0\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$
$[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$
$[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$.

Die Zähligkeit einer derartigen Punktlage ist, wie ersichtlich, 24. Die Symmetriebedingung, die erfüllt sein muß, heißt V. Die Punkte stellen Flächenzentren von Würfelchen dar, deren Inhalt $\frac{1}{8}$ des Volumens des Elementarwürfels ist.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. 24zählig sind die Punkte auf den tetragonalen Drehungsachsen. Sie gehorchen der Symmetriebedingung C_4. So gehören beispielsweise die Kantenmitten der kleinen Würfelchen, deren Flächenmitten unter 4 gegebenen sind, zusammen. (Konstruktive Punktlage: $[\![\frac{1}{4}\,0\,0]\!]$.)

Auf den trigonalen Drehungsachsen treten beliebige Punkte 32mal im Elementarwürfel auf. (Symmetriebedingung: C_3.)

Die digonalen Drehungsachsen (inklusive tetragonale Schraubenachsen) beherbergen 48zählige Punkte.

96zählig sind die mit drei Freiheitsgraden behafteten Punktlagen, welche keinen Symmetriebedingungen gehorchen müssen.

Raumgruppe $\mathfrak{D}^4$

Die Scharenuntergruppen sind: $\mathfrak{C}_1^6\ \mathfrak{C}_1^6\ \mathfrak{C}_4^6$, $\mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4$. $\mathfrak{C}_4^6$ und $\mathfrak{C}_3^4$ charakterisieren das Raumsystem, dessen tetragonal enantiomorphe Untergruppen von der Art von $\mathfrak{D}_4^{10}$ sind. Ein Schnittpunkt der trigonalen Drehungsachsen ist Koordinatenanfangspunkt. Der Elementarwürfel ist flächenzentriert, die drei ersten Decktransformationsbedingungen sind soeben mitgeteilt worden.

IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1; 1, 0, 0. V.) $\frac{a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{4}$; 0, 1, 0; 1, 0, 0; 0, 0, 1.

Trigonale Achsen wie $\mathfrak{T}^2$ (16 Drehungsachsen, 16 + 16 Schraubenachsen).

Tetragonale Schraubenachsen: $[001]^{\frac{1}{4}\,0}\ [001]^{\frac{3}{4}\,0}\ [001]^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}\ [001]^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}$, sowie die entsprechenden Achsen parallel [100] und [010] als linke Achsen. $[001]^{0\,\frac{1}{4}}\ [001]^{0\,\frac{3}{4}}\ [001]^{\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}}\ [001]^{\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}}$ und die ihnen entsprechenden Achsen parallel [100] und [010] sind rechte Schraubenachsen.

Digonale Drehungsachsen:

$[100]^{00}\ [100]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}\ [100]^{\frac{1}{2}\,0}\ [100]^{0\,\frac{1}{2}}\ {}^{00}[010]\ {}^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}[010]\ {}^{0\,\frac{1}{2}}[010]\ {}^{\frac{1}{2}\,0}[010]$

$[001]_{00}\ [001]_{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}\ [001]_{\frac{1}{2}\,0}\ [001]_{0\,\frac{1}{2}}$. $[100]^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}}\ [100]^{\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}}\ [100]^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}}\ [100]^{\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}}$

${}^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}}[010]\ {}^{\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}}[110]\ {}^{\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}}[010]\ {}^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}}[010]\quad [001]_{\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}}\ [001]_{\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}}\ [001]_{\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}}\ [001]_{\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}}$

(alle 24 Achsen zusammengehörig).

Digonale Drehungsachsen parallel den Nebenachsen:

$[110]^{\frac{1}{4}\,\frac{3}{8}}\ [110]^{\frac{3}{4}\,\frac{3}{8}}\ [110]^{\frac{1}{4}\,\frac{7}{8}}\ [110]^{\frac{3}{4}\,\frac{7}{8}}\ [1\bar{1}0]^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}}\ [1\bar{1}0]^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{8}}\ [1\bar{1}0]^{\frac{1}{4}\,\frac{5}{8}}\ [1\bar{1}0]^{\frac{3}{4}\,\frac{5}{8}}$

$[101]^{\frac{3}{8}\,\frac{1}{4}}\ [101]^{\frac{3}{8}\,\frac{3}{4}}\ [101]^{\frac{7}{8}\,\frac{1}{4}}\ [101]^{\frac{7}{8}\,\frac{3}{4}}\ [10\bar{1}]^{\frac{1}{8}\,\frac{1}{4}}\ [10\bar{1}]^{\frac{1}{8}\,\frac{3}{4}}\ [10\bar{1}]^{\frac{5}{8}\,\frac{1}{4}}\ [10\bar{1}]^{\frac{5}{8}\,\frac{3}{4}}$

$^{\frac{3}{8}\,\frac{1}{4}}[011]\ ^{\frac{3}{8}\,\frac{3}{4}}[011]\ ^{\frac{7}{8}\,\frac{1}{4}}[011]\ ^{\frac{7}{8}\,\frac{3}{4}}[011]\ ^{\frac{1}{8}\,\frac{1}{4}}[0\bar{1}1]\ ^{\frac{1}{8}\,\frac{3}{4}}[0\bar{1}1]\ ^{\frac{5}{8}\,\frac{1}{4}}[0\bar{1}1]\ ^{\frac{5}{8}\,\frac{3}{4}}[0\bar{1}1]$.

Dazu 24 digonale Schraubenachsen wie:

$$[110]^{0\,\frac{1}{8}}\ [110]^{0\,\frac{5}{8}}\ [110]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{8}}\ [110]^{\frac{1}{2}\,\frac{5}{8}}\ \text{usw.}$$

Zusammengehörige Koordinatenwerte: (I) wie (Ī) von enantiomorpher Hemiedrie (ohne Zusatztranslationen siehe Seite 376).

An Stelle von (II):

$[\![n+\frac{1}{4}, m+\frac{1}{4}, p+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{4}, m+\frac{1}{4}, p+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{4}, m+\frac{1}{4}, p+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{4}, \bar{m}+\frac{1}{4}, p+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{4}, m+\frac{1}{4}, \bar{p}+\frac{1}{4}]\!]$
$[\![m+\frac{1}{4}, p+\frac{1}{4}, n+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{4}, p+\frac{1}{4}, n+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{4}, \bar{p}+\frac{1}{4}, n+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{4}, p+\frac{1}{4}, \bar{n}+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{4}, \bar{p}+\frac{1}{4}, n+\frac{1}{4}]\!]$
$[\![p+\frac{1}{4}, n+\frac{1}{4}, m+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![p+\frac{1}{4}, n+\frac{1}{4}, m+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![p+\frac{1}{4}, \bar{n}+\frac{1}{4}, m+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\bar{p}+\frac{1}{4}, n+\frac{1}{4}, m+\frac{1}{4}]\!]$.

Außerdem zu jedem dieser 24 Symbole $[\![x, y, z]\!]$ die Symbole $[\![x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z]\!]$ $[\![x+\frac{1}{2}, y, z+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![x, y+\frac{1}{2}, z+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$.
2. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$.

Beide Punktlagen sind 8zählig. Sie besitzen die Symmetriebedingung T und bilden sogenannte „Diamantgitter".

3. $[\![\frac{1}{8}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\,\frac{7}{8}\,\frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\,\frac{1}{8}\,\frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\,\frac{7}{8}\,\frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\,\frac{5}{8}\,\frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\,\frac{3}{8}\,\frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\,\frac{5}{8}\,\frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\,\frac{3}{8}\,\frac{1}{8}]\!]$
$[\![\frac{5}{8}\,\frac{1}{8}\,\frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\,\frac{7}{8}\,\frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\,\frac{1}{8}\,\frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\,\frac{7}{8}\,\frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\,\frac{5}{8}\,\frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\,\frac{3}{8}\,\frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\,\frac{3}{8}\,\frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\,\frac{5}{8}\,\frac{3}{8}]\!]$.
4. $[\![\frac{5}{8}\,\frac{5}{8}\,\frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\,\frac{3}{8}\,\frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\,\frac{5}{8}\,\frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\,\frac{3}{8}\,\frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\,\frac{1}{8}\,\frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\,\frac{7}{8}\,\frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\,\frac{1}{8}\,\frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\,\frac{7}{8}\,\frac{5}{8}]\!]$
$[\![\frac{1}{8}\,\frac{5}{8}\,\frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\,\frac{3}{8}\,\frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\,\frac{5}{8}\,\frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\,\frac{3}{8}\,\frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\,\frac{7}{8}\,\frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\,\frac{1}{8}\,\frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\,\frac{7}{8}\,\frac{1}{8}]\!]$.

Die Punktlagen 3 und 4 sind einzeln 16zählig. Die Symmetriebedingung ist durch D_3 gegeben. Beide zusammen bilden Ecken und Flächenzentren von Würfelchen von $\frac{1}{8}$ Volumen des Elementarwürfels.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Auf den trigonalen Drehungsachsen sind (bei beliebiger Lage) die Punkte 32zählig. Symmetriebedingung C_3. Auf den digonalen Achsen allein liegende Punkte treten im Elementarwürfel in 48zähligen Komplexen auf.

96zählig sind Punktlagen, die keinerlei Symmetriebedingungen gehorchen müssen.

Raumgruppe $\mathfrak{O}^5$

Die Raumgruppen $\mathfrak{O}^5$ und $\mathfrak{O}^8$ müssen auf innenzentrierte Elementarwürfel bezogen werden, so daß die drei ersten Decktransformationsbedingungen lauten:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}$: 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) $\frac{a}{2}, \frac{\bar{a}}{2}, \frac{a}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0: 0, 0, 1.

III.) 0, 0, a; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Die Scharenuntergruppen von $\mathfrak{O}^5$ entsprechen denen von $\mathfrak{O}^8$, doch findet sich $\mathfrak{C}_4^5$ nun in Anordnung $\mathfrak{V}^8$ vor, beziehungsweise $\mathfrak{C}_4^5$ mit $\mathfrak{C}_3^4$ in der Anordnung $\mathfrak{T}^8$. Demgemäß ist wiederum $\mathfrak{D}_4^9$ die tetragonal

enantiomorphe Untergruppe. Der Schnittpunkt von vier trigonalen Drehungsachsen ist Koordinatenanfangspunkt.

IV.) Decktransformationsbedingung: 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1; 1, 0, 0.

V.) „ 0, 0, 0; 0, 1, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 0, 1.

Symmetrieelemente: Trigonale Achsen wie in $\mathfrak{T}^3$.

Tetragonale Drehungsachsen:

$$[100]^{00}\ [100]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\ {}^{00}[010]\ {}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}[010]\ [001]_{00}\ [001]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}.$$

Tetragonale Schraubenachsen zugleich digonale Drehungsachsen:

$$[100]^{0\frac{1}{2}}\ [100]^{\frac{1}{2}0}\ {}^{\frac{1}{2}0}[010]\ {}^{0\frac{1}{2}}[010]\ [001]_{0\frac{1}{2}}\ [001]_{\frac{1}{2}0}.$$

Digonale Schraubenachsen: $[100]^{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}\ [100]^{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}\ [100]^{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}\ [100]^{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$, sowie die entsprechenden Achsen parallel [010] und [001].

Digonale Drehungsachsen parallel den Nebenachsen:

$[110]^{00}\ [110]^{0\frac{1}{2}}\ [1\bar{1}0]^{00}\ [1\bar{1}0]^{0\frac{1}{2}}\ [101]^{00}\ [101]^{\frac{1}{2}0}\ [10\bar{1}]^{00}\ [10\bar{1}]^{\frac{1}{2}0}$
${}^{00}[011]\ {}^{\frac{1}{2}0}[011]\ {}^{00}[0\bar{1}1]\ {}^{\frac{1}{2}0}[0\bar{1}1];\ [110]^{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}\ [110]^{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}\ [1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}\ [1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$
$[101]^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}\ [101]^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}\ [10\bar{1}]^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}\ [10\bar{1}]^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}\ {}^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}[011]\ {}^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}[011]\ {}^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}[0\bar{1}1]\ {}^{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}[0\bar{1}1]$.
Dazu 24 Schraubenachsen wie: $[110]^{\frac{1}{2}0}\ [110]^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\ [110]^{0\frac{1}{4}}\ [110]^{0\frac{3}{4}}$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte: Die Koordinatentripel von (I) und (II) der enantiomorphen Hemiedrie (Seite 376) unverändert.

Außerdem zu jedem dieser 24 Symbole [[x, y, z]] die Symbole:

$$[[x + \tfrac{1}{2},\ y + \tfrac{1}{2},\ z + \tfrac{1}{2}]].$$

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. [[0 0 0]] [[$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$]]. Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung = O.
   Gitter von der Form des innenzentrierten Elementarwürfels werden gebildet.
2. [[$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ 0]] [[$\frac{1}{2}$ 0 $\frac{1}{2}$]] [[0 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$]] [[$\frac{1}{2}$ 0 0]] [[0 $\frac{1}{2}$ 0]] [[0 0 $\frac{1}{2}$]]. Zähligkeit = 6. Die Symmetriebedingung ist D_4.
3. [[$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$]] [[$\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$]] [[$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$]] [[$\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$]] [[$\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$]] [[$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$]] [[$\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$]] [[$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$]]. Zähligkeit = 8. Die Symmetriebedingung lautet D_3. Die Punkte bilden würfelförmige Gitter von $\frac{1}{8}$ Volumen des Elementarwürfels. ($\frac{1}{2}$ Kantenlänge.)
4. [[$\frac{1}{2}$ 0 $\frac{1}{4}$]] [[$\frac{1}{2}$ 0 $\frac{3}{4}$]] [[$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ 0]] [[$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$ 0]] [[0 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$]] [[0 $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$]] [[$\frac{1}{4}$ 0 $\frac{1}{2}$]] [[$\frac{3}{4}$ 0 $\frac{1}{2}$]]
   [[$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ 0]] [[$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ 0]] [[0 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$]] [[0 $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$]].
   Die Zähligkeit dieser Punktlage ist 12. Die Symmetriebedingung entspricht V. Die Punkte bilden einen Teil der Kantenmitten der kleinen Teilwürfelchen, deren Zentren durch 3 gegeben sind.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad:

1. Den tetragonalen Drehungsachsen sind 12zählige Punkte eigen. Es gehören zusammen:
   $[\bar{m}, 0, 0]$ $[\bar{m}, 0, 0]$ $[0, m, 0]$ $[0, \bar{m}, 0]$ $[0, 0, m]$ $[0, 0, \bar{m}]$ $[m+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ $[\bar{m}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \bar{m}+\frac{1}{2}]$.
   Die Symmetriebedingung ist C_4.
2. Die trigonalen Achsen beherbergen 16zählige Punktlagen mit der Bedingung C_3.
3. Auf den digonalen Achsen ist die Zähligkeit 24 vorhanden. (C_2.) Zu $[m\ m\ 0]$ gehören beispielsweise $[\bar{m}\ m\ 0]$ $[m\ \bar{m}\ 0]$ $[\bar{m}\ \bar{m}\ 0]$ $[0\ m\ m]$ $[0\ m\ \bar{m}]$ $[0\ \bar{m}\ m]$ $[m\ 0\ m]$ $[\bar{m}\ 0\ m]$ $[m\ 0\ \bar{m}]$, sowie alle Werte, die aus diesen mittelst zusätzlichen Translationen $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ hervorgehen.

Die Punktlagen mit drei Freiheitsgraden treten 48mal im Elementarwürfel auf.

Die Raumgruppen $\mathfrak{O}^6$ und $\mathfrak{O}^7$

Beide Raumgruppen besitzen den einfachprimitiven Würfel als Translationsgruppe, für beide ist $\mathfrak{T}^4$ Untergruppe. Sie unterscheiden sich voneinander lediglich durch den Windungssinn der tetragonalen Schraubenachsen.

Die Scharenuntergruppen sind deshalb $\mathfrak{C}_4^2\ \mathfrak{C}_1^2\ \mathfrak{C}_4^2$ beziehungsweise $\mathfrak{C}_4^4\ \mathfrak{C}_1^4\ \mathfrak{C}_4^4$, mit $\mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3\ \mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4\ \mathfrak{C}_3^4$. $\mathfrak{D}_4^8$ oder $\mathfrak{D}_4^4$ sind in tetragonal enantiomorpher Hinsicht vorhanden.

Es kann hier zweifelhaft sein, wie man den Nullpunkt wählen soll. Gibt man ihm gleiche Lage wie in $\mathfrak{T}^4$, so fällt er nicht mit dem niedrigstzähligen Punkt überein, besitzt aber eine symmetrische Verteilung der Achsen um sich. Anderseits mag es erwünscht sein, den nur vierzähligen Punkten möglichst einfache Symbole zu geben. Im letzteren Falle ist der Koordinatenanfangspunkt Schnittpunkt einer trigonalen Drehungsachse mit drei digonalen Drehungsachsen. Darauf bezogen lauten die Decktransformationsbedingungen für $\mathfrak{O}^6$:

IV.) $0, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, 1;\ 1, 0, 0.$ V.) $\frac{3a}{4}, \frac{a}{2}, \frac{a}{4};\ 0, 1, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, 0, 1.$

Trigonale Drehungsachsen: $[111]^{00}$ $[1\bar{1}\bar{1}]^{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$ $[\bar{1}1\bar{1}]^{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}$ $[\bar{1}\bar{1}1]^{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$.
Dazu 8 trigonale Schraubenachsen.

Tetragonale Schraubenachsen: $[001]_{\frac{1}{8}\frac{3}{8}}$ $[001]_{\frac{5}{8}\frac{7}{8}}$, sowie die entsprechenden parallel [100] und [001].

Digonale Schraubenachsen: $[001]_{\frac{5}{8}\frac{3}{8}}$ $[001]_{\frac{1}{8}\frac{7}{8}}$, sowie die entsprechenden parallel [100] und [001].

Digonale Drehungsachsen:

$[1\bar{1}0]^{00}$ $[1\bar{1}0]^{0\frac{1}{2}}$ $[10\bar{1}]^{00}$ $[10\bar{1}]^{\frac{1}{2}0}$ $^{00}[0\bar{1}1]$ $^{\frac{1}{2}0}[0\bar{1}1]$

$[110]^{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$ $[110]^{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}$ $[101]^{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}$ $[101]^{\frac{1}{4}\frac{1}{4}}$ $^{\frac{1}{4}\frac{3}{4}}[011]$ $^{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}[011]$.

Dazu 12 Schraubenachsen.

Zusammengehörige Koordinatenwerte ($\mathfrak{O}^6$):

(I). $[\mathrm{m\,n\,p}]$ $[\mathrm{m}+\frac{1}{2},\bar{\mathrm{n}}+\frac{1}{4},\bar{\mathrm{p}}+\frac{3}{4}]$ $[\mathrm{m}+\frac{3}{4},\mathrm{n}+\frac{1}{2},\bar{\mathrm{p}}+\frac{1}{4}]$ $[\bar{\mathrm{m}}+\frac{1}{4},\bar{\mathrm{n}}+\frac{3}{4},\mathrm{p}+\frac{1}{2}]$
$[\mathrm{p\,m\,n}]$ $[\bar{\mathrm{p}}+\frac{3}{4},\mathrm{m}+\frac{1}{2},\bar{\mathrm{n}}+\frac{1}{4}]$ $[\bar{\mathrm{p}}+\frac{1}{4},\bar{\mathrm{m}}+\frac{3}{4},\mathrm{n}+\frac{1}{2}]$ $[\mathrm{p}+\frac{1}{2},\bar{\mathrm{m}}+\frac{1}{4},\bar{\mathrm{n}}+\frac{3}{4}]$
$[\mathrm{n\,p\,m}]$ $[\bar{\mathrm{n}}+\frac{1}{4},\bar{\mathrm{p}}+\frac{3}{4},\mathrm{m}+\frac{1}{2}]$ $[\mathrm{n}+\frac{1}{2},\bar{\mathrm{p}}+\frac{1}{4},\bar{\mathrm{m}}+\frac{3}{4}]$ $[\bar{\mathrm{n}}+\frac{3}{4},\mathrm{p}+\frac{1}{2},\bar{\mathrm{m}}+\frac{1}{4}]$.

(II). $[\bar{\mathrm{n}}\,\bar{\mathrm{m}}\,\mathrm{p}]$ $[\mathrm{n}+\frac{3}{4},\bar{\mathrm{m}}+\frac{1}{2},\mathrm{p}+\frac{1}{4}]$ $[\bar{\mathrm{n}}+\frac{1}{2},\mathrm{m}+\frac{1}{4},\mathrm{p}+\frac{3}{4}]$ $[\mathrm{n}+\frac{1}{4},\mathrm{m}+\frac{3}{4},\bar{\mathrm{p}}+\frac{1}{2}]$
$[\mathrm{m}\,\bar{\mathrm{p}}\,\bar{\mathrm{n}}]$ $[\bar{\mathrm{m}}+\frac{1}{2},\mathrm{p}+\frac{1}{4},\mathrm{n}+\frac{3}{4}]$ $[\mathrm{m}+\frac{1}{4},\mathrm{p}+\frac{3}{4},\bar{\mathrm{n}}+\frac{1}{2}]$ $[\mathrm{m}+\frac{3}{4},\bar{\mathrm{p}}+\frac{1}{2},\mathrm{n}+\frac{1}{4}]$
$[\bar{\mathrm{p}}\,\bar{\mathrm{n}}\,\bar{\mathrm{m}}]$ $[\mathrm{p}+\frac{1}{4},\mathrm{n}+\frac{3}{4},\mathrm{m}+\frac{1}{2}]$ $[\mathrm{p}+\frac{3}{4},\mathrm{n}+\frac{1}{2},\mathrm{m}+\frac{1}{4}]$ $[\bar{\mathrm{p}}+\frac{1}{2},\mathrm{n}+\frac{1}{4},\mathrm{m}+\frac{3}{4}]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

1. $[0\,0\,0]$ $[\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]$ $[\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]$ $[\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]$. 2. $[\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]$ $[0\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]$ $[\frac{1}{4}\,0\,\frac{3}{4}]$ $[\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,0]$.

Jede dieser Punktlagen ist 4zählig. Die Symmetriebedingung lautet: D_3.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

Die den trigonalen Drehungsachsen angehörigen Punkte sind 8zählig.

Zu $[\frac{1}{8}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{8}]$ gehören $[\frac{5}{8}\,\frac{1}{8}\,\frac{5}{8}]$ $[\frac{5}{8}\,\frac{5}{8}\,\frac{1}{8}]$ $[\frac{1}{8}\,\frac{5}{8}\,\frac{5}{8}]$ $[\frac{7}{8}\,\frac{7}{8}\,\frac{7}{8}]$ $[\frac{7}{8}\,\frac{3}{8}\,\frac{3}{8}]$ $[\frac{3}{8}\,\frac{3}{8}\,\frac{7}{8}]$ $[\frac{3}{8}\,\frac{7}{8}\,\frac{3}{8}]$.
Zu $[\frac{3}{8}\,\frac{3}{8}\,\frac{3}{8}]$ gehören $[\frac{7}{8}\,\frac{7}{8}\,\frac{3}{8}]$ $[\frac{3}{8}\,\frac{7}{8}\,\frac{7}{8}]$ $[\frac{7}{8}\,\frac{3}{8}\,\frac{7}{8}]$ $[\frac{5}{8}\,\frac{5}{8}\,\frac{5}{8}]$ $[\frac{1}{8}\,\frac{1}{8}\,\frac{5}{8}]$ $[\frac{1}{8}\,\frac{5}{8}\,\frac{1}{8}]$ $[\frac{5}{8}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{8}]$.

In diesen beiden Fällen werden „Diamantgitter" gebildet.

Auf den digonalen Drehungsachsen sind die Punktlagen 12zählig. (Symmetriebedingung C_2.)

Zu $[0\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]$ gehören beispielsweise $[\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{5}{4}\,\frac{3}{4}\,0]$ $[\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]$ $[\frac{1}{4}\,0\,\frac{1}{4}]$ $[\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]$ $[0\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]$ $[\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]$ $[[\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,0]$ $[0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]$ $[\frac{3}{4}\,0\,\frac{3}{4}]$ $[\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]$.

24zählig sind die Punktlagen mit drei Freiheitsgraden.

Die dem verschiedenen Windungssinn der tetragonalen Schraubenachsen entsprechende Achsenvertauschung für $\mathfrak{O}^7$ ist leicht anzubringen. Die vierzähligen Punktlagen ohne Freiheitsgrad werden zu:

1. $[0\,0\,0]$ $[\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]$ $[\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]$ $[\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}0]$. 2. $[\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]$ $[0\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]$ $[\frac{3}{4}\,0\,\frac{1}{4}]$ $[\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,0]$.

Raumgruppe $\mathfrak{O}^8$ (Fig. 161)

Die Scharenuntergruppen sind: $\mathfrak{C}_4^6\,\mathfrak{C}_4^6\,\mathfrak{C}_4^6$, $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_3^4\,\mathfrak{C}_3^4\,\mathfrak{C}_3^4\,\mathfrak{C}_3^4$. $\mathfrak{T}^5$ ist tetartoedrische, $\mathfrak{D}_4^{10}$ tetragonal enantiomorphe Untergruppe. Der Elementarwürfel ist innenzentriert, die drei ersten Decktransformationsbedingungen entsprechen denen von $\mathfrak{O}^5$ (Seite 382). Dem Koordinatenanfangspunkt gibt man zweckmäßig eine analoge Lage wie in $\mathfrak{O}^6$ $\mathfrak{O}^7$. Er ist Schnittpunkt einer trigonalen Drehungsachse mit drei digonalen Drehungsachsen.

IV.) Decktransformationsbedingung: 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1; 1, 0, 0.

V.) „ $\frac{3a}{4}, \frac{a}{2}, \frac{a}{4}$; 0, 1, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 0, 1.

Trigonale Achsen wie in $\mathfrak{D}^6$ und $\mathfrak{D}^7$.

Die tetragonalen Schraubenachsen von $\mathfrak{D}^6$ und $\mathfrak{D}^7$ sind gleichzeitig vorhanden.

Linke tetragonale Schraubenachsen: $[001]_{\frac{1}{8}\frac{3}{8}}$ $[001]_{\frac{5}{8}\frac{7}{8}}$, sowie die entsprechenden parallel [100] und [010].

Rechte tetragonale Schraubenachsen: $[001]_{\frac{1}{8}\frac{7}{8}}$ $[001]_{\frac{5}{8}\frac{3}{8}}$, sowie diejenigen parallel [100] und [010].

Digonale Drehungsachsen: $[001]_{\frac{3}{8}\frac{1}{8}}$ $[001]_{\frac{7}{8}\frac{1}{8}}$ $[001]_{\frac{3}{8}\frac{5}{8}}$ $[001]_{\frac{7}{8}\frac{5}{8}}$ $[100]^{\frac{7}{8}\frac{1}{8}}$ $[100]^{\frac{3}{8}\frac{1}{8}}$ $[100]^{\frac{7}{8}\frac{5}{8}}$ $[100]^{\frac{3}{8}\frac{5}{8}}$. $^{\frac{1}{8}\frac{7}{8}}[010]$ $^{\frac{5}{8}\frac{3}{8}}[010]$ $^{\frac{5}{8}\frac{7}{8}}[010]$ $^{\frac{1}{8}\frac{3}{8}}[010]$.

Ferner digonale Drehungsachsen parallel den Nebenachsen: Die Achsen von $\mathfrak{D}^6$ und $\mathfrak{D}^7$ sind gleichzeitig vorhanden.

Z. B. $[1\bar{1}0]^{00}$ $[1\bar{1}0]^{0\frac{1}{2}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$.

Auch 24 den Nebenachsen parallele digonale Schraubenachsen finden sich vor.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

(I). [m n p] [m, $\bar{n}+\frac{3}{4}$, $\bar{p}+\frac{1}{4}$] [$\bar{m}+\frac{1}{4}$, n, $\bar{p}+\frac{3}{4}$] [$\bar{m}+\frac{3}{4}$, $\bar{n}+\frac{1}{4}$, p]
[p m n] [$\bar{p}+\frac{1}{4}$, m, $n+\frac{3}{4}$] [$\bar{p}+\frac{3}{4}$, $\bar{m}+\frac{1}{4}$, n] [p, $\bar{m}+\frac{3}{4}$, $\bar{n}+\frac{1}{4}$]
[n p m] [$\bar{n}+\frac{3}{4}$, $\bar{p}+\frac{1}{4}$, m] [n, $\bar{p}+\frac{3}{4}$, $\bar{m}+\frac{1}{4}$] [$\bar{n}+\frac{1}{4}$, p, $\bar{m}+\frac{3}{4}$]

(II). [$\bar{n}$ $\bar{m}$ $\bar{p}$] [$n+\frac{3}{4}$, $\bar{m}+\frac{1}{2}$, $p+\frac{1}{4}$] [$\bar{n}+\frac{1}{2}$, $m+\frac{1}{4}$, $p+\frac{3}{4}$] [$n+\frac{1}{4}$, $m+\frac{3}{4}$, $\bar{p}+\frac{1}{2}$]
[$\bar{m}$ $\bar{p}$ $\bar{n}$] [$\bar{m}+\frac{1}{2}$, $p+\frac{1}{4}$, $n+\frac{3}{4}$] [$m+\frac{1}{4}$, $p+\frac{3}{4}$, $\bar{n}+\frac{1}{2}$] [$m+\frac{3}{4}$, $\bar{p}+\frac{1}{2}$, $n+\frac{1}{4}$]
[$\bar{p}$ $\bar{n}$ $\bar{m}$] [$p+\frac{1}{4}$, $n+\frac{3}{4}$, $\bar{m}+\frac{1}{2}$] [$p+\frac{3}{4}$, $\bar{n}+\frac{1}{2}$, $m+\frac{1}{4}$] [$\bar{p}+\frac{1}{2}$, $n+\frac{1}{4}$, $m+\frac{3}{4}$].

Ferner zu jedem dieser Werte [x, y, z] ein Wert $[x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z+\frac{1}{2}]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. [0 0 0] [0 $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$] [$\frac{1}{4}$ 0 $\frac{3}{4}$] [$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$ 0] [$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$] [$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$] [$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$] [$\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$]
2. [$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$] [$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ 0] [0 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$] [$\frac{1}{2}$ 0 $\frac{1}{4}$] [$\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$] [$\frac{3}{4}$ 0 $\frac{1}{2}$] [$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ 0] [0 $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$].

Beide Punktlagen sind 8zählig und müssen einer Symmetriebedingung D_3 genügen.

3. [$\frac{1}{8}$ 0 $\frac{7}{8}$] [$\frac{1}{8}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{8}$] [$\frac{5}{8}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{8}$] [$\frac{5}{8}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{7}{8}$] [$\frac{7}{8}$ $\frac{1}{8}$ 0] [$\frac{3}{8}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{3}{4}$] [$\frac{7}{8}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{1}{4}$] [0 $\frac{7}{8}$ $\frac{1}{8}$]
[$\frac{3}{4}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{1}{8}$] [$\frac{3}{8}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{1}{2}$] [$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{5}{8}$] [$\frac{1}{4}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{5}{8}$].
4. [$\frac{5}{8}$ 0 $\frac{3}{8}$] [$\frac{5}{8}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{7}{8}$] [$\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{7}{8}$] [$\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{8}$] [$\frac{3}{8}$ $\frac{5}{8}$ 0] [$\frac{7}{8}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{3}{4}$] [$\frac{7}{8}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}$] [0 $\frac{3}{8}$ $\frac{5}{8}$]
[$\frac{3}{8}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$] [$\frac{3}{4}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{5}{8}$] [$\frac{1}{2}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{1}{8}$] [$\frac{1}{4}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{1}{8}$].

Die Punktlagen 3 und 4 sind 12zählig. Jeder Punkt ist Schnittpunkt dreier digonaler Drehungsachsen. (V.)

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Auf den trigonalen Achsen liegen 16zählige Punkte. Die unter $\mathfrak{O}^6$ angeführten Punktkomplexe $[\![\frac{1}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{8}]\!]$ und $[\![\frac{3}{8}\ \frac{3}{8}\ \frac{3}{8}]\!]$ gehören jetzt zusammen und bilden innenzentrierte Würfelgitter mit einer Würfelmasche von $\frac{1}{8}$ Volumen des Elementarwürfels.

24zählig sind diejenigen Punkte, welche nur digonalen Achsen angehören.

48zählig sind alle übrigen Punktlagen mit drei Freiheitsgraden.

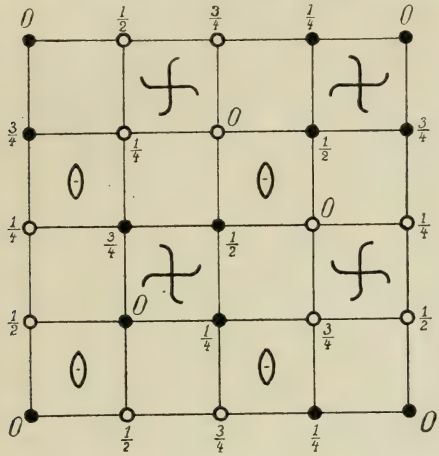


Fig. 161. $\mathfrak{O}^8$ Die Lagen der Achsen [001], sowie der Punkte ohne Freiheitsgrad. Die Höhenquoten über der Grundfläche sind den zweierlei Punkten beigeschrieben.

In der Fig. 161 sind, abweichend vom sonstigen Verfahren, die achtzähligen Punktlagen eingezeichnet und auf $(001)_0$ projiziert, indem die Höhe der z-Koordinate jeweilen beigeschrieben ist. Ferner sind die auf (001) senkrecht stehenden tetragonalen Schraubenachsen und digonalen Drehungsachsen durch die üblichen Symbole markiert.

$\mathfrak{O}_h$. Holoedrische Klasse der kubischen Abteilung (Hexakisoktaedrische Klasse)

Zu den Koordinatentripeln (I) und (II) der enantiomorphen Hemiedrie kommen noch:

(III). $[\![\bar{m}\ \bar{n}\ p]\!]$ $[\![\bar{m}\ n\ p]\!]$ $[\![m\ \bar{n}\ p]\!]$ $[\![m\ n\ \bar{p}]\!]$
$[\![\bar{p}\ \bar{m}\ \bar{n}]\!]$ $[\![p\ \bar{m}\ n]\!]$ $[\![p\ m\ \bar{n}]\!]$ $[\![\bar{p}\ m\ n]\!]$
$[\![\bar{n}\ \bar{p}\ \bar{m}]\!]$ $[\![n\ p\ \bar{m}]\!]$ $[\![\bar{n}\ p\ m]\!]$ $[\![n\ \bar{p}\ m]\!]$

(IV). $[\![n\ m\ p]\!]$ $[\![\bar{n}\ m\ p]\!]$ $[\![n\ \bar{m}\ \bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}\ \bar{m}\ p]\!]$
$[\![m\ p\ n]\!]$ $[\![\bar{m}\ \bar{p}\ n]\!]$ $[\![\bar{m}\ p\ \bar{n}]\!]$ $[\![m\ \bar{p}\ \bar{n}]\!]$
$[\![p\ n\ m]\!]$ $[\![\bar{p}\ \bar{n}\ m]\!]$ $[\![\bar{p}\ n\ \bar{m}]\!]$ $[\![p\ \bar{n}\ \bar{m}]\!]$.

Raumgruppe $\mathfrak{O}_h^1$

Die Raumgruppen $\mathfrak{O}_h^1$ und $\mathfrak{O}_h^2$ besitzen $\mathfrak{O}^1$ als Untergruppe. Bei entsprechender Koordinatennullpunktswahl werden somit die fünf ersten Decktransformationsbedingungen für beide Gruppen lauten:

I.) a, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) 0, a, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.
III.) 0, 0, a; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.
IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1; 1, 0, 0. V.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; 1, 0, 0; 0, 0, 1.

$\mathfrak{O}_h^1$ besitzt parallel den Hauptsymmetrieebenen Spiegelebenen. $\mathfrak{O}^1$ mit $\mathfrak{C}_s^1$ charakterisieren das Raumsystem, das $\mathfrak{T}^1$ $\mathfrak{T}_h^1$ $\mathfrak{T}_d^1$ und $\mathfrak{D}_{4h}^1$ als weitere Untergruppen enthält.

Die VI.) Decktransformationsbedingung ist somit:

0, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

Symmetrieelemente: Die Achsen besitzen gleiche Lage wie in $\mathfrak{O}^1$.

Spiegelebenen: $(100)_0$ $(010)_0$ $(001)_0$; $(100)_{\frac{1}{2}}$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ $(001)_{\frac{1}{2}}$
$(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$ $(011)_0$ $(0\bar{1}1)_0$ $(101)_0$ $(\bar{1}01)_0$.

Gleitspiegelebenen: $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$ $(011)_{\frac{1}{2}}$ $(0\bar{1}1)_{\frac{1}{2}}$ $(101)_{\frac{1}{2}}$ $(\bar{1}01)_{\frac{1}{2}}$.

Symmetriezentren: I. $[\![0\,0\,0]\!]$. II. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$.
III. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$. IV. $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte: Alle 48 Werte der kubischen Holoedrie ohne Zusatztranslationen.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. Symmetriezentren I.
2. Symmetriezentren II.

} Zähligkeit jeweilen = 1. Symmetriebedingung = O_h.

Beide Punktlagen bilden Gitter von der Form einfacher Elementarwürfel.

3. Symmetriezentren III.
4. Symmetriezentren IV.

} Zähligkeit jeweilen = 3. Symmetriebedingung = D_{4h}.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

Die vierzähligen Drehungsachsen beherbergen 6zählige Punktlagen, die der Symmetriebedingung C_{4v} genügen müssen.

Den trigonalen Drehungsachsen sind 8zählige Punkte eigen, von denen der Komplex $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ usw. würfelförmige Gitter von der halben Kantenlänge des Elementarwürfels bildet. Die Symmetriebedingung

lautet: C_{3v}. 12zählig sind schließlich die Punkte auf den digonalen Drehungsachsen, die alle Schnittpunkte je zweier Spiegelebenen dardarstellen. (C_{2v}.)

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden gehören den Spiegelebenen allein an. Sie sind 24zählig.

48zählig sind endlich die mit drei Freiheitsgraden behafteten allgemeinsten Punkte.

Raumgruppe $\mathfrak{O}_h^2$

$\mathfrak{O}^1$ mit $\mathfrak{C}_s^2$ dienen zur Ableitung. Die kubischen Untergruppen sind $\mathfrak{T}^1$, $\mathfrak{T}_d^4$, $\mathfrak{T}_h^2$, $\mathfrak{O}^1$. In tetragonal holoedrischer Hinsicht läßt sich $\mathfrak{D}_{4h}^4$ erkennen. Die I.)—V.) Decktransformationsbedingungen sind soeben mitgeteilt worden, die VI.) lautet:

$$\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}; \; 1, 0, 0; \; 0, 1, 0; \; 0, 0, \bar{1}.$$

Symmetrieelemente: Die gleichen Achsen wie in $\mathfrak{O}^1$. Da aber parallel den Hauptachsen immer mindestens tetragonale Drehspiegelachsen vorhanden sein müssen, gehören jetzt zu den digonalen Drehungsachsen [100], [010] und [001] Drehspiegelebenen.

Gleitspiegelebenen: $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$ $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$.

Ferner: $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$ $(011)_0$ $(0\bar{1}1)_0$ $(101)_0$ $(\bar{1}01)_0$;
$(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$ $(011)_{\frac{1}{2}}$ $(0\bar{1}1)_{\frac{1}{2}}$ $(101)_{\frac{1}{2}}$ $(\bar{1}01)_{\frac{1}{2}}$.

Symmetriezentren:

$[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte: (I) und (II) der kubischen Holoedrie (= (I) und (II) der enantiomorphen Hemiedrie) ohne Zusatztranslationen.

An Stelle von (III):

$[\![\bar{m}+\frac{1}{2},\bar{n}+\frac{1}{2},\bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2},\bar{n}+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2},\bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{p}+\frac{1}{2},\bar{m}+\frac{1}{2},\bar{n}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![p+\frac{1}{2},\bar{m}+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![p+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},\bar{n}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{p}+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{n}+\frac{1}{2},\bar{p}+\frac{1}{2},\bar{m}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2},\bar{m}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2},\bar{p}+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}]\!]$

An Stelle von (IV):

$[\![n+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},\bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2},\bar{m}+\frac{1}{2},\bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2},\bar{m}+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![m+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2},\bar{p}+\frac{1}{2},\bar{n}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2},\bar{p}+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2},\bar{n}+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![p+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{p}+\frac{1}{2},\bar{n}+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{p}+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2},\bar{m}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![p+\frac{1}{2},\bar{n}+\frac{1}{2},\bar{m}+\frac{1}{2}]\!]$

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung: 0.
2. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 6. Symmetriebedingung D_4.
3. Symmetriezentren: Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung C_{3i}.
4. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$.
   Die Zähligkeit dieser Punktlage ist 12, die Symmetriebedingung S_4.

1 bildet innenzentrierte Gitter von der Form des Elementarwürfels, der Komplex 3 entspricht würfelförmigen Gittern von der halben Kantenlänge des Elementarwürfels.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Auf den tetragonalen Drehungsachsen liegen 12zählige Punkte mit der notwendigen Eigensymmetrie C_4. Die trigonalen Drehungsachsen beherbergen 16zählige, die digonalen Drehungsachsen 24zählige Punkte. (C_3 bezw. C_2.)

Punktlagen mit drei Freiheitsgraden sind 48zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{O}_h^3$

Aus $\mathfrak{O}^2$ leiten sich ebenfalls zwei holoedrische Raumgruppen ab. Bei gleicher Wahl des Koordinatenanfangspunktes werden die fünf ersten Decktransformationsbedingungen für $\mathfrak{O}_h^3$ und $\mathfrak{O}_h^4$ zu:

I.) a, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) 0, a, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

III.) 0, 0, a; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1; 1, 0, 0. V.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}$; 0, 1, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 0, 1.

$\mathfrak{O}_h^3$ enthält parallel den Hauptsymmetrieebenen Spiegelebenen, die VI.) Decktransformationsbedingung wird für diese Gruppe daher:

VI.) 0, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

Die kubischen Untergruppen von $\mathfrak{O}_h^3$ sind: $\mathfrak{T}^1$, $\mathfrak{T}_h^1$, $\mathfrak{T}_d^4$, $\mathfrak{O}^2$, die tetragonal holoedrischen Untergruppen sind von der Gestalt $\mathfrak{D}_{4h}^9$.

Symmetrieelemente: Achsen wie in $\mathfrak{O}^2$, doch sind die tetragonalen Schraubenachsen (digonale Drehungsachsen) gleichzeitig tetragonale Drehspiegelachsen.

Spiegelebenen: $(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$ $(011)_0$ $(0\bar{1}1)_0$ $(101)_0$ $(\bar{1}01)_0$;
$(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$ $(011)_{\frac{1}{2}}$ $(0\bar{1}1)_{\frac{1}{2}}$ $(101)_{\frac{1}{2}}$ $(\bar{1}01)_{\frac{1}{2}}$.

Symmetriezentren: I. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$.

II. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte: (I) und (II) der Koordinatentripel wie in $\mathfrak{D}^2$. (III) der kubischen Holoedrie (Seite 387) unverändert. An Stelle von (IV) wie (IV) von $\mathfrak{D}_h^2$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. Symmetriezentren I. Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung = T_h.
2. Symmetriezentren II. Zähligkeit = 6. Symmetriebedingung = V_h.
3. $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$.
4. $[\![\frac{1}{4}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$.

   Beide Punktlagen bilden 6zählige Komplexe und besitzen eine Symmetriebedingung von V_d.
5. $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$.

   Die Zähligkeit ist 8, die Symmetriebedingung D_3. Würfelförmige Gitter von halber Kantenlänge des Elementarwürfels charakterisieren den Komplex.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Die den Koordinatenachsen parallelen Achsen sind Schnittlinien von je zwei Symmetrieebenen. Punkte, die auf ihnen liegen, bilden 12zählige Komplexe und besitzen die Symmetriebedingung C_{2v}. Den trigonalen Drehungsachsen sind 16zählige Punkte eigen, den digonalen Drehungsachsen parallel den Nebenachsen 24zählige. (Symmetriebedingung C_3 und C_2.)

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden gehören den Spiegelebenen parallel (100), (010) und (001) an. Sie sind 24zählig.

48zählig sind die allgemeinen Lagen, die drei Freiheitsgrade besitzen.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_h^4$

Die Hauptsymmetrieebenen sind Gleitspiegelebenen. $\mathfrak{D}^2$ mit $\mathfrak{C}_s^1$ charakterisieren das Raumsystem, dessen übrige kubische Untergruppen $\mathfrak{T}^1$, $\mathfrak{T}_h^2$, $\mathfrak{T}_d^1$ sind. $\mathfrak{D}_{4h}^{12}$ ist in tetragonal holoedrischer Hinsicht vorhanden.

Die VI.) Decktransformationsbedingung ergibt sich zu:

$$\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2};\ 1, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, \bar{1}.$$

Symmetrieelemente: Achsen wie $\mathfrak{D}^2$, die den Koordinatenachsen parallelen gewöhnlichen digonalen Achsen sind zugleich tetragonale Drehspiegelachsen (Drehspiegelebenen $(001)_0$ und $(001)_{\frac{1}{2}}$ usw.).

Gleitspiegelebenen: $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$.

Spiegelebenen: $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$ $(011)_0$ $(0\bar{1}1)_0$ $(101)_0$ $(\bar{1}01)_0$.

Gleitspiegelebenen: $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$ $(011)_{\frac{1}{2}}$ $(0\bar{1}1)_{\frac{1}{2}}$ $(101)_{\frac{1}{2}}$ $(\bar{1}01)_{\frac{1}{2}}$.

Symmetriezentren: I. $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$.
II. $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte: (I) und (II) der Koordinatentripel wie (I) und (II) von $\mathfrak{O}^2$.

An Stelle von (III) der kubischen Holoedrie:

$[\![m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2},\bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2},\bar{n}+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2},\bar{n}+\frac{1}{2},\bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{p}+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},\bar{n}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![p+\frac{1}{2},\bar{m}+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![p+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},\bar{n}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{p}+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\bar{n}+\frac{1}{2},\bar{p}+\frac{1}{2},\bar{m}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2},\bar{m}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2},\bar{p}+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}]\!]$.

(IV) unverändert (ohne Zusatztranslationen) wie (IV) der kubischen Holoedrie von Seite 388.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\ 0\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung = T_d.
   Innenzentrierte Gitter von der Form des Elementarwürfels charakterisieren den Komplex.
2. Symmetriezentren I } Zähligkeit jeweilen = 4. Symmetrie-
3. Symmetriezentren II } bedingung = D_{3d}.
   Beide Punktkomplexe bilden allseitig flächenzentrierte Würfelgitter von der Größe des Elementarparallelepipeds.
4. $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ 0]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![0\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$. Zähligkeit = 6. Symmetriebedingung V_d.
5. $[\![\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$
   $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\ 0]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{4}]\!]$.
   Der zusammengehörige Komplex ist 12zählig, jeder Punkt ist Schnittpunkt dreier digonaler Drehungsachsen. (V.)

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

8zählig sind die Punkte der trigonalen Drehungsachsen. Symmetriebedingung = C_{3v}.

12zählig sind Punkte, welche auf den [001] [100] [010] parallelen digonalen Drehungsachsen liegen. (Symmetriebedingung C_{2v}.)

24zählig sind schließlich Punkte der digonalen Drehungsachsen von der Richtung der Nebenachsen. (Symmetriebedingung C_2.)

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden gehören den Spiegelebenen allein an und bilden 24zählige Komplexe.

48zählig ist die allgemeine Punktlage mit drei Freiheitsgraden.

Raumgruppe $\mathfrak{O}_h^5$

Die Raumgruppen $\mathfrak{O}_h^5$ und $\mathfrak{O}_h^6$ besitzen flächenzentrierte Würfel als Elementarparallelepipede und $\mathfrak{O}^3$ als gleichorientierte Untergruppe. Die fünf ersten Decktransformationsbedingungen lauten daher gemeinsam:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0;\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1.$ II.) $\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2};\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1.$

III.) $0, \frac{a}{2}, \frac{a}{2};\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1.$

IV.) $0,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1;\ 1,0,0.$ V.) $0,0,0;\ 0,1,0;\ 1,0,0;\ 0,0,1.$

$\mathfrak{O}_h^5$ leitet sich aus $\mathfrak{O}^3$ mit $\mathfrak{C}_s^3$ parallel den Hauptsymmetrieebenen ab, seine weiteren kubischen Untergruppen sind $\mathfrak{T}^2$, $\mathfrak{T}_h^3$, $\mathfrak{T}_d^2$. In tetragonal holoedrischer Hinsicht ist $\mathfrak{D}_{4h}^{17}$ vorhanden.

Die VI.) Decktransformationsbedingung lautet:

$$0,0,0;\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,\bar{1}.$$

Achsen wie in $\mathfrak{O}^3$. Die tetragonalen Schraubenachsen sind tetragonale Drehspiegelachsen.

Spiegelebenen: $(100)_0\ (100)_{\frac{1}{2}}\ (010)_0\ (010)_{\frac{1}{2}}\ (001)_0\ (001)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(100)_{\frac{1}{4}}\ (100)_{\frac{3}{4}}\ (010)_{\frac{1}{4}}\ (010)_{\frac{3}{4}}\ (001)_{\frac{1}{4}}\ (001)_{\frac{3}{4}}$.

Spiegelebenen: $(110)_0\ (110)_{\frac{1}{2}}\ (1\bar{1}0)_0\ (1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}\ (011)_0\ (011)_{\frac{1}{2}}$

$(0\bar{1}1)_0\ (0\bar{1}1)_{\frac{1}{2}}\ (101)_0\ (101)_{\frac{1}{2}}\ (\bar{1}01)_0\ (\bar{1}01)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(110)_{\frac{1}{4}}\ (110)_{\frac{3}{4}}$ usw.

Symmetriezentren: I. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$.

II. $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$.

III. $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\frac{1}{4}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$
$[\![0\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

(I) (II) (III) (IV) der kubischen Holoedrie zunächst ohne Zusatztranslationen. (Siehe Seite 387.) Außerdem zu jedem dieser 48 Werte $[\![x, y, z]\!]$ die Werte $[\![x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z]\!]$, $[\![x+\frac{1}{2}, y, z+\frac{1}{2}]\!]$, $[\![x, y+\frac{1}{2}, z+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. Symmetriezentren I } Zähligkeit jeweilen = 4. Symmetrie-
2. Symmetriezentren II } bedingung = O_h.

Gitter von der Form des flächenzentrierten Elementarwürfels werden gebildet.

3. $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$.
Die Zähligkeit ist 8, die Symmetriebedingung T_d.

Die Kantenlänge der würfelförmigen Gitter ist dem halben Elementarabstande gleich.

4. Symmetriezentren III. Sie bestimmen eine 24zählige Punktlage von der Symmetrie V_h.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Auf den tetragonalen Drehungsachsen liegende Punkte sind 24zählig. C_{4v} ist die Minimalsymmetrie. Den trigonalen Drehungsachsen gehören 32zählige Punkte der Symmetriebedingung C_{3v} an. Die digonalen Drehungsachsen als Schnittlinien je zweier Spiegelebenen beherbergen 48zählige Punkte. (C_{2v}.)

Nur den Spiegelebenen angehörige Punktlagen treten 96mal im Elementarwürfel auf. Sie besitzen zwei Freiheitsgrade. Demgemäß ist der Komplex zusammengehöriger Punkte von drei Freiheitsgraden 192zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{D}_h^6$

$\mathfrak{D}^3$ ist wiederum Untergruppe, parallel den Koordinatenachsenebenen sind gleichfalls Spiegelebenen vorhanden, doch gehen sie nicht durch die tetragonalen Drehungsachsen, sondern durch die tetragonalen Schraubenachsen. $\mathfrak{T}^2$, $\mathfrak{T}_h{}^3$, $\mathfrak{T}_d{}^5$, $\mathfrak{D}_{4h}{}^{18}$ lassen sich als weitere Untergruppen erkennen:

Die IV.) Decktransformationsbedingung lautet:

$$0, 0, \frac{a}{2};\ 1, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, 1.$$

Symmetrieelemente: Die Achsen von $\mathfrak{D}^3$. Die tetragonalen Schraubenachsen sind zugleich digonale Drehungsachsen und tetragonale Drehspiegelachsen.

Spiegelebenen: $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ $(010)_{\frac{1}{4}}$ $(010)_{\frac{3}{4}}$ $(001)_{\frac{1}{4}}$ $(001)_{\frac{3}{4}}$.

Gleitspiegelebenen: $(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$.

Ferner: $(110)_0$ $(110)_{\frac{1}{2}}$ usw. $(110)_{\frac{1}{4}}$ $(110)_{\frac{3}{4}}$ usw.

Symmetriezentren:

I. $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$.

II. $[\![\frac{1}{4}\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$

$[\![\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$

$[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

(I) und (II) der kubischen Holoedrie (beziehungsweise enantiomorphe Hemiedrie) zunächst ohne Zusatztranslationen:

An Stelle von (III).

$[\![\bar{m}+\frac{1}{2},\bar{n}+\frac{1}{2},\bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![\bar{p}+\frac{1}{2},\bar{m}+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![p+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![p+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{p}+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![\bar{n}+\frac{1}{2},\bar{p}+\frac{1}{2},\bar{m}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2},\bar{m}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2},\bar{p}+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}]\!]$

An Stelle von (IV).

$[\![n+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},\bar{p}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{2},\bar{m}+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![m+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{2},\bar{p}+\frac{1}{2},\bar{n}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2},\bar{n}+\frac{1}{2}]\!]$

$[\![p+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{p}+\frac{1}{2},\bar{n}+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{p}+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2},\bar{m}+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![p+\frac{1}{2},\bar{n}+\frac{1}{2},\bar{m}+\frac{1}{2}]\!]$

Außerdem zu jedem dieser 48 Werte $[\![x, y, z]\!]$ die Werte $[\![x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z]\!]$ $[\![x+\frac{1}{2}, y, z+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![x, y+\frac{1}{2}, z+\frac{1}{2}]\!]$ gehörig.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$.
Die Zähligkeit dieses Komplexes, der würfelförmige Gitter mit einer Kantenlänge gleich der Hälfte des Elementarabstandes bildet, ist 8, die Symmetriebedingung lautet O.

2. $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$.
Zähligkeit und Gitterbildung entspricht der von 1, doch ist die Symmetriebedingung durch T_h gegeben.

3. Die Symmetriezentren II bilden einen 24zähligen Komplex mit der Minimalpunktsymmetrie von C_{4h}.

4. $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}]\!]$
$[\![0\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$
$[\![\frac{1}{4}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$.
Zähligkeit = 24. Symmetriebedingung = V_d.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad.

48zählige Punkte sind den tetragonalen Drehungsachsen (C_4) und den tetragonalen Schraubenachsen ($C_{2\nu}$) eigen.

64zählig sind die auf trigonalen Drehungsachsen alleinliegenden Punkte, während die Drehungsachsen der Nebenachsen 96zählige Punkte beherbergen.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden gehören einzig den Spiegelebenen parallel den Koordinatenebenen an. Sie sind 96zählig.

192mal tritt schließlich ein beliebig gelegener Punkt mit drei Freiheitsgraden im Elementarwürfel auf.

Raumgruppe $\mathfrak{O}_h^7$

Der Elementarwürfel ist für $\mathfrak{O}_h^7$ und $\mathfrak{O}_h^8$ ebenfalls flächenzentriert, doch ist in beiden Fällen $\mathfrak{O}^4$ mit übereinstimmender Nullpunktslage Untergruppe. Beide holoedrischen Raumgruppen besitzen daher als fünf erste Decktransformationsbedingungen:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0$: 1, 0, 0; 0, 1, 0: 0, 0, 1. II.) $\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2}$; 1, 0 0; 0, 1, 0: 0, 0, 1.

III.) $0, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1; 1, 0, 0. V.) $\frac{a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{4}$; 0, 1. 0; 1, 0, 0: 0, 0, 1.

O_h^7 entsteht aus $\mathfrak{O}^4$ mit $\mathfrak{C}_s^4$ parallel den Koordinatenebenen. Ihre Untergruppen sind $\mathfrak{T}^2$, $\mathfrak{T}_h^4$, $\mathfrak{T}_d^2$, $\mathfrak{D}_{4h}^{19}$.

Die VI. Decktransformationsbedingung ist gegeben durch:

$$\frac{a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{4};\ 1, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, \bar{1}.$$

Symmetrieelemente: Alle Achsen wie in $\mathfrak{D}^4$, doch sind die digonalen Drehungsachsen, parallel den Koordinatenachsen, tetragonale Drehspiegelachsen.

Gleitspiegelebenen: $(100)_{\frac{1}{8}}$ $(100)_{\frac{5}{8}}$ $(010)_{\frac{1}{8}}$ $(010)_{\frac{5}{8}}$ $(001)_{\frac{1}{8}}$ $(001)_{\frac{1}{8}}$
$(100)_{\frac{3}{8}}$ $(100)_{\frac{7}{8}}$ $(010)_{\frac{3}{8}}$ $(010)_{\frac{7}{8}}$ $(001)_{\frac{3}{8}}$ $(001)_{\frac{7}{8}}$.

Spiegelebenen: $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_0$ $(110)_{\frac{1}{2}}$
$(011)_0$ $(011)_{\frac{1}{2}}$ $(01\bar{1})_0$ $(01\bar{1})_{\frac{1}{2}}$ $(101)_0$ $(\bar{1}01)_{\frac{1}{2}}$ $(101)_0$ $(\bar{1}01)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(110)_{\frac{1}{4}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{3}{4}}$ usw.

Symmetriezentren:

I. $[\![\frac{1}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\ \frac{5}{8}\ \frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\ \frac{5}{8}\ \frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\ \frac{7}{8}\ \frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\ \frac{3}{8}\ \frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\ \frac{7}{8}\ \frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\ \frac{3}{8}\ \frac{5}{8}]\!]$
$[\![\frac{7}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\ \frac{5}{8}\ \frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\ \frac{5}{8}\ \frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\ \frac{7}{8}\ \frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\ \frac{3}{8}\ \frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\ \frac{7}{8}\ \frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\ \frac{3}{8}\ \frac{3}{8}]\!]$.

II. $[\![\frac{5}{8}\ \frac{5}{8}\ \frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\ \frac{5}{8}\ \frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\ \frac{3}{8}\ \frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\ \frac{7}{8}\ \frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\ \frac{3}{8}\ \frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\ \frac{7}{8}\ \frac{1}{8}]\!]$
$[\![\frac{3}{8}\ \frac{5}{8}\ \frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\ \frac{5}{8}\ \frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\ \frac{3}{8}\ \frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\ \frac{7}{8}\ \frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\ \frac{3}{8}\ \frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\ \frac{7}{8}\ \frac{7}{8}]\!]$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

(I) und (II) wie (I) und (II) von $\mathfrak{D}^4$.

An Stelle von (III) der kubischen Holoedrie:

$[\![m+\frac{1}{4}, \bar{n}+\frac{1}{4}, p+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{4}, n+\frac{1}{4}, p+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{4}, \bar{n}+\frac{1}{4}, p+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{4}, n+\frac{1}{4}, p+\frac{1}{4}]\!]$
$[\![p+\frac{1}{4}, m+\frac{1}{4}, \bar{n}+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![p+\frac{1}{4}, \bar{m}+\frac{1}{4}, n+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![p+\frac{1}{4}, m+\frac{1}{4}, \bar{n}+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![p+\frac{1}{4}, m+\frac{1}{4}, n+\frac{1}{4}]\!]$
$[\![n+\frac{1}{4}, p+\frac{1}{4}, \bar{m}+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{4}, p+\frac{1}{4}, \bar{m}+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{4}, p+\frac{1}{4}, m+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{4}, \bar{p}+\frac{1}{4}, m+\frac{1}{4}]\!]$.

(IV) unverändert, ohne Zusatzglieder wie (IV) der kubischen Holoedrie (Seite 388).

Außerdem zu jedem dieser 48 Werte [[x, y, z]] die Werte:

$[\![x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, \bar{z}]\!]$ $[\![x+\frac{1}{2}, y, z+\frac{1}{2}]\!]$ $[\![x, y+\frac{1}{2}, z+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$.
2. $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ 0]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![0\,0\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$.

Jede dieser 8zähligen Punktlagen bildet „Diamantgitter". Die Symmetriebedingungen lauten: T_d.

3. Symmetriezentren I.
4. Symmetriezentren II.

Zähligkeit jeweilen = 16. Symmetriebedingung = D_{3d}.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Die trigonalen Drehungsachsen beherbergen als Schnittlinien dreier Spiegelebenen 32zählige

Punkte (C_{3v}). Die den Koordinatenachsen parallelen digonalen Drehungsachsen enthalten 48zählige Punkte der Symmetriebedingung C_{2v}. 96zählig sind die Punktlagen, die den digonalen Nebenachsen allein angehören.

Zwei Freiheitsgrade kommen beliebigen Punkten auf den Nebenspiegelebenen zu. Die Zähligkeit ist 96, demgemäß die der Punkte mit drei Freiheitsgraden 192.

Raumgruppe $\mathfrak{O}_h^8$

$\mathfrak{O}^4$, $\mathfrak{T}^2$, $\mathfrak{T}_h^4$, $\mathfrak{T}_d^5$, $\mathfrak{D}_{4h}^{20}$ sind Untergruppen. Spiegelebenen sind keine vorhanden. Die fünf ersten Decktransformationsbedingungen entsprechen denen von $\mathfrak{O}_h^7$, die VI.) lautet:

$$\text{VI.)}\ \frac{3a}{4}, \frac{3a}{4}, \frac{3a}{4};\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,\bar{1}.$$

Achsen wie in $\mathfrak{O}^4$; die digonalen Koordinatendrehungsachsen sind tetragonale Drehspiegelachsen.

Gleitspiegelebenen: $(100)_{\frac{3}{8}}$ $(100)_{\frac{7}{8}}$ $(010)_{\frac{3}{8}}$ $(010)_{\frac{7}{8}}$ $(001)_{\frac{3}{8}}$ $(001)_{\frac{7}{8}}$.
$(100)_{\frac{1}{8}}$ $(100)_{\frac{5}{8}}$ $(010)_{\frac{1}{8}}$ $(010)_{\frac{5}{8}}$ $(001)_{\frac{1}{8}}$ $(001)_{\frac{5}{8}}$.
$(110)_0$ $(110)_{\frac{1}{2}}$ usw. $(110)_{\frac{1}{4}}$ $(110)_{\frac{3}{4}}$ usw.

Symmetriezentren:

$[\![\frac{3}{8}\ \frac{3}{8}\ \frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\ \frac{5}{8}\ \frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\ \frac{3}{8}\ \frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\ \frac{5}{8}\ \frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\ \frac{7}{8}\ \frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\ \frac{7}{8}\ \frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{3}{8}]\!]$
$[\![\frac{7}{8}\ \frac{3}{8}\ \frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\ \frac{5}{8}\ \frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\ \frac{3}{8}\ \frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\ \frac{5}{8}\ \frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\ \frac{7}{8}\ \frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\ \frac{7}{8}\ \frac{1}{8}]\!]$
$[\![\frac{7}{8}\ \frac{7}{8}\ \frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\ \frac{7}{8}\ \frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\ \frac{5}{8}\ \frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\ \frac{5}{8}\ \frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\ \frac{3}{8}\ \frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\ \frac{3}{8}\ \frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{7}{8}]\!]$
$[\![\frac{3}{8}\ \frac{7}{8}\ \frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\ \frac{7}{8}\ \frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\ \frac{5}{8}\ \frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\ \frac{5}{8}\ \frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\ \frac{3}{8}\ \frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\ \frac{3}{8}\ \frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{7}{8}]\!]$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte:

(I) und (II) wie die Koordinatenwerte (I) und (II) von $\mathfrak{O}^4$.

An Stelle von (III) der Tripel der kubischen Holoedrie:

$[\![m+\frac{3}{4}, n+\frac{3}{4}, p+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{3}{4}, n+\frac{3}{4}, p+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![m+\frac{3}{4}, \bar{n}+\frac{3}{4}, p+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![m+\frac{3}{4}, n+\frac{3}{4}, \bar{p}+\frac{3}{4}]\!]$
$[\![\bar{p}+\frac{3}{4}, m+\frac{3}{4}, \bar{n}+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![p+\frac{3}{4}, \bar{m}+\frac{3}{4}, n+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![p+\frac{3}{4}, m+\frac{3}{4}, \bar{n}+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\bar{p}+\frac{3}{4}, m+\frac{3}{4}, n+\frac{3}{4}]\!]$
$[\![\bar{n}+\frac{3}{4}, p+\frac{3}{4}, m+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![n+\frac{3}{4}, p+\frac{3}{4}, \bar{m}+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{3}{4}, p+\frac{3}{4}, m+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![n+\frac{3}{4}, \bar{p}+\frac{3}{4}, m+\frac{3}{4}]\!]$.

An Stelle von (IV) der kubischen Holoedrie (Seite 388) (II) von $\mathfrak{T}_d^5$.

Außerdem zu jedem dieser 48 Werte $[\![x, y, z]\!]$ die Werte:

$$[\![x+\tfrac{1}{2}, y+\tfrac{1}{2}, z]\!]\ [\![x+\tfrac{1}{2}, \bar{y}, z+\tfrac{1}{2}]\!]\ [\![x, y+\tfrac{1}{2}, z+\tfrac{1}{2}]\!].$$

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ 0]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![0\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$ zusammen mit allen $\frac{1}{4}$ Körperdiagonalpunkten stellt einen 16zähligen Komplex

dar, dessen Symmetriebedingung der Einzellage T ist. Innenzentrierte Würfelgitter von halber Elementarkantenlänge werden gebildet.

2. Alle Symmetriezentren gehören zusammen und bilden einen 32zähligen Komplex. Symmetriebedingung C_{3i}.
3. Die Komplexe $[\![\frac{1}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{8}]\!]$ und $[\![\frac{5}{8}\ \frac{5}{8}\ \frac{5}{8}]\!]$ von $\mathfrak{O}_h^7$ gehören hier ebenfalls zusammen. Die Zähligkeit der Punktlage ist 32, die Symmetriebedingung D_3.
4. Zu einem gleichwertigen Komplex vereinigt sind ferner die Punktkomplexe $[\![0\ 0\ \frac{1}{4}]\!]$ und $[\![0\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$, wie sie unter $\mathfrak{T}_d^5$ angeführt sind. Zähligkeit = 48. Symmetriebedingung = S_4.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Die trigonalen Drehungsachsen besitzen 64zählige, die digonalen Drehungsachsen 96zählige Punkte.

192zählig sind die mit drei Freiheitsgraden versehenen Punktlagen.

Raumgruppe $\mathfrak{O}_h^9$

Auf einen innenzentrierten Elementarwürfel müssen die Raumgruppen $\mathfrak{O}_h^9$ und $\mathfrak{O}_h^{10}$ bezogen werden, so daß die drei ersten Decktransformationsbedingungen gemeinsam lauten:

I.) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. II.) $\frac{a}{2}, \frac{\bar{a}}{2}, \frac{a}{2}$; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

III.) 0, 0, a; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Für $\mathfrak{O}_h^9$, dessen Untergruppen durch $\mathfrak{T}^8$, $\mathfrak{T}_h^5$, $\mathfrak{T}_d^3$, $\mathfrak{O}^5$ gegeben sind, erhält man weiterhin:

IV.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1; 1, 0, 0. V.) 0, 0, 0; 0, 1, 0; $\bar{1}$, 0, 0; 0, 0, 1.

VI.) 0, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, $\bar{1}$.

Achsen wie in $\mathfrak{O}^5$; die digonalen Koordinatendrehungsachsen sind tetragonale Drehspiegelachsen.

Spiegelebenen: $(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ $(010)_0$ $(010)_{\frac{1}{2}}$ $(001)_0$ $(001)_{\frac{1}{2}}$.

Gleitspiegelebenen: $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ usw.

Spiegelebenen: $(110)_0$ $(1\bar{1}0)_0$ $(011)_0$ $(0\bar{1}1)_0$ $(101)_0$ $(\bar{1}01)_0$.

Gleitspiegelebenen: $(110)_{\frac{1}{2}}$ usw.

Symmetriezentren:

I. $[\![0\ 0\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$; II. $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ 0]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![0\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$;

III. $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$, sowie alle $\frac{1}{4}$-Körperdiagonalpunkte.

Zusammengehörige Koordinatenwerte: Koordinatentripel der kubischen Holoedrie unverändert. (Siehe Seite 387.)

Außerdem zu jedem Wert $[\![x, y, z]\!]$ ein Wert $[\![x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad:

1. Symmetriezentren I. Zähligkeit = 2. Symmetriebedingung $\mathfrak{O}_h$. Innenzentrierte Gitter von der Form des Elementarwürfels werden gebildet.
2. Symmetriezentren II. Zähligkeit = 6. Symmetriebedingung D_{4h}.
3. Symmetriezentren III. Zähligkeit = 8. Symmetriebedingung D_{3d}. Würfelförmige Gitter von halber Elementarkantenlänge entstehen.
4. $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\ 0]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$. Zähligkeit = 12. Symmetriebedingung V_d.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Die tetragonalen Drehungsachsen (C_{4v}) enthalten 12-zählige, die trigonalen Drehungsachsen (C_{3v}) 16-zählige, die einen digonalen Drehungsachsen (C_{2v}) 24-, die anderen (C_s) 48-zählige Punkte.

Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden sind 48-zählig, die mit drei Freiheitsgraden 96-zählig.

Raumgruppe $\mathfrak{O}_h^{10}$

$\mathfrak{T}^5$, $\mathfrak{T}_h^7$, $\mathfrak{T}_d^6$, $\mathfrak{O}^8$ sind neben $\mathfrak{D}_{4h}^{20}$ Untergruppen. Den Koordinatenanfangspunkt können wir wie in $\mathfrak{T}_h^7$ oder wie in $\mathfrak{O}^8$ wählen. Beide Lagen sind 16zählig. Es ist hier der erstere Weg eingeschlagen worden. Die drei letzten Decktransformationsbedingungen lauten dann:

IV.) $0, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, 1;\ 1, 0, 0.$ V.) $\frac{a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{3a}{4};\ 0, 1, 0;\ \bar{1}, 0, 0;\ 0, 0, 1.$

VI.) $0, \frac{a}{2}, 0;\ 1, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, \bar{1}.$

Die Achsen von $\mathfrak{O}^8$ sind vorhanden, doch besitzen sie jetzt andere relative Lage zum Nullpunkt. Es seien wenigstens für die Drehungsachsen diese Lagen angegeben:

Digonale Drehungsachsen zugleich tetragonale Drehspiegelachsen: $[100]^{0\,\frac{1}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}}$ $[100]^{0\,\frac{3}{4}}$ $[100]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}}$;
$^{\frac{1}{4}\,0}[010]$ $^{\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}}[010]$ $^{\frac{3}{4}\,0}[010]$ $^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}}[010]$ $[001]_{0\,\frac{1}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}}$ $[001]_{0\,\frac{3}{4}}$ $[001]_{\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}}$.

Trigonale Drehungsachsen: $[111]^{00}$ $[\bar{1}\bar{1}1]^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$ $[\bar{1}1\bar{1}]^{\frac{1}{2}\,0}$ $[1\bar{1}\bar{1}]^{0\,\frac{1}{2}}$.

Digonale Drehungsachsen: $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{1}{4}\,\frac{5}{8}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{3}{4}\,\frac{3}{8}}$ $[1\bar{1}0]^{\frac{3}{4}\,\frac{7}{8}}$ usw., im ganzen 24 Drehungsachsen parallel den Nebenachsen.

Gleitspiegelebenen: $(100)_0$ $(100)_{\frac{1}{2}}$ usw. $(100)_{\frac{1}{4}}$ $(100)_{\frac{3}{4}}$ usw.
$(110)_0$ $(0\bar{1}0)_0$ usw. $(110)_{\frac{1}{2}}$ $(1\bar{1}0)_{\frac{1}{2}}$ usw.

Symmetriezentren:

$[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$
$[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$.

Zusammengehörige Koordinatenwerte: (I) wie in (I) $\mathfrak{T}^5$.

An Stelle von (II) der kubischen Holoedrie:

$[\![n+\frac{1}{4}, m+\frac{1}{4}, \bar{p}+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![n+\frac{1}{4}, \bar{m}+\frac{1}{4}, p+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\bar{n}+\frac{1}{4}, m+\frac{3}{4}, p+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![n+\frac{3}{4}, m+\frac{1}{4}, \bar{p}+\frac{1}{4}]\!]$
$[\![m+\frac{1}{4}, p+\frac{1}{4}, n+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\bar{m}+\frac{1}{4}, p+\frac{3}{4}, n+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![m+\frac{3}{4}, p+\frac{1}{4}, \bar{n}+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![m+\frac{1}{4}, \bar{p}+\frac{1}{4}, n+\frac{3}{4}]\!]$
$[\![p+\frac{1}{4}, \bar{n}+\frac{1}{4}, \bar{m}+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![p+\frac{3}{4}, n+\frac{1}{4}, \bar{m}+\frac{1}{4}]\!]$ $[\![p+\frac{1}{4}, \bar{n}+\frac{1}{4}, m+\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\bar{p}+\frac{1}{4}, n+\frac{3}{4}, m+\frac{1}{4}]\!]$.

An Stelle von (III) kommt (II) von $\mathfrak{T}_h^7$, an Stelle von (IV) ebenso (II) von $\mathfrak{T}_d^6$.

Zu jedem dieser Werte $[\![x, y, z]\!]$ gehört ein Wert $[\![x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, z+\frac{1}{2}]\!]$.

Punktlagen ohne Freiheitsgrad.

1. Alle Symmetriezentren gehören zusammen und bestimmen einen 16zähligen Komplex von der Symmetriebedingung der Lage $= C_{3i}$.

   Würfelgitter, die innenzentriert sind und halbe Elementarkantenlänge besitzen, werden gebildet.

2. $[\![\frac{1}{8}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\,\frac{7}{8}\,\frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\,\frac{1}{8}\,\frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\,\frac{3}{8}\,\frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\,\frac{5}{8}\,\frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\,\frac{3}{8}\,\frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\,\frac{5}{8}\,\frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\,\frac{7}{8}\,\frac{5}{8}]\!]$
   $[\![\frac{3}{8}\,\frac{3}{8}\,\frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\,\frac{5}{8}\,\frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\,\frac{3}{8}\,\frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\,\frac{1}{8}\,\frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\,\frac{7}{8}\,\frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\,\frac{1}{8}\,\frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\,\frac{7}{8}\,\frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\,\frac{5}{8}\,\frac{7}{8}]\!]$
   gehören als 16zähliger Komplex zusammen. Symmetriebedingung $= D_3$. Es sind das die Punktkomplexe $[\![0\,0\,0]\!]$ und $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ von $\mathfrak{O}_8$.

3. $[\![0\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}]\!]$ $[\![0\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{7}{8}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{8}\,0]\!]$
   $[\![\frac{1}{4}\,\frac{7}{8}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{5}{8}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{4}\,\frac{5}{8}]\!]$ $[\![0\,\frac{3}{4}\,\frac{7}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{8}]\!]$ $[\![\frac{5}{8}\,0\,\frac{1}{4}]\!]$
   $[\![\frac{7}{8}\,0\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{8}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{5}{8}\,0]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{7}{8}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{8}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{8}]\!]$ $[\![\frac{1}{8}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{2}]\!]$
   bestimmen zusammen einen 24zähligen Komplex. Die Lagensymmetriebedingung ist V. Es sind das die beiden Punktkomplexe $[\![\frac{1}{8}\,0\,\frac{7}{8}]\!]$ und $[\![\frac{5}{8}\,0\,\frac{3}{8}]\!]$ von $\mathfrak{O}^8$.

4. Ebenfalls zu einem 24zähligen gleichwertigen Komplex sind die Komplexe $[\![0\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{8}]\!]$ und $[\![0\,\frac{1}{4}\,\frac{7}{8}]\!]$ von $\mathfrak{T}_d^6$ vereinigt. Symmetriebedingung $= S_4$.

Punktlagen mit einem Freiheitsgrad. Die trigonalen Drehungsachsen beherbergen 32zählige Punkte, die digonalen Drehungsachsen 48zählige.

96zählig sind die nicht auf einfachen Symmetrieelementen liegenden Punkte mit drei Freiheitsgraden.

3. Tabellarische Zusammenstellungen

Es folgt nun eine tabellarische Zusammenstellung für alle 230 Raumgruppen, in der die verschiedenen Zähligkeiten der Punktlagen mit ihren Symmetriebedingungen vermerkt sind. Die Zähligkeiten sind nach den Freiheitsgraden der Lagen geordnet. Die Zähligkeit der Lagen mit drei Freiheitsgraden gibt an, ob das Elementarparallelepiped einfach, doppelt, vierfach oder eventuell sechsfach primitiv ist. Die maximalen Zähligkeiten für den einfach primitiven Raum (Raum der Nichtidentität) sind für die einzelnen Klassen die folgenden:

$\mathfrak{C}_1 = 1$	$\mathfrak{C}_3 = 3$	$\mathfrak{C}_4 = 4$	$\mathfrak{C}_{6h} = 12$
$\mathfrak{C}_i = 2$	$\mathfrak{C}_{3i} = 6$	$\mathfrak{C}_{4v} = 8$	$\mathfrak{D}_6 = 12$
$\mathfrak{C}_s = 2$	$\mathfrak{C}_{3v} = 6$	$\mathfrak{C}_{4h} = 8$	$\mathfrak{D}_{6h} = 24$
$\mathfrak{C}_2 = 2$	$\mathfrak{D}_3 = 6$	$\mathfrak{B}_d = 8$	$\mathfrak{T} = 12$
$\mathfrak{C}_{2h} = 4$	$\mathfrak{C}_{3h} = 6$	$\mathfrak{D}_8 = 8$	$\mathfrak{T}_h = 24$
$\mathfrak{C}_{2v} = 4$	$\mathfrak{D}_{3d} = 12$	$\mathfrak{D}_{4h} = 16$	$\mathfrak{T}_d = 24$
$\mathfrak{B} = 4$	$\mathfrak{D}_{3h} = 12$	$\mathfrak{C}_6 = 6$	$\mathfrak{O} = 24$
$\mathfrak{B}_h = 8$	$\mathfrak{S}_4 = 4$	$\mathfrak{C}_{6v} = 12$	$\mathfrak{O}_h = 48$

In der Haupttabelle IV werden alle trigonalen und hexagonalen Klassen auf das orthohexagonale Elementarparallelepiped bezogen. Die verschiedenen Punktlagen ohne Freiheitsgrad werden einzeln angegeben. Punktlagen mit einem, zwei oder drei Freiheitsgraden gibt es stets unendlich viele von gleicher Zähligkeit und Symmetriebedingung. Die Symmetriebedingungen sind in der Reihenfolge der Zähligkeiten angeführt, so daß sofort zu einer bestimmtzähligen Punktlage die zugehörige Minimalsymmetrie gefunden werden kann. Die Symmetriebedingung erhält das Symbol der Punktsymmetriegruppe, die ja einer aufs Kontinuum bezogenen Kristallklasse entspricht. Die Tabelle ist unabhängig von der Wahl des Koordinatenanfangspunktes. Sie enthält das wichtigste erste Material zur Bestimmung einer gegebenen Struktur.

Analog wie die Punkte verhalten sich Ebenen und Geraden in den Raumsystemen. Einer Parallelschar von Ebenen und Geraden werden gleichwertige Parallelscharen infolge der Symmetrieverhältnisse zugeordnet sein. Bei spezieller Lage der Ebenen oder Geraden reduziert sich die Zahl dieser zugeordneten gleichwertigen Scharen. Diese Verhältnisse werden hier der geringeren Bedeutung wegen nicht einzeln erörtert. Sie sind aber, auf das Kontinuum übertragen, von großer Wichtigkeit. Die natürliche Flächenbegrenzung eines Kristallindividuums können wir als Ausdruck der auf das Kontinuum bezogenen Symmetrie auffassen. Die äußere Form kann von lauter gleichwertigen oder von gleichwertigen und ungleichwertigen Flächenkomplexen gebildet werden.

Die Zahl der gleichwertigen Flächen eines Komplexes ist von der zukommenden Klassensymmetrie (Kontinuumssymmetrie) und der Lage abhängig. Die allgemeinste Form, deren Flächen weder auf Spiegelebenen noch Drehungsachsen senkrecht stehen, ist ein n-Flächner, wenn n die maximalste Zähligkeit einer Punktlage im primitiveren Parallelepiped (Raum der Nichtidentität) der zugehörigen Klasse von Raumsystemen ist. Die Tabelle auf der vorangehenden Seite gibt daher zugleich über die Zahl der Flächen eines gleichwertigen Komplexes allgemeinster Lage Auskunft. An Stelle der Raumsystemsklassen sind lediglich die entsprechenden, aufs Kontinuum bezogenen Kristallklassen zu setzen.

Steht eine Fläche senkrecht auf einer Spiegelebene, so wird sie durch die Spiegelung in sich selbst übergeführt. Die Zahl zugehöriger Flächen reduziert sich daher auf die Hälfte. Dafür ist nun der Fläche eine Symmetriebedingung eigen, die man als Flächensymmetrie bezeichnet, sie muß in der Beschaffenheit der Fläche, in der Streifung oder in den Ätzfiguren ihren Ausdruck finden. Senkrecht zu einer Spiegelebene gibt es immer unendlich viele Flächenlagen, die Ausgangslagen für einen gleichwertigen Komplex sein können. Sie gehen alle einer Normalen auf der Spiegelebene parallel, sie gehören, wie man sagt, der Zone dieser Normalen an. Flächenlagen mit der Symmetriebedingung = 1 Spiegelebene = C_s besitzen daher einen Freiheitsgrad, d. h. Zähligkeit und Symmetriebedingung bleiben sich, von noch ausgezeichneteren speziellen Lagen abgesehen, innerhalb einer ganzen Zone gleich.

Senkrecht auf Drehungsachsen (die zugleich Schnittlinien von Spiegelebenen sein können) stehende Flächen sind in ihrer Lage genau fixiert. Sie besitzen keinen Freiheitsgrad. Sie werden durch die Drehungen um die Achse, eventuell durch Spiegelungen an den auf ihnen senkrecht stehenden Symmetrieebenen (deren Schnittlinie die Achse ist) in sich selbst übergeführt, so daß die Zahl der gleichwertigen Flächen eines Komplexes vermindert wird. Die Flächensymmetrie ist immer der Symmetrie einer der tetartoedrischen oder hemimorphen Klassen gleich.

Noch übersichtlicher werden diese Verhältnisse, wenn man statt von den Flächen von den Flächennormalen ausgeht. Die Deckoperationen ordnen einer Flächennormalen einseitiger Richtung weitere gleichwertige Flächennormalen zu. Nur die in der gesamten Erstreckung durch die Flächennormalen gehenden Symmetrieelemente bringen sie mit sich selbst zur Deckung. Diese Symmetrieelemente bestimmen die Symmetriebedingung der darauf senkrecht stehenden Flächen.

Den resultierenden Flächenformen eines gleichwertigen Komplexes hat man nun besondere Namen gegeben. Hier werden die von Groth vorgeschlagenen Bezeichnungen angewandt. Auch bei einer Ausgangslage

mit einem Freiheitsgrad oder bei allgemeiner Lage können durch besondere Winkelwerte ausgezeichnete Formen auftreten, ganz entsprechend den besonderen Gittertypen des Diskontinuums. Dadurch werden gewisse Formen vieldeutig, eine Unterscheidung ist mittels der Flächensymmetrie oder mittelst, allfälliger in Kombination damit vorkommenden, weniger vieldeutigen Formen möglich.

Die Tabelle V gibt einen vollständigen Überblick über die Flächenkomplexe aller 32 Klassen. Neben der Flächenform ist die Zahl der zu einem gleichwertigen Komplex gehörigen Flächen sowie die Flächensymmetrie angegeben. Die Tabelle gestattet die Bestimmung der Kristallklasse, der irgend ein gut ausgebildetes Kristallindividuum angehört. Bei Vieldeutigkeit gibt sie über die zur Entscheidung anzubringenden Ätzfiguren Aufschluß. Zusammen mit der Tabelle II enthält sie alle notwendigen Daten der makroskopischen Kristallographie. Auch Fragen der physikalischen Kristallographie lassen sich mittels der Tabelle erörtern. Ein Pedion charakterisiert beispielsweise polar vektorielle Richtungen.

Pedion, Doma, Sphenoide, Tetraeder, Bisphenoide, didigonales bezw. tetragonales Skalenoeder, Trapezoeder, tetraedrisches Pentagondodekaeder, Triakistetraeder, Deltoiddodekaeder, Hexakistetraeder, Pentagonikositetraeder, einfache Pyramiden, trigonales Prisma, ditrigonales Prisma und ebensolche Bipyramiden sind Formen, die nur in Klassen ohne Symmetriezentren auftreten können usw.

Eine eingehende Diskussion der Tabelle fällt außerhalb des Rahmens dieses Buches; dem mit der gewöhnlichen Kristallographie Vertrauten wird sie leicht handlich erscheinen.

Sie ist gewissermaßen das Gegenstück zu der ihr unmittelbar vorausgehenden großen Tabelle der Punktlagen der 230 Raumsysteme. Man erkennt, wie ein und derselbe Gesichtspunkt die geometrische Kristallographie des Diskontinuums und Kontinuums beherrscht.

Die Flächenform allgemeinster Lage ist von P. v. Groth zur Bezeichnung der Kristallklassen benutzt worden. Dadurch erklären sich die zweiten Benennungen der Klassen der Tabelle II auf Seite 133 und der Einzeldarstellungen.

IV. Haupttabelle: Systematik der Punktlagen und ihrer Symmetriebedingungen in den einzelnen Raumsystemen

Raumgruppe	Zähligkeiten von Punktlagen				Symmetrie der Punktlagen
	kein Freiheitsgrad	1 Freiheitsgrad	2 Freiheitsgrade	3 Freiheitsgrade	
$\mathfrak{C}_1$	—	—	—	1	C_1
$\mathfrak{C}_i$	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1;	—	—	2	C_i, C_i, C_i, C_i, C_i, C_i, C_i, C_i; C_1
$\mathfrak{C}_s^1$	—	—	1	2	C_s; C_1
$\mathfrak{C}_s^2$	—	—	—	2	C_1
$\mathfrak{C}_s^3$	—	—	2	4	C_s; C_1
$\mathfrak{C}_s^4$	—	—	—	4	C_1
$\mathfrak{C}_2^1$	—	1	—	2	C_2; C_1
$\mathfrak{C}_2^2$	—	—	—	2	C_1
$\mathfrak{C}_2^3$	—	2	—	4	C_2; C_1
$\mathfrak{C}_{2h}^1$	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1	2	2	4	C_{2h}, C_{2h}, C_{2h}, C_{2h}, C_{2h}, C_{2h}, C_{2h}, C_{2h}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{C}_{2h}^4$	2, 2, 2, 2	2	—	4	C_i, C_i, C_i, C_i; C_2; C_1
$\mathfrak{C}_{2h}^2$	2, 2, 2, 2	—	2	4	C_i, C_i, C_i, C_i; C_s; C_1
$\mathfrak{C}_{2h}^5$	2, 2, 2, 2	—	—	4	C_i, C_i, C_i, C_i; C_1
$\mathfrak{C}_{2h}^3$	2, 2, 2, 2; 4, 4,	4	4	8	C_{2h}, C_{2h}, C_{2h}, C_{2h}; C_i, C_i; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{C}_{2h}^6$	4, 4; 4, 4	4	—	8	C_i, C_i; C_i, C_i; C_2; C_1
$\mathfrak{C}_{2v}^1$	—	1	2	4	C_{2v}; C_s; C_1
$\mathfrak{C}_{2v}^4$	—	2	2	4	C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{C}_{2v}^3$	—				
$\mathfrak{C}_{2v}^6$	—				
$\mathfrak{C}_{2v}^8$	—	2	—	4	C_2; C_1
$\mathfrak{C}_{2v}^{10}$	—				
$\mathfrak{C}_{2v}^2$	—	—	2	4	C_s; C_1
$\mathfrak{C}_{2v}^7$	—				
$\mathfrak{C}_{2v}^5$	—	—	—	4	C_1
$\mathfrak{C}_{2v}^9$	—				
$\mathfrak{C}_{2v}^{11}$	—	2; 4	4	8	C_{2v}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{C}_{2v}^{13}$	—	4	—	8	C_2; C_1
$\mathfrak{C}_{2v}^{12}$	—	—	4	8	C_s; C_1
$\mathfrak{C}_{2v}^{14}$	—	2	4	8	C_{2v}; C_s; C_1
$\mathfrak{C}_{2v}^{15}$	—	4	4	8	C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{C}_{2v}^{16}$	—				
$\mathfrak{C}_{2v}^{17}$	—	4	—	8	C_2; C_1
$\mathfrak{C}_{2v}^{18}$	—	4; 8	8	16	C_{2v}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{C}_{2v}^{19}$	—	8	—	16	C_2; C_1
$\mathfrak{C}_{2v}^{20}$	—	2	4	8	C_{2v}; C_s; C_1
$\mathfrak{C}_{2v}^{22}$	—	4	4	8	C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{C}_{2v}^{21}$	—	4	—	8	C_2; C_1

Raumgruppe	Zähligkeiten von Punktlagen				Symmetrie der Punktlagen
	kein Freiheitsgrad	1 Freiheitsgrad	2 Freiheitsgrade	2 Freiheitsgrade	
$\mathfrak{B}^1$	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1	2	—	4	V, V, V, V, V, V, V, V; C_2; C_1
$\mathfrak{B}^2$	—	2	—	4	C_2; C_1
$\mathfrak{B}^3$	—				
$\mathfrak{B}^4$	—	—	—	4	C_1
$\mathfrak{B}^6$	2, 2, 2, 2	4	—	8	V, V, V, V; C_2; C_1
$\mathfrak{B}^5$	—	4	—	8	C_2; C_1
$\mathfrak{B}^7$	4, 4, 4, 4	8	—	16	V, V, V, V; C_2; C_1
$\mathfrak{B}^8$	2, 2, 2, 2	4	—	8	V, V, V, V; C_2; C_1
$\mathfrak{B}^9$	—	4	—	8	C_2; C_1
$\mathfrak{B}_h^1$	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1	2	4	8	V_h, V_h, V_h, V_h, V_h, V_h, V_h, V_h; C_{2v}; C_s; C_1
$\mathfrak{B}_h^3$	2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	4	4	8	V, V, V, V; C_{2h}, C_{2h}, C_{2h}, C_{2h}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{B}_h^2$	2, 2, 2, 2; 4. 4	4	—	8	V, V, V, V; C_i, C_i; C_2; C_1
$\mathfrak{B}_h^4$					
$\mathfrak{B}_h^5$	2, 2, 2, 2	2, 4	4	8	C_{2h}, C_{2h}, C_{2h}, C_{2h}; C_{2v}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{B}_h^7$	2, 2, 2, 2	4	4	8	C_{2h}, C_{2h}, C_{2h}, C_{2h}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{B}_h^9$					
$\mathfrak{B}_h^{12}$					
$\mathfrak{B}_h^{13}$	4, 4	2	4	8	C_i, C_i; C_{2v}; C_s; C_1
$\mathfrak{B}_h^{11}$	4, 4	4	4	8	C_i, C_i; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{B}_h^6$	4, 4	4	—	8	C_i, C_i; C_s; C_1
$\mathfrak{B}_h^8$					
$\mathfrak{B}_h^{10}$					
$\mathfrak{B}_h^{14}$					
$\mathfrak{B}_h^{16}$	4, 4	—	4	8	C_i, C_i; C_s; C_1
$\mathfrak{B}_h^{15}$	4, 4	—	—	8	C_i, C_i; C_1
$\mathfrak{B}_h^{19}$	2, 2, 2, 2; 4, 4	4, 8	8	16	V_h, V_h, V_h, V_h; C_{2h}, C_{2h}; C_{2v}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{B}_h^{21}$	4, 4; 4, 4, 4, 4	4, 8	8	16	V, V; C_{2h}, C_{2h}, C_{2h}, C_{2h}; C_{2v}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{B}_h^{20}$	4, 4; 4, 4; 4, 4	8	8	16	V, V; C_{2h}, C_{2h}; C_{2h}, C_{2h}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{B}_h^{22}$	4, 4; 8, 8	8	—	16	V, V; C_i, C_i; C_2; C_1
$\mathfrak{B}_h^{17}$	4, 4; 8	4, 8	8	16	C_{2h}, C_{2h}; C_i; C_i; C_{2v}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{B}_h^{18}$	4, 4; 8	8	8	16	C_{2h}, C_{2h}; C_i, C_i; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{B}_h^{23}$	4, 4; 8; 8, 8, 8	8, 16	16	32	V_h, V_h; V; C_{2h}, C_{2h}, C_{2h}; C_{2v}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{B}_h^{24}$	8, 8; 16, 16	16	—	32	V V; C_i, C_i; C_2; C_1

Raumgruppe	Zähligkeiten von Punktlagen				Symmetrie der Punktlagen
	kein Freiheitsgrad	1 Freiheitsgrad	2 Freiheitsgrade	3 Freiheitsgrade	
$\mathfrak{B}_h^{25}$	2, 2, 2, 2; 8	4	8	16	V_h, V_h, V_h, V_h; C_i; C_{2v}; C_s; C_1
$\mathfrak{B}_h^{26}$	4, 4; 4, 4; 8	8	8	16	V, V; C_{2h}, C_{2h}; C_i; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{B}_h^{28}$	4, 4, 4, 4	4, 8	8	16	C_{2h}, C_{2h}, C_{2h}, C_{2h}; C_{2v}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{B}_h^{27}$	8, 8	8	—	16	C_i, C_i; C_2; C_1
$\mathfrak{C}_3^1$	—	2	—	6	C_3; C_1
$\mathfrak{C}_3^4$	—	6	—	18	C_3; C_1
$\mathfrak{C}_3^2$, $\mathfrak{C}_3^3$	—	—	—	6	C_1
$\mathfrak{C}_{3i}^1$	2, 2: 6, 6	4	—	12	C_{3i}, C_{3i}; C_i, C_i; C_3; C_1
$\mathfrak{C}_{3i}^2$	6, 6; 18, 18	12	—	36	C_{3i}, C_{3i}; C_i, C_i; C_3; C_1
$\mathfrak{C}_{3v}^1$	—	2	6	12	C_{3v}; C_s; C_1
$\mathfrak{C}_{3v}^2$	—	2, 4	6	12	C_{3v}; C_3; C_s; C_1
$\mathfrak{C}_{3v}^3$	—	4	—	12	C_3; C_1
$\mathfrak{C}_{3v}^4$	—	4	—	12	C_3; C_1
$\mathfrak{C}_{3v}^5$	—	6	18	36	C_{3v}; C_s; C_1
$\mathfrak{C}_{3v}^6$	—	12	—	36	C_3; C_1
$\mathfrak{D}_3^1$	2, 2, 2, 2, 2, 2	4, 6	—	12	D_3, D_3, D_3, D_3, D_3, D_3; C_3; C_2; C_1
$\mathfrak{D}_3^2$	2, 2	4, 6	—	12	D_3, D_3; C_3; C_2; C_1
$\mathfrak{D}_3^3$, $\mathfrak{D}_3^4$, $\mathfrak{D}_3^5$, $\mathfrak{D}_3^6$	—	6	—	12	C_2; C_1
$\mathfrak{D}_3^7$	6, 6	12, 18	—	36	D_3, D_3; C_3; C_2; C_1
$\mathfrak{D}_{3d}^1$	2, 2; 4, 4; 6, 6	4, 8, 12	12	24	D_{3d}, D_{3d}; D_3, D_3; C_{2h}, C_{2h}; C_{3v}; C_3; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{D}_{3d}^3$	2, 2, 6, 6	4, 12	12	24	D_{3d}, D_{3d}; C_{2h}, C_{2h}; C_{3v}; C_2, C_s, C_1
$\mathfrak{D}_{3d}^2$	4, 4, 4; 4; 12	8, 12	—	24	D_3, D_3, D_3; C_{3i}; C_i; C_3; C_2; C_1
$\mathfrak{D}_{3d}^4$	4; 4, 12	8, 12	—	24	D_3; C_{3i}; C_i; C_3; C_2; C_1
$\mathfrak{D}_{3d}^5$	6, 6; 18; 18	12, 36	36	72	D_{3d}, D_{3d}; C_{2h}, C_{2h}; C_{3v}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{D}_{3d}^6$	12; 12; 36	24, 36	—	72	D_3; C_{3i}; C_i; C_3; C_2; C_1
$\mathfrak{S}_4^1$	1, 1, 1, 1	2	—	4	S_4, S_4, S_4, S_4; C_2; C_1
$\mathfrak{S}_4^2$	2, 2, 2, 2	4	—	8	S_4, S_4, S_4, S_4; C_2; C_1

Raumgruppe	Zähligkeiten von Punktlagen				Symmetrie der Punktlagen
	kein Freiheitsgrad	1 Freiheitsgrad	2 Freiheitsgrade	3 Freiheitsgrade	
$\mathfrak{C}_4^{\,1}$	—	1, 2	—	4	C_4; C_2; C_1
$\mathfrak{C}_4^{\,3}$	—	2	—	4	C_2; C_1
$\mathfrak{C}_4^{\,2}$, $\mathfrak{C}_4^{\,4}$	—	—	—	4	C_1
$\mathfrak{C}_4^{\,5}$	—	2, 4	—	8	C_4; C_2; C_1
$\mathfrak{C}_4^{\,6}$	—	4	—	8	C_2; C_1
$\mathfrak{C}_{4v}^{\,1}$	—	1, 2	4	8	C_{4v}; C_{2v}; C_s; C_1
$\mathfrak{C}_{4v}^{\,2}$	—	2, 2	4	8	C_4; C_{2v}; C_s; C_1
$\mathfrak{C}_{4v}^{\,5}$, $\mathfrak{C}_{4v}^{\,6}$	—	2, 4	—	8	C_4; C_2; C_1
$\mathfrak{C}_{4v}^{\,3}$, $\mathfrak{C}_{4v}^{\,4}$	—	2, 4	4	8	C_{2v}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{C}_{4v}^{\,7}$	—	2	4	8	C_{2v}; C_s; C_1
$\mathfrak{C}_{4v}^{\,8}$	—	4	—	8	C_2; C_1
$\mathfrak{C}_{4v}^{\,9}$	—	2, 4	8	16	C_{4v}; C_{2v}; C_s; C_1
$\mathfrak{C}_{4v}^{\,10}$	—	4, 4	8	16	C_4; C_{2v}; C_s; C_1
$\mathfrak{C}_{4v}^{\,11}$	—	4	8	16	C_{2v}; C_s; C_1
$\mathfrak{C}_{4v}^{\,12}$	—	8	—	16	C_2; C_1
$\mathfrak{C}_{4h}^{\,1}$	1, 1, 1, 1; 2, 2	2, 4	4	8	C_{4h}, C_{4h}, C_{4h}, C_{4h}; C_{2h}, C_{2h}; C_4; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{C}_{4h}^{\,3}$	4, 4	2, 4	—	8	C_i, C_i; C_4; C_2; C_1
$\mathfrak{C}_{4h}^{\,2}$	2, 2, 2, 2	4	4	8	C_{2h}, C_{2h}, C_{2h}, C_{2h}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{C}_{4h}^{\,4}$	4, 4	4	—	8	C_i, C_i; C_2; C_1
$\mathfrak{C}_{4h}^{\,5}$	2, 2, 4, 8	4, 8	8	16	C_{4h}, C_{4h}; C_{2h}; C_i; C_4; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{C}_{4h}^{\,6}$	8, 8	8	—	16	C_i, C_i; C_2; C_1
$\mathfrak{B}_d^{\,1}$	1, 1, 1, 1; 2, 2	2, 4	4	8	V_d, V_d, V_d, V_d; V, V; C_{2v}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{B}_d^{\,2}$	2, 2, 2, 2; 2, 2	4	—	8	V, V, V, V; S_4, S_4; C_2; C_1
$\mathfrak{B}_d^{\,3}$	2, 2	2, 4	4	8	S_4, S_4; C_{2v}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{B}_d^{\,4}$	2, 2	4	—	8	S_4, S_4; C_2; C_1
$\mathfrak{B}_d^{\,5}$	2, 2, 2, 2	4, 8	8	16	V_d, V_d, V_d, V_d; C_{2v}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{B}_d^{\,6}$, $\mathfrak{B}_d^{\,7}$, $\mathfrak{B}_d^{\,8}$	4, 4; 4, 4	8	—	16	V, V; S_4, S_4; C_2; C_1
$\mathfrak{B}_d^{\,9}$	4, 4, 4, 4	8, 16	16	32	V_d, V_d, V_d, V_d; C_{2v}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{B}_d^{\,10}$	8, 8; 8, 8	16	—	32	V, V; S_4, S_4; C_2; C_1
$\mathfrak{B}_d^{\,11}$	2, 2; 4; 4	4, 8	8	16	V_d, V_d; V; S_4; C_{2v}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{B}_d^{\,12}$	4, 4	8	—	16	S_4, S_4; C_2; C_1

Raumgruppe	Zähligkeiten von Punktlagen				Symmetrie der Punktlagen
	kein Freiheitsgrad	1 Freiheitsgrad	2 Freiheitsgrade	3 Freiheitsgrade	
$\mathfrak{D}_4^{\,1}$	1, 1, 1, 1; 2, 2	2, 4	—	8	D_4, D_4, D_4, D_4; V, V; C_4; C_2; C_1
$\mathfrak{D}_4^{\,2}$	2, 2	2, 4	—	8	V, V; C_4; C_2; C_1
$\mathfrak{D}_4^{\,5}$	2, 2, 2, 2, 2, 2	4	—	8	V, V, V, V, V, V; C_2; C_1
$\mathfrak{D}_4^{\,6}$	2, 2	4	—	8	V, V; C_2; C_1
$\mathfrak{D}_4^{\,3}$, $\mathfrak{D}_4^{\,7}$	—	4	—	8	C_2; C_1
$\mathfrak{D}_4^{\,4}$, $\mathfrak{D}_4^{\,8}$	—	4	—	8	C_2; C_1
$\mathfrak{D}_4^{\,9}$	2, 2, 4, 4	4, 8	—	16	D_4, D_4; V, V; C_4; C_2; C_1
$\mathfrak{D}_4^{\,10}$	4, 4	8	—	16	V, V; C_2; C_1
$\mathfrak{D}_{4h}^{\,1}$	1, 1, 1, 1; 2, 2	2, 4	8	16	D_{4h}, D_{4h}, D_{4h}, D_{4h}; V_h, V_h; C_{4v}; C_{2v}; C_s; C_1
$\mathfrak{D}_{4h}^{\,2}$	2, 2; 2, 2; 4; 4	4, 8	8	16	D_4, D_4; C_{4h}, C_{4h}; V; C_{2h}; C_4; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{D}_{4h}^{\,5}$	2, 2, 2, 2	4, 4	8	16	C_{4h}, C_{4h}; V_h, V_h; C_4; C_{2v}; C_s; C_1
$\mathfrak{D}_{4h}^{\,6}$	2, 2, 4; 4	4, 8	8	16	C_{4h}, C_{4h}; C_{2h}; V; C_4; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{D}_{4h}^{\,3}$	2, 2; 2, 2; 4, 4	4, 4, 8	8	16	D_4, D_4; V_d, V_d; C_{2h}, C_{2h}; C_4; C_{2v}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{D}_{4h}^{\,4}$	2, 2; 4; 4; 8	4, 8	—	16	D_4, D_4; V; S_4; C_i; C_4; C_2; C_1
$\mathfrak{D}_{4h}^{\,7}$	2, 2; 4, 4	2, 4, 8	8	16	V_d, V_d; C_{2h}, C_{2h}; C_{4v}; C_{2v}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{D}_{4h}^{\,8}$	4; 4; 8	4, 8	—	16	V; S_4; C_i; C_4; C_2; C_1
$\mathfrak{D}_{4h}^{\,9}$	2, 2, 2, 2; 2, 2	4, 8	8	16	V_h, V_h, V_h, V_h; V_d, V_d; C_{2v}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{D}_{4h}^{\,10}$	2, 2; 2, 2; 4; 4	4, 8	8	16	V_h, V_h; V_d, V_d; C_{2h}; V; C_{2v}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{D}_{4h}^{\,14}$	2, 2; 4; 4	4, 8	8	16	V_h, V_h; C_{2h}; S_4; C_{2v}; C_2; C_s; C_i
$\mathfrak{D}_{4h}^{\,13}$	4; 4, 4; 4	8	8	16	V; C_{2h}, C_{2h}; S_4; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{D}_{4h}^{\,12}$	2, 2; 4, 4; 4, 4	4, 8	8	16	V_d, V_d; V, V; C_{2h}, C_{2h}; C_{2v}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{D}_{4h}^{\,11}$	4, 4, 4; 4; 8	8	—	16	V, V, V; S_4; C_i; C_2; C_1
$\mathfrak{D}_{4h}^{\,15}$	2, 2; 8	4, 8	8	16	V_d, V_d; C_i; C_{2v}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{D}_{4h}^{\,16}$	4; 4; 4, 4	4, 8	8	16	V; S_4; C_{2h}, C_{2h}; C_{2v}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{D}_{4h}^{\,17}$	2, 2, 4; 4; 8	4; 8; 16	16	32	D_{4h}, D_{4h}; V_h; V_d; C_{2h}; C_{4v}; C_{2v}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{D}_{4h}^{\,18}$	4; 4; 4; 4; 8	8; 8; 16	16	32	D_4; C_{4h}; V_h; V_d; C_{2h}; C_4; C_{2v}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{D}_{4h}^{\,19}$	4, 4; 8, 8	8, 16	16	32	V_d, V_d; C_{2h}, C_{2h}; C_{2v}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{D}_{4h}^{\,20}$	8; 8; 16	16	—	32	V; S C_i; C_2; C_1

Raumgruppe	Zähligkeiten von Punktlagen				Symmetrie der Punktlagen
	kein Freiheitsgrad	1 Freiheitsgrad	2 Freiheitsgrade	3 Freiheitsgrade	
$\mathfrak{C}_{3h}^{1}$	2, 2, 2, 2, 2, 2	4	6	12	C_{3h}, C_{3h}, C_{3h}, C_{3h}, C_{3h}, C_{3h}; C_3; C_s; C_1
$\mathfrak{D}_{3h}^{1}$	2, 2, 2, 2, 2, 2	4, 6	12	24	D_{3h}, D_{3h}, D_{3h}, D_{3h}, D_{3h}, D_{3h}; C_{3v}; C_{2v}; C_s; C_1
$\mathfrak{D}_{3h}^{3}$	2, 2; 4, 4	4, 6, 8	12	24	D_{3h}, D_{3h}; C_{3h}, C_{3h}; C_{3v}; C_{2v}; C_3; C_s; C_1
$\mathfrak{D}_{3h}^{2}$	4, 4, 4; 4, 4, 4	8, 12	12	24	D_3, D_3, D_3; C_{3h}, C_{3h}, C_{3h}; C_3; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{D}_{3h}^{4}$	4; 4, 4, 4	8, 12	12	24	D_3; C_{3h}, C_{3h}, C_{3h}; C_3; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{C}_{6}^{1}$	—	2, 4, 6	—	12	C_6; C_3; C_2; C_1
$\mathfrak{C}_{6}^{6}$	—	4	—	12	C_3; C_1
$\mathfrak{C}_{6}^{4}$, $\mathfrak{C}_{6}^{5}$	—	6	—	12	C_2; C_1
$\mathfrak{C}_{6}^{2}$, $\mathfrak{C}_{6}^{3}$	—	—	—	12	C_1
$\mathfrak{C}_{6v}^{1}$	—	2, 4, 6	12	24	C_{6v}; C_{3v}; C_{2v}; C_s; C_1
$\mathfrak{C}_{6v}^{2}$	—	4, 4, 12	—	24	C_6; C_3; C_2; C_1
$\mathfrak{C}_{6v}^{3}$	—	4, 8	12	24	C_{3v}; C_3; C_s; C_1
$\mathfrak{C}_{6v}^{4}$	—	4	12	24	C_{3v}; C_s; C_1
$\mathfrak{C}_{6h}^{1}$	2, 2; 4, 4; 6, 6	4, 8, 12	12	24	C_{6h}, C_{6h}; C_{3h}, C_{3h}; C_{2h}, C_{2h}, C_6; C_3; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{C}_{6h}^{2}$	4; 4, 4, 4; 12	8	12	24	C_{3i}; C_{3h}, C_{3h}, C_{3h}; C_i; C_3; C_s; C_1
$\mathfrak{D}_{6}^{1}$	2, 2; 4, 4; 6, 6	4, 8, 12	—	24	D_6, D_6; D_3, D_3; V, V; C_6; C_3; C_2; C_1
$\mathfrak{D}_{6}^{6}$	4, 4, 4, 4	8, 12	—	24	D_3, D_3, D_3, D_3; C_3; C_2; C_1
$\mathfrak{D}_{6}^{4}$, $\mathfrak{D}_{6}^{5}$	6, 6, 6, 6	12	—	24	V, V, V, V; C_2; C_1
$\mathfrak{D}_{6}^{2}$, $\mathfrak{D}_{6}^{3}$	—	12	—	24	C_2; C_1
$\mathfrak{D}_{6h}^{1}$	2, 2; 4, 4; 6, 6	4, 8, 12	24	48	D_{6h}, D_{6h}; D_{3h}, D_{3h}; V_h, V_h; C_{6v}, C_{3v}, C_{2v}; C_s, C_1
$\mathfrak{D}_{6h}^{2}$	4; 4; 8; 8; 12; 12	8, 16, 24	24	48	D_6; C_{6h}; D_3; C_{3h}; V; C_{2h}; C_6; C_3; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{D}_{6h}^{3}$	4; 4; 8; 8; 12	8; 12; 16; 24	24	48	D_{3h}; D_{3d}; C_{3h}; D_3; C_{2h}; C_{3v}; C_{2v}; C_3; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{D}_{6h}^{4}$	4; 4, 4, 4; 12	8; 12; 24	24	48	D_{3d}; D_{3h}, D_{3h}, D_{3h}; C_{2h}; C_{3v}; C_{2v}; C_2; C_s; C_1

Raumgruppe	Punktlagen ohne Freiheitsgrad	Punktlagen mit einem Freiheitsgrad	Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden	Punktlagen mit drei Freiheitsgraden	Symmetriebedingungen
$\mathfrak{T}^1$	1, 1; 3, 3	4; 6	—	12	T, T; V, V; C_3; C_2; C_1
$\mathfrak{T}^2$	4, 4, 4, 4	16; 24	—	48	T, T, T, T; C_3, C_2; C_1
$\mathfrak{T}^3$	2; 6	8; 12	—	24	T; V; C_3; C_2; C_1
$\mathfrak{T}^4$	—	4	—	12	C_3; C_1
$\mathfrak{T}^5$	—	8; 12	—	24	C_3; C_2; C_1
$\mathfrak{T}_h^1$	1, 1; 3; 3	6; 8	12	24	T_h, T_h; V_h, V_h; C_{2v}; C_3; C_s; C_1
$\mathfrak{T}_h^2$	2; 6; 4, 4	8, 12	—	24	T, V; C_{3i}, C_{3i}; C_3; C_2; C_1
$\mathfrak{T}_h^3$	4, 4; 8; 24	24; 32; 48	48	96	T_h, T_h; T; C_{2h}; C_{2v}; C_3; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{T}_h^4$	8, 8; 16, 16	32; 48	—	96	T, T; C_{3i}, C_{3i}; C_3; C_2; C_1
$\mathfrak{T}_h^5$	2; 6; 8	12; 16	24	48	T_h; V_h; C_{3i}; C_{2v}; C_3; C_s; C_1
$\mathfrak{T}_h^6$	4, 4	8	—	24	C_{3i}, C_{3i}; C_3; C_1
$\mathfrak{T}_h^7$	8, 8	16; 24	—	48	C_{3i}, C_{3i}; C_3; C_2; C_1
$\mathfrak{T}_d^1$	1, 1; 3, 3	4; 6; 12	12	24	T_d, T_d; V_d, V_d; C_{3v}; C_{2v}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{T}_d^2$	4, 4, 4, 4	16; 24	48	96	T_d, T_d, T_d, T_d; C_{3v}; C_{2v}; C_s; C_1
$\mathfrak{T}_d^3$	2; 6; 12	8; 12; 24	24	48	T_d; V_d; S_4; C_{3v}; C_{2v}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{T}_d^4$	2, 6; 6, 6	8; 12	—	24	T; V; S_4, S_4; C_3; C_2; C_1
$\mathfrak{T}_d^5$	8, 8; 24, 24	32; 48	—	96	T, T; S_4, S_4; C_3; C_2; C_1
$\mathfrak{T}_d^6$	12, 12	16; 24	—	48	S_4, S_4; C_3; C_2; C_1

Raumgruppe	Punktlagen ohne Freiheitsgrad	Punktlagen mit einem Freiheitsgrad	Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden	Punktlagen mit drei Freiheitsgraden	Symmetriebedingungen
$\mathfrak{D}^1$	1, 1; 3, 3	6; 8; 12	—	24	O, O; D_4, D_4; C_4; C_3; C_2; C_1
$\mathfrak{D}^2$	2; 4, 4; 6, 6, 6	8; 12	—	24	T; D_3, D_3; V, V, V; C_3; C_2; C_1
$\mathfrak{D}^3$	4, 4; 8; 24	24; 32; 48	—	96	O, O; T; V; C_4; C_3; C_2; C_1
$\mathfrak{D}^4$	8, 8; 16, 16	32; 48	—	96	T, T; D_3, D_3; C_3, C_2, C_1
$\mathfrak{D}^5$	2; 6; 8; 12	12; 16; 24	—	48	O; D_4; D_3; V; C_4; C_3; C_2; C_1
$\mathfrak{D}^6$	4, 4	8; 12	—	24	D_3, D_3; C_3, C_2; C_1
$\mathfrak{D}^7$	4, 4	8; 12	—	24	
$\mathfrak{D}^8$	8, 8; 12, 12	16; 24	—	48	D_3, D_3; V, V; C_3; C_2; C_1
$\mathfrak{D}_h^1$	1, 1; 3; 3	6; 8; 12	24	48	O_h, O_h; D_{4h}, D_{4h}; C_{4v}; C_{3v}; C_{2v}; C_s; C_1
$\mathfrak{D}_h^2$	2; 6; 8; 12	12; 16; 24	—	48	O; D_4; C_{3i}; S_4; C_4; C_3; C_2; C_1
$\mathfrak{D}_h^3$	2; 6; 6, 6; 8	12; 16; 24	24	48	T_h; V_h; V_d, V_d; D_3; C_{2v}; C_3; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{D}_h^4$	2; 4, 4; 6; 12	8; 12; 24	24	48	T_d; D_{3d}, D_{3d}; V_d, V; C_{3v}; C_{2v}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{D}_h^5$	4, 4; 8; 24	24; 32; 48	96	192	O_h, O_h; T_d; V_h; C_{4v}; C_{3v}; C_{2v}; C_s; C_1
$\mathfrak{D}_h^6$	8; 8; 24; 24	48; 48; 64; 96	96	192	O; T_h; C_{4h}; V_d; C_4; C_{2v}; C_3; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{D}_h^7$	8, 8; 16, 16	32; 48; 96	96	192	T_d, T_d; D_{3d}, D_{3d}; C_{3v}; C_{2v}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{D}_h^8$	16; 32; 32; 48	64; 96	—	192	T; C_{3i}; D_3; S_4; C_3; C_2; C_1
$\mathfrak{D}_h^9$	2; 6; 8; 12	12; 16; 24, 48	48	96	O_h; D_{4h}; D_{3d}; V_d; C_{4v}; C_{3v}; C_{2v}; C_2; C_s; C_1
$\mathfrak{D}_h^{10}$	16; 16; 24; 24	32; 48	—	96	C_{3i}; D_3; V; S_4; C_3; C_2; C_1

V. Haupttabelle: Die Flächenformen (gleichwertigen

Kristallklasse	Flächenformen ohne Freiheitsgrad (Senkrecht auf Achsen)
C_1	— — —
C_i	— — —
C_s	— — —
C_2	1 = Pedion = (C_2); 1 = Pedion = (C_2)
C_{2h}	2 = Pinakoid = (C_2)
C_{2v}	1 = Pedion = (C_{2v}); 1 = Pedion = (C_{2v})
V	2 = Pinakoid = (C_2); 2 = Pinakoid = (C_2); 2 = Pinakoid = (C_2)
V_h	2 = Pinakoid = (C_{2v}); 2 = Pinakoid = (C_{2v}); 2 = Pinakoid = (C_{2v})
C_3	1 = Pedion = (C_3); 1 = Pedion = (C_3)
C_{3i}	2 = Pinakoid = (C_3)
C_{3v}	1 = Pedion = (C_{3v}); 1 = Pedion = (C_{3v})
D_3	2 = Pinakoid = (C_3); 3 = Trig. Prisma = (C_2); 3 = Trig. Prisma = (C_2)
D_{3d}	2 = Pinakoid = (C_{3v}); 6 = Hexag. Prisma = (C_2)
C_{3h}	2 = Pinakoid = (C_3)
D_{3h}	2 = Pinakoid = (C_{3v}); 3 = Trig. Prisma = (C_{2v}); 3 = Trig. Prisma = (C_{2v})
C_6	1 = Pedion = (C_6); 1 = Pedion = (C_6)
C_{6h}	2 = Pinakoid = (C_6)
C_{6v}	1 = Pedion = (C_{6v}); 1 = Pedion = (C_{6v})
D_6	2 = Pinakoid = (C_6); 6 = Hexag. Prisma = (C_2); 6 = Hexag. Prisma = (C_2)
D_{6h}	2 = Pinakoid = (C_{6v}); 6 = Hexag. Prisma = (C_{2v}); 6 = Hexag. Prisma = (C_{2v})
C_4	1 = Pedion = (C_4); 1 = Pedion = (C_4)
C_{4h}	2 = Pinakoid = (C_4)
C_{4v}	1 = Pedion = (C_{4v}); 1 = Pedion = (C_{4v})
D_4	2 = Pinakoid = (C_4); 4 = Tetrag. Prisma = (C_2); 4 = Tetrag. Prisma = (C_2)
D_{4h}	2 = Pinakoid = (C_{4v}); 4 = Tetrag. Prisma = (C_{2v}); 4 = Tetrag. Prisma = (C_{2v})
S_4	2 = Pinakoid = (C_2)
V_d	2 = Pinakoid = (C_{2v}); 4 = Tetrag. Prisma = (C_2)
T	6 = Hexaeder = (C_2); 4 = Tetraeder = (C_3); 4 = Tetraeder = (C_3)
T_h	6 = Hexaeder = (C_{2v}); 8 = Oktaeder = (C_3)
T_d	6 = Hexaeder = (C_{2v}); 4 = Tetraeder = (C_{3v}); 4 = Tetraeder = (C_{3v})
O	6 = Hexaeder = (C_4); 8 = Oktaeder = (C_3); 12 = Rhombendodekaeder = (C_2)
O_h	6 = Hexaeder = (C_{4v}); 8 = Oktaeder = (C_{3v}); 12 = Rhombendodekaeder = (C_{2v})

Flächenkomplexe) in den 32 Kristallklassen

Flächenformen mit einem Freiheitsgrad (Senkrecht auf Symmetrieebenen allein)	Flächenformen mit mehreren Freiheitsgraden (Allgemeinste Lagen ohne Flächensymmetrie)
— — —	1 = Pedion
— — —	2 = Pinakoid
1 = Pedion = (C_s)	2 = Doma — Pinakoid
— — —	2 = Sphenoid — Pinakoid
2 = Pinakoid = (C_s)	4 = Monokl. Prisma
2 = Doma — Pinakoid = (C_s)	4 = Rhombische Pyramide — Prisma
— — —	4 = Rhombisches Bisphenoid — Prisma
4 = Rhomb. Prisma = (C_s)	8 = Rhombische Bipyramide
— — —	3 = Trigonale Pyramide — Prisma
— — —	6 = Rhomboeder — Hexag. Prisma
3 = Trig. Pyramide — trig. Prisma = (C_s)	6 = Ditrig. Pyramide — ditrig. Prisma — hexag. Pyramide — hexag. Prisma
— — —	6 = Trig. Trapezoeder — trig. Bipyramide — Rhomboeder — ditrig. und hexag. Prisma
6 = Rhomboeder — hexag. Prisma = (C_s)	12 = Ditrig. Skalenoeder — hexag. Bipyramide — dihexag. Prisma
3 = Trig. Prisma = C_s	6 = Trig. Bipyramide
6 = Ditrig. Prisma — hexag. Prisma = (C_s); 6 = Trig. Bipyramide = C_s	12 = Ditrig. Bipyramide — hexag. Bipyramide
— — —	6 = Hexag. Pyramide — hexag. Prisma
6 = Hexag. Prisma = (C_s)	12 = Hexag. Bipyramide
6 = Hexag. Pyramide — hexag. Prisma = (C_s)	12 = Dihexag. Pyramide — dihexag. Prisma
— — —	12 = Hexag. Trapezoeder — hexag. Bipyramide — dihexag. Prisma
12 = Dihexag. Prisma = (C_s); 12 = Hexag. Bipyramide = (C_s)	24 = Dihexag. Bipyramide
— — —	4 = Tetrag. Pyramide — Prisma
4 = Tetrag. Prisma = (C_s)	8 = Tetrag. Bipyramide
4 = Tetrag. Pyramide — Prisma = (C_s)	8 = Ditetrag. Pyramide — ditetrag. Prisma
— — —	8 = Tetrag. Trapezoeder — ditetrag. Prisma — tetrag. Bipyramide
8 = Ditetrag. Prisma = (C_s); 8 = Tetrag. Bipyramide = (C_s)	16 = Ditetrag. Bipyramide
— — —	4 = Tetrag. Bisphenoid — Prisma
4 = Tetrag. Bisphenoid — Prisma = (C_s)	8 = Tetrag. Skalenoeder — ditetrag. Prisma — tetrag. Bipyramide
— — —	12 = Zweierlei Pentagondodekaeder — Triakistetraeder — Deltoiddodekaeder — Rhombendodekaeder
12 = Pentagondodekaeder — Rhombendodekaeder = (C_s)	24 = Dyakisdodekaeder — Ikositetraeder — Triakisoktaeder
12 = Triakistetraeder — Deltoiddodekaeder — Rhombendodekaeder = (C_s)	24 = Hexakistetraeder — Tetrakishexaeder
— — —	24 = Pentagonikositetraeder — Tetrakishexaeder — Triakisoktaeder — Ikositetraeder
24 = Tetrakishexaeder = (C_s); 24 = Ikositetraeder = (C_s); 24 = Triakisoktaeder = (C_s)	48 = Hexakisoktaeder

Anhang: Die Gitterkomplexe

Wie bereits erwähnt, ist der Komplex gleichwertiger Punkte eines Raumsystems in jeder Beziehung dem Komplex gleichwertiger Flächen einer Kristallklasse vergleichbar, In der gewöhnlichen Kristallographie hat man für diese Flächenformen besondere Symbole eingeführt und durch Namengebungen, wie Würfel, Trapezoeder, Skalenoeder, Pedion, Pinakoid usw., die Beschreibung vereinfacht. Wir wollen einen gleichwertigen Punktkomplex nun kurzweg (einfachen) Gitterkomplex nennen und versuchen, ob für gewisse Zwecke nicht auch hier vereinfachende Symbolisierungen am Platze sind. Von Namengebungen sehen wir, wie bei den Raumsystemen, von vornherein ab. Im darstellenden Teil ist ein Gitterkomplex jeweilen vollständig ausgeschrieben worden. Dieser Teil hätte sich natürlich wesentlich vereinfacht, wenn von Anfang an die Gitterkomplexe symbolisiert worden wären. Allein Hunderte von Symbolen hätten dann zuerst erklärt werden müssen, so daß für alle diejenigen, die sich in die erweiterte Kristallographie erst einarbeiten wollen, das Buch im darstellenden Teil zur Hieroglyphe geworden wäre. Allerdings hätte es dann genügt, von jedem Raumsystem nur einen sogenannten kleinen Fundamentalbereich zu beschreiben (an Stelle eines Elementarparallelepipeds), d. h. einen Raumteil, der von jeder Art gleichartiger (nichtidentischer) Punkte je einen enthält.

Kennt man das Raumsystem und herrscht über die Nullpunktswahl Einigkeit, so genügt es, von jedem Gitterkomplex die Koordinaten eines Punktes hinzuschreiben und durch Beifügen des Raumsystemsymboles den ganzen Komplex zu charakterisieren. So würde $[\![\frac{1}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{8}]\!]_{\mathfrak{B}_h^{24}}$ den ganzen 16zähligen Komplex bedeuten, der Seite 214 unter Symmetriezentren I ausgeschrieben ist. Da wir jetzt von Gitterkomplexen, nicht mehr von den Einzelpunktlagen, sprechen, sollen auch einige allgemeine neue Bezeichnungen eingeführt werden. Eine (im Elementarparallelepiped) n-zählige Punktlage nennen wir nun einen n-Punktner. So ist $[\![\frac{1}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{8}]\!]_{\mathfrak{B}_h^{24}}$ ein Sechszehnpunktner. Ist ein n-Punktner innerhalb des ganzen den Einzelpunkten zukommenden Freiheitsgrades (innerhalb der zugehörigen gleichen Symmetriebedingung der Einzellagen) von gleicher unveränderlicher Gestalt, so heißt er nonvariant. Es ist natürlich jeder Gitterkomplex mit Punkten ohne Freiheitsgrad nonvariant, in Raumsystemen mit nur einer hemimorphen Drehungsachsenschar können das aber auch Gitterkomplexe von Punkten auf den Achsen sein. Die

Form derartiger nonvarianter Gitterkomplexe ist im allgemeinen (unter: „Sie bilden Gitter von der Form ....") im darstellenden Teil erwähnt worden.

Monovariant heißt ein Gitterkomplex mit einer von der Einzelpunktlage abhängigen Veränderlichen. Divariant und Trivariant vervollständigen diese Klassifikation.

Bei der bis jetzt üblichen Bestimmung der Kristallstrukturen aus den Interferenzerscheinungen an Röntgenstrahlen war der Gitterkomplex oft das Ersterkennbare, die Raumsystemszugehörigkeit das daraus Abgeleitete. Die Beziehung der Punkte zu unseren Nullpunkten war naturgemäß zunächst nicht zu ersehen. Da erweist es sich als sehr zweckmäßig, die Form der Gitterkomplexe so zu symbolisieren, daß sie, da wo eine Vieldeutigkeit möglich ist, von Raumsystem und Raumsystemsnullpunktswahl unabhängig ist. Natürlich muß man dann wieder alle Punkte angeben, man bezieht nun aber die Koordinaten auf einen ihrer Punkte als Nullpunkt. Das ist sehr leicht durch eine Parallelverschiebung möglich. Rechnerisch bedeutet dies Subtraktion der Koordinatenwerte eines Punktes (der zum interimen Nullpunkt wird) von allen anderen. Für diesen Nullpunkt schreiben wir nun nur 0, trennen die daraufbezogenen übrigen Koordinatenwerte der elementar unabhängigen Gitterpunkte voneinander durch vertikale Striche und fassen den ganzen Komplex in doppelt eckige Klammern. So wird $[\![\frac{1}{8}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{8}]\!]_{\mathfrak{B}_h^{24}}$ siehe Seite 214 zu

$$[\![0 \mid \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,0 \mid \tfrac{1}{2}\,0\,\tfrac{1}{2} \mid 0\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2} \mid \tfrac{3}{4}\,\tfrac{3}{4}\,0 \mid \tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{4}\,0 \mid \tfrac{1}{4}\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{2} \mid \tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{2}$$
$$\tfrac{3}{4}\,0\,\tfrac{3}{4} \mid \tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{4} \mid \tfrac{1}{4}\,0\,\tfrac{1}{4} \mid \tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{4} \mid 0\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{3}{4} \mid \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{3}{4} \mid \tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{4} \mid 0\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{4}]\!].$$

Jetzt haben wir sofort ein übersichtliches Bild von der Lage der einzelnen Punkte zueinander erhalten. Eckpunkte, Flächenzentren und Flächenzentren des $\frac{1}{8}$ Teilelementarparallelepipeds eines Parallelepipedes von der Elementarform sind zusammengehörig.

Derartige Darstellungen ergeben bei Vielpunktnern aber sehr große Formeln, und es wird sich fragen, ob nicht häufig auftretende Abkürzungen zweckmäßig sind. Als solche Abkürzungen schlage ich vor:

$[\![....]\!]_3'$ bedeutet: zu allen Punkten innerhalb der Klammer gehören die mittels Verschiebungen $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$ aus ihnen hervorgehenden. Der in der Klammer vorhandene Gitterkomplex selbst tritt in basisflächenzentrierter Wiederholung auf, aber ohne Rücksicht darauf, ob die derart auseinander hervorgehenden Punktlagen parallele Stellung haben oder nicht.

$[\![....]\!]_2'$ entsprechend der ersten Abkürzung, aber auf das seitliche Flächenpaar bezogen, ebenso

$[\![\ldots.]\!]_1'$ auf das vordere Flächenpaar bezogen.

$[\![\ldots.]\!]'$ bedeutet: zu jedem Punkte innerhalb der Klammer gehört ein Punkt, der um $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}$ verschoben ist. (Ohne Rücksicht auf Parallelstellung der zugehörigen Massenteilchen, wie immer in diesen Erörterungen.)

$[\![\ldots.]\!]'''$ zeigt die flächenzentrierte Wiederholung der Lagen an. Ferner schreiben wir kürzer statt $[\![0\,|\,0\,0\,\tfrac{1}{2}]\!] = [\![0\,|\,\tfrac{c}{2}]\!]$; statt $[\![0\,|\,0\,\tfrac{1}{2}\,0]\!] = [\![0\,|\,\tfrac{b}{2}]\!]$; statt $[\![0\,|\,\tfrac{1}{2}\,0\,0]\!] = [\![0\,|\,\tfrac{a}{2}]\!]$.

Jetzt wird der Sechszehnpunktner $[\![\tfrac{1}{8}\,\tfrac{1}{8}\,\tfrac{1}{8}]\!]_{\mathfrak{B}_h^{24}}$ zu

$[\![0\,|\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{4}\,0\,|\,\tfrac{1}{4}\,0\,\tfrac{1}{4}\,|\,0\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{4}]\!]'''$.

Betrachten wir nun den Achtpunktner $[\![0\,|\,\tfrac{c}{2}]\!]'''$, so sehen wir, daß die Gitterpunkte Parallelepipede von ähnlicher Gestalt und $\frac{1}{8}$ Volumen des Elementarparallelepipeds bilden. Um diese für Vieldeutigkeitsbestimmungen mit wechselnder Periode wichtige Beziehung auszudrücken, können wir schreiben $[\![0\,|\,\tfrac{c}{2}]\!]''' = \frac{V}{8}[\![0]\!]$.

Kehren wir nun wieder zu dem Sechszehnpunktner $[\![\tfrac{1}{8}\,\tfrac{1}{8}\,\tfrac{1}{8}]\!]_{\mathfrak{B}_h^{24}}$ zurück, so nehmen wir wahr, daß die Punkte so liegen wie Ecken und Flächenzentren der $\frac{1}{8}$ Elementarparallelepipede. Nur die Hälfte aller Punkte ist aber zusammengehörig. Es ist somit

$$[\![0\ \tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{4}\,0\ \tfrac{1}{4}\,0\,\tfrac{1}{4}\ \ 0\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{4}]\!]''' = \frac{\frac{V}{8}[\![0]\!]'''}{2}$$

gewissermaßen eine hemiedrische Form von $\frac{V}{8}[\![0]\!]'''$. Wie es hemiedrische Formen dieser $\frac{V}{8}$-Gitter gibt, gibt es auch tetartoedrische, ogdoedrische usw. Ihre Symbolisierung ergibt sich von selbst.

Nach diesen einfachen Grundsätzen lassen sich nun die in den einzelnen Raumsystemen auftretenden Gitterkomplexe unabhängig vom Raumsystem symbolisieren. Dadurch läßt sich erkennen, in welchen Raumsystemen äußerlich gleiche Gitterkomplexe vorkommen, deren Unterscheidung nur auf Grund der Eigensymmetrie der Punktlagen oder der Stellung der durch die Punkte gehenden Symmetrieelemente möglich ist.

Die Lage der Schwerpunkte der Massenteilchen gibt in derartigen Fällen über die endgültige Raumsystemszuordnung keinen Aufschluß. Wie ein Würfel in allen kubischen Kristallklassen als Flächenform möglich ist, können Gitterkomplexe mit gleicher respektiver Entfernung der Punkte in mehreren Raumsystemen gleichzeitig auftreten. Den Gitterkomplexen kommt dann, wie den Würfeln, das gleiche Symbol zu. Die Unterscheidung ist nur durch die Eigensymmetrieverhältnisse der Einzellagen (bezw. beim Würfel Einzelflächen) möglich.

Für die nonvarianten Gitterkomplexe der triklinen, monoklinen, rhombischen, tetragonalen und kubischen Abteilung, sowie der Raumsysteme mit rhomboedrischer Translationsgruppe habe ich eine Vergleichstabelle zusammengestellt. (Siehe Tabelle Seite 418—423.) Die Symmetriebedingungen der Einzellagen bestimmen die Vertikalkolonneneinteilung. Selbstverständlich ist die Form der Gitter dann noch von der Elementarparallelepipedform abhängig. So sind in $[\![0]\!]$ monokliner Raumsysteme nur zwei Kantenwinkel 90^0 und $a:b:c$ von der Einheit verschieden, in $[\![0]\!]$ kubischer Raumsysteme ist $\alpha = \beta = \gamma = 90^0$ und $a = b = c$. In der Tabelle sind ferner für trikline, monokline, rhomboedrische und tetragonale Raumsysteme auch die Gitterformen hingeschrieben worden, die man bei Wahl allseitig flächenzentrierter, basiszentrierter, innenzentrierter Elementarparallelepipede erhält, sofern diese Wahl nicht von vornherein eine gegebene ist. Ferner ist da, wo die Aufstellung des Elementarparallelepipedes im gewissen Sinne eine beliebige ist, darauf Rücksicht genommen worden. Im übrigen ergibt sich ohne weiteres, daß beispielsweise $[\![0]\!]_2'$ in rhombischen Systemen auch $[\![0]\!]_1'$ sein kann, nicht aber in monoklinen Raumsystemen. Gitterkomplexe, die durch einfache Drehung oder durch Spiegelung (auch an einer außenstehenden Spiegelebene) ineinander übergeführt werden können, sind im allgemeinen nicht als verschieden aufgeführt worden. Man kann also unter Umständen (auch bei Wahl eines anderen Punktes als Nullpunkt) eine verschiedene Symbolisierung erhalten, wird aber dann leicht die Zusammengehörigkeit herausfinden [1]).

Die Tabelle ist nicht vollständig, da sie nur die nonvarianten Gitterkomplexe umfaßt. Gitterkomplexe gleicher Gestalt können noch als Übergangsformen monovarianter oder di-trivarianter n-Punktner auftreten. Es wird eine der wichtigsten zukünftigen Aufgaben der Kristallstrukturlehre sein, die Tabelle in dieser Hinsicht zu vervollständigen. Es genügt mir, vorläufig den Weg angegeben zu haben, der, meiner Ansicht nach, am zweckmäßigsten eingeschlagen wird.

[1]) In der Tabelle nicht erwähnt sind: ein Vierpunktner von $\mathfrak{C}_{2h}^5$ mit der Symmetriebedingung C_i bei seitenflächenzentriertem Elementarparallelepiped, ferner der Zwölf- und Vierunzwanzigpunktner von $\mathfrak{D}_{3d}^6$ bei Wahl eines innenzentrierten oder flächenzentrierten Elementarrhomboeders.

Haupttabelle VI. Die nonvarianten einfachen Gitterkomplexe tetragonalen und

Gitterkomplexe	Symmetriebedingungen		
	C_1	C_i	C_2
Einpunktner $[\![0]\!]$	$\mathfrak{C}_1$	$\mathfrak{C}_i$	$\mathfrak{C}_2^{\,1}$
Zweipunktner:			
$[\![0]\!]_3'$	$\mathfrak{C}_1$	$\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_{2h}^{\,5}$	$\mathfrak{C}_2^{\,3}$, $\mathfrak{C}_{2v}^{\,8}$, $\mathfrak{C}_4^{\,1}$
$[\![0]\!]_2'$	$\mathfrak{C}_1$	$\mathfrak{C}_i$	$\mathfrak{C}_2^{\,1}$, $\mathfrak{C}_{2v}^{\,6}$
$[\![0]\!]^i$	$\mathfrak{C}_1$	$\mathfrak{C}_i$	$\mathfrak{C}_2^{\,3}$, $\mathfrak{C}_{2v}^{\,10}$, $\mathfrak{C}_4^{\,3}$
$[\![0 \mid \frac{c}{2}]\!]$	—	$\mathfrak{C}_{2h}^{\,4}$	$\mathfrak{C}_{2v}^{\,3}$, $\mathfrak{C}_4^{\,3}$
$[\![0 \mid \frac{b}{2}]\!]$	—	$\mathfrak{C}_{2h}^{\,2}$	$\mathfrak{C}_{2v}^{\,4}$
Dreipunktner:			
$[\![0 \mid \frac{1}{2}\frac{1}{2}0 \mid \frac{1}{2}0\frac{1}{2}]\!]$	—	$\mathfrak{C}_{3i}^{\,2}$	—
Vierpunktner:			
$[\![0]\!]'''$	$\mathfrak{C}_1$	$\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{C}_{2h}^{\,6}$, $\mathfrak{B}_h^{\,2}$, $\mathfrak{B}_h^{\,10}$, $\mathfrak{B}_h^{\,15}$, $\mathfrak{C}_{4h}^{\,4}$	$\mathfrak{C}_2^{\,3}$, $\mathfrak{C}_{2v}^{\,13}$, $\mathfrak{C}_{2v}^{\,17}$, $\mathfrak{C}_4^{\,3}$
$[\![0 \mid \frac{b}{2}]\!]_3'$	—	$\mathfrak{C}_{2h}^{\,3}$, $\mathfrak{B}_h^{\,4}$, $\mathfrak{B}_h^{\,8}$, $\mathfrak{B}_h^{\,11}$, $\mathfrak{B}_h^{\,13}$, $\mathfrak{C}_{4h}^{\,3}$	$\mathfrak{C}_{2v}^{\,11}$, $\mathfrak{C}_4^{\,1}$
$[\![0 \mid \frac{b}{2}]\!]_1'$	—	$\mathfrak{B}_h^{\,4}$, $\mathfrak{B}_h^{\,8}$, $\mathfrak{B}_h^{\,11}$, $\mathfrak{B}_h^{\,13}$	$\mathfrak{C}_{2v}^{\,15}$
$[\![0 \mid \frac{c}{2}]\!]^i$	—	$\mathfrak{C}_{2h}^{\,6}$, $\mathfrak{B}_h^{\,14}$, $\mathfrak{B}_h^{\,16}$, $\mathfrak{B}_h^{\,6}$	$\mathfrak{C}_{2v}^{\,13}$, $\mathfrak{C}_{2v}^{\,21}$, $\mathfrak{C}_4^{\,3}$, $\mathfrak{C}_4^{\,5}$, $\mathfrak{C}_{4v}^{\,3}$, $\mathfrak{C}_{4v}^{\,4}$, $\mathfrak{C}_{4v}^{\,5}$, $\mathfrak{C}_{4v}^{\,6}$, $\mathfrak{C}_{4v}^{\,8}$
$[\![0 \mid \frac{b}{2}]\!]^i$	—	$\mathfrak{C}_{2h}^{\,2}$, $\mathfrak{C}_{2h}^{\,3}$, $\mathfrak{B}_h^{\,6}$, $\mathfrak{B}_h^{\,14}$, $\mathfrak{B}_h^{\,16}$	$\mathfrak{C}_{2v}^{\,16}$, $\mathfrak{C}_{2v}^{\,22}$
$[\![0^* 0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}]\!]^i = \dfrac{\frac{v}{8}[\![0 \mid \frac{c}{2}]\!]}{4}$	—	—	$\mathfrak{C}_4^{\,6}$
$[\![0 \mid \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{4} \mid \frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{1}{4} \mid \frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{2}]\!] = \dfrac{\frac{v}{8}[\![0]\!]'''}{4}$			
Sechspunktner:			
$[\![0 \mid \frac{1}{2}\frac{1}{2}0 \mid \frac{1}{2}0\frac{1}{2}]\!]^i$	—	$\mathfrak{C}_{3i}^{\,2}$, $\mathfrak{D}_{3d}^{\,6}$	—
$[\![0\ 0\frac{1}{2}0 \mid \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{4} \mid \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{4} \mid \frac{3}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{4} \mid \frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{2}]\!]$ $= \dfrac{\frac{v}{8}[\![0 \mid \frac{1}{2}\frac{1}{2}0 \mid \frac{1}{2}0\frac{1}{2}]\!]}{4}$	—	—	—
Achtpunktner:			
$\frac{v}{8}[\![0]\!]$	—	$\mathfrak{C}_{2h}^{\,3}$, $\mathfrak{B}_h^{\,17}$, $\mathfrak{B}_h^{\,18}$, $\mathfrak{B}_h^{\,22}$, $\mathfrak{B}_h^{\,25}$, $\mathfrak{B}_h^{\,26}$, $\mathfrak{B}_h^{\,27}$, $\mathfrak{C}_{4h}^{\,5}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{\,4}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{\,8}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{\,11}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{\,15}$	$\mathfrak{C}_{2v}^{\,18}$, $\mathfrak{C}_4^{\,5}$, $\mathfrak{C}_{4v}^{\,3}$, $\mathfrak{C}_{4v}^{\,4}$, $\mathfrak{C}_{4v}^{\,5}$, $\mathfrak{C}_{4v}^{\,6}$, $\mathfrak{C}_{4v}^{\,8}$
$[\![0 \mid \frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4}]\!]'''$	—	—	$\mathfrak{C}_{2v}^{\,19}$, $\mathfrak{C}_4^{\,6}$
$[\![0 \mid \frac{1}{4}\,0\,\frac{1}{4}]\!]''' = \dfrac{\frac{v}{8}[\![0]\!]'''}{4}$	—	$\mathfrak{C}_{2h}^{\,6}$ ($\mathfrak{C}_{2h}^{\,4}$ besitzt bei bestimmter Elementarparallel-	

er triklinen, monoklinen, rhombischen, rhomboedrischen, ubischen Abteilungen

	Symmetriebedingungen		
	C_{2h}	V	C_{2v}
1	$\mathfrak{C}_{2h}^{1}$	$\mathfrak{B}^{1}$	$\mathfrak{C}_{2v}^{1}$
3	$\mathfrak{C}_{2h}^{3}$, $\mathfrak{B}_h^{7}$, $\mathfrak{B}_h^{9}$, $\mathfrak{C}_{4h}^{1}$	$\mathfrak{B}^{6}$, $\mathfrak{B}_h^{4}$, $\mathfrak{B}_d^{1}$, $\mathfrak{D}_4^{1}$, $\mathfrak{D}_4^{2}$	$\mathfrak{C}_{2v}^{11}$, $\mathfrak{C}_{4v}^{1}$, $\mathfrak{C}_{4v}^{2}$
1	$\mathfrak{C}_{2h}^{1}$, $\mathfrak{B}_h^{7}$, $\mathfrak{B}_h^{9}$	$\mathfrak{B}^{6}$, $\mathfrak{B}_h^{4}$	$\mathfrak{C}_{2v}^{14}$
3	$\mathfrak{C}_{2h}^{3}$, $\mathfrak{B}_h^{12}$, $\mathfrak{C}_{4h}^{2}$	$\mathfrak{B}^{8}$, $\mathfrak{B}_h^{2}$, $\mathfrak{B}_d^{2}$, $\mathfrak{D}_4^{5}$, $\mathfrak{D}_4^{6}$	$\mathfrak{C}_{2v}^{20}$, $\mathfrak{C}_{4v}^{4}$, $\mathfrak{C}_{4v}^{7}$
–	$\mathfrak{B}_h^{3}$, $\mathfrak{B}_h^{5}$, $\mathfrak{C}_{4h}^{2}$	$\mathfrak{B}_h^{3}$, $\mathfrak{B}_d^{2}$, $\mathfrak{D}_4^{5}$	$\mathfrak{C}_{4v}^{3}$, $\mathfrak{C}_{4v}^{7}$
–	$\mathfrak{B}_h^{3}$, $\mathfrak{B}_h^{5}$	$\mathfrak{B}_h^{3}$	—
–	$\mathfrak{D}_{3d}^{5}$	$\mathfrak{T}^{1}$	—
3	$\mathfrak{C}_{2h}^{3}$, $\mathfrak{B}_h^{18}$, $\mathfrak{B}_h^{20}$, $\mathfrak{C}_{4h}^{2}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{12}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{16}$	$\mathfrak{B}^{7}$, $\mathfrak{B}_h^{22}$, $\mathfrak{B}_d^{8}$, $\mathfrak{D}_4^{5}$, $\mathfrak{D}_4^{6}$	$\mathfrak{C}_{2v}^{18}$, $\mathfrak{C}_{4v}^{4}$, $\mathfrak{C}_{4v}^{7}$
–	$\mathfrak{B}_h^{19}$, $\mathfrak{B}_h^{21}$, $\mathfrak{C}_{4h}^{1}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{3}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{7}$	$\mathfrak{B}_h^{21}$, $\mathfrak{B}_d^{7}$, $\mathfrak{D}_4^{1}$, $\mathfrak{D}_4^{2}$	$\mathfrak{C}_{4v}^{1}$, $\mathfrak{C}_{4v}^{2}$
–	$\mathfrak{B}_h^{19}$, $\mathfrak{B}_h^{21}$	$\mathfrak{B}_h^{21}$	—
–	$\mathfrak{B}_h^{17}$, $\mathfrak{B}_h^{20}$, $\mathfrak{B}_h^{26}$, $\mathfrak{B}_h^{28}$, $\mathfrak{C}_{4h}^{2}$, $\mathfrak{C}_{4h}^{5}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{2}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{6}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{10}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{13}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{14}$	$\mathfrak{B}_h^{20}$, $\mathfrak{B}_h^{26}$, $\mathfrak{B}_d^{6}$, $\mathfrak{B}_d^{11}$, $\mathfrak{D}_4^{5}$, $\mathfrak{D}_4^{9}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{2}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{4}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{6}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{8}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{10}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{11}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{12}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{13}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{16}$	$\mathfrak{C}_{4v}^{3}$, $\mathfrak{C}_{4v}^{7}$, $\mathfrak{C}_{4v}^{9}$, $\mathfrak{C}_{4v}^{10}$
–	$\mathfrak{B}_h^{17}$, $\mathfrak{B}_h^{20}$, $\mathfrak{B}_h^{26}$, $\mathfrak{B}_h^{28}$	$\mathfrak{B}_h^{20}$, $\mathfrak{B}_h^{26}$	—
–	—	$\mathfrak{D}_4^{10}$	$\mathfrak{C}_{4v}^{11}$
–	$\mathfrak{D}_{3d}^{5}$	$\mathfrak{T}^{3}$, $\mathfrak{T}_h^{2}$, $\mathfrak{T}_d^{4}$, $\mathfrak{O}^{2}$	—
–	—	$\mathfrak{O}^{2}$	—
–	$\mathfrak{B}_h^{23}$, $\mathfrak{C}_{4h}^{5}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{2}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{6}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{10}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{13}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{14}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{17}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{18}$	$\mathfrak{B}_h^{23}$, $\mathfrak{B}_d^{10}$, $\mathfrak{D}_4^{9}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{2}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{4}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{6}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{8}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{10}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{11}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{12}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{13}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{16}$	$\mathfrak{C}_{4v}^{9}$, $\mathfrak{C}_{4v}^{10}$
–	—	$\mathfrak{B}_h^{24}$, $\mathfrak{D}_4^{10}$	$\mathfrak{C}_{4v}^{11}$

pedwahl Vierpunktner $[0\,|\,\frac{1}{4}\,0\,\frac{1}{4}]^{i}$ mit der Symmetriebedingung $= C_i$).

Haupttabelle VI

Gitterkomplexe	Symmetriebedingungen					
	V_h	S_4	C_4	C_{4v}	C_{4h}	D_4
Einpunktner $[\![0]\!]$	$\mathfrak{B}_h^{\,1}$	$\mathfrak{S}_4^{\,1}$	$\mathfrak{C}_4^{\,1}$	$\mathfrak{C}_{4v}^{\,1}$	$\mathfrak{C}_{4h}^{\,1}$	$\mathfrak{D}_4^{\,1}$
Zweipunktner:						
$[\![0]\!]_3'$	$\mathfrak{B}_h^{\,19}, \mathfrak{D}_{4h}^{\,1}, \mathfrak{D}_{4h}^{\,5}$	$\mathfrak{S}_4^{\,1}, \mathfrak{B}_d^{\,3}$	$\mathfrak{C}_4^{\,1}, \mathfrak{C}_{4v}^{\,2}$	$\mathfrak{C}_{4v}^{\,1}$	$\mathfrak{C}_{4h}^{\,1}, \mathfrak{D}_{4h}^{\,5}$	$\mathfrak{D}_4^{\,1}, \mathfrak{D}$
$[\![0]\!]^{\mathrm{i}}$	$\mathfrak{B}_h^{\,25}, \mathfrak{D}_{4h}^{\,14}, \mathfrak{D}_{4h}^{\,9}$	$\mathfrak{S}_4^{\,2}, \mathfrak{B}_d^{\,4}$	$\mathfrak{C}_4^{\,5}, \mathfrak{C}_{4v}^{\,6}$	$\mathfrak{C}_{4v}^{\,9}$	$\mathfrak{C}_{4h}^{\,5}, \mathfrak{D}_{4h}^{\,6}$	$\mathfrak{D}_4^{\,9}, \mathfrak{D}$
$[\![0 \mid \frac{c}{2}]\!]$	$\mathfrak{D}_{4h}^{\,9}, \mathfrak{D}_{4h}^{\,10}$	$\mathfrak{B}_d^{\,2}$	$\mathfrak{C}_{4v}^{\,5}$	—	$\mathfrak{D}_{4h}^{\,2}$	$\mathfrak{D}_{4h}^{\,2}$
Dreipunktner:						
$[\![0 \mid \frac{1}{2}\frac{1}{2}0 \mid \frac{1}{2}0\frac{1}{2}]\!]$	$\mathfrak{T}_h^{\,1}$	—	—	—	—	$\mathfrak{O}^1$
Vierpunktner:						
$[\![0]\!]'''$	$\mathfrak{B}_h^{\,23}, \mathfrak{D}_{4h}^{\,14}, \mathfrak{D}_{4h}^{\,9}$	$\mathfrak{S}_4^{\,2}, \mathfrak{B}_d^{\,8}$	$\mathfrak{C}_4^{\,5}, \mathfrak{C}_{4v}^{\,6}$	$\mathfrak{C}_{4v}^{\,9}$	$\mathfrak{C}_{4h}^{\,5}, \mathfrak{D}_{4h}^{\,6}$	$\mathfrak{D}_4^{\,9}, \mathfrak{D}$
$[\![0 \mid \frac{b}{2}]\!]_3'$	$\mathfrak{D}_{4h}^{\,1}, \mathfrak{D}_{4h}^{\,5}$	$\mathfrak{B}_d^{\,7}$	$\mathfrak{C}_{4v}^{\,2}$	—	$\mathfrak{D}_{4h}^{\,5}$	$\mathfrak{D}_{4h}^{\,3}$
$[\![0 \mid \frac{c}{2}]\!]^{\mathrm{i}}$	$\mathfrak{D}_{4h}^{\,9}, \mathfrak{D}_{4h}^{\,10}, \mathfrak{D}_{4h}^{\,17}, \mathfrak{D}_{4h}^{\,18}$	$\mathfrak{B}_d^{\,6}, \mathfrak{B}_d^{\,11}, \mathfrak{D}_{4h}^{\,4}, \mathfrak{D}_{4h}^{\,8}, \mathfrak{D}_{4h}^{\,11}, \mathfrak{D}_{4h}^{\,13}, \mathfrak{D}_{4h}^{\,14}, \mathfrak{D}_{4h}^{\,16}$	$\mathfrak{C}_{4v}^{\,5}, \mathfrak{C}_{4v}^{\,10}$	—	$\mathfrak{D}_{4h}^{\,2}, \mathfrak{D}_{4h}^{\,18}$	$\mathfrak{D}_{4h}^{\,2}, \mathfrak{D}$
$[\![0 \mid 0\frac{1}{2}\frac{1}{4}]\!]^{\mathrm{i}} = \frac{\frac{v}{8}[\![0 \mid \frac{c}{2}]\!]}{4}$	—	$\mathfrak{B}_d^{\,12}$	—	—	—	—
$[\![0 \mid \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{4} \mid \frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{1}{4} \mid \frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{2}]\!] = \frac{\frac{v}{8}[\![0]\!]'''}{4}$	—	—	—	—	—	—
Sechspunktner:						
$[\![0 \mid \frac{1}{2}\frac{1}{2}0 \mid \frac{1}{2}0\frac{1}{2}]\!]^{\mathrm{i}}$	$\mathfrak{T}_h^{\,5}, \mathfrak{O}_h^{\,3}$	—	—	—	—	$\mathfrak{O}^5, \mathfrak{O}$
$[\![0 \mid 0\frac{1}{2}0 \mid \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{4} \mid \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{4} \mid \frac{3}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{2} \mid \frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{2}]\!] = \frac{\frac{v}{8}[\![0 \mid \frac{1}{2}\frac{1}{2}0 \mid \frac{1}{2}0\frac{1}{2}]\!]}{4}$	—	$\mathfrak{T}_d^{\,4}$	—	—	—	—
Achtpunktner:						
$\frac{v}{8}[\![0]\!]$	$\mathfrak{D}_{4h}^{\,17}, \mathfrak{D}_{4h}^{\,18}$	$\mathfrak{B}_d^{\,10}, \mathfrak{D}_{4h}^{\,4}, \mathfrak{D}_{4h}^{\,8}, \mathfrak{D}_{4h}^{\,11}, \mathfrak{D}_{4h}^{\,13}, \mathfrak{D}_{4h}^{\,14}, \mathfrak{D}_{4h}^{\,16}$	$\mathfrak{C}_{4v}^{\,10}$	—	$\mathfrak{D}_{4h}^{\,18}$	$\mathfrak{D}_{4h}^{\,18}$
$[\![0 \mid \frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4}]\!]'''$	—	—	—	—	—	—
$[\![0 \mid \frac{1}{4}0\frac{1}{4}]\!]''' = \frac{\frac{v}{8}[\![0]\!]'''}{4}$	—	—	—	—	—	—

(Fortsetzung)

Symmetriebedingungen											
V_d	D_{4h}	C_3	C_{3v}	D_3	C_{3i}	D_{3d}	T	O	T_h	T_d	O_h
^{1}	$\mathfrak{D}_{4h}^{\ 1}$	$\mathfrak{C}_3^{\ 4}$	$\mathfrak{C}_{3v}^{\ 5}$	$\mathfrak{D}_3^{\ 7}$	$\mathfrak{C}_{3i}^{\ 2}$	$\mathfrak{D}_{3d}^{\ 5}$	$\mathfrak{T}^1$	$\mathfrak{O}^1$	$\mathfrak{T}_h^{\ 1}$	$\mathfrak{T}_d^{\ 1}$	$\mathfrak{O}_h^{\ 1}$
^{5}, $\mathfrak{D}_{4h}^{\ 3}$, $^7_{4h}$	$\mathfrak{D}_{4h}^{\ 1}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
^{1}, $\mathfrak{D}_{4h}^{\ 12}$, $^{15}_{4h}$	$\mathfrak{D}_{4h}^{17}$	$\mathfrak{C}_3^{\ 4}$	$\mathfrak{C}_{3v}^{\ 5}$, $\mathfrak{C}_{3v}^{\ 6}$	$\mathfrak{D}_3^{\ 7}$, $\mathfrak{D}_{3d}^{\ 6}$	$\mathfrak{C}_{3i}^{\ 2}$, $\mathfrak{D}_{3d}^{\ 6}$	$\mathfrak{D}_{3d}^{\ 5}$	$\mathfrak{T}^3$, $\mathfrak{T}_h^{\ 2}$, $\mathfrak{T}_d^{\ 4}$, $\mathfrak{O}^2$	$\mathfrak{O}^5$, $\mathfrak{O}_h^{\ 2}$	$\mathfrak{T}_h^{\ 5}$, $\mathfrak{O}_h^{\ 3}$	$\mathfrak{T}_d^{\ 3}$, $\mathfrak{O}_h^{\ 4}$	$\mathfrak{O}_h^{\ 9}$
^{9}, $\mathfrak{D}_{4h}^{\ 10}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	$\mathfrak{O}_h^{\ 1}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
, $\mathfrak{D}_{4h}^{\ 12}$, $^{15}_{4h}$	$\mathfrak{D}_{4h}^{17}$	$\mathfrak{C}_3^{\ 4}$	$\mathfrak{C}_{3v}^{\ 5}$, $\mathfrak{C}_{3v}^{\ 6}$	$\mathfrak{D}_3^{\ 7}$, $\mathfrak{O}^2$, $\mathfrak{D}_{3d}^{\ 6}$	$\mathfrak{C}_{3i}^{\ 2}$, $\mathfrak{T}_h^{\ 2}$, $\mathfrak{T}_h^{\ 6}$, $\mathfrak{D}_{3d}^{\ 6}$	$\mathfrak{D}_{3d}^{\ 5}$, $\mathfrak{O}_h^{\ 4}$	$\mathfrak{T}^2$	$\mathfrak{O}^3$	$\mathfrak{T}_h^{\ 3}$	$\mathfrak{T}_d^{\ 2}$	$\mathfrak{O}_h^{\ 5}$
, $\mathfrak{D}_{4h}^{\ 7}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
, $\mathfrak{D}_{4h}^{\ 10}$, ^{7}, $\mathfrak{D}_{4h}^{\ 18}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
^{9}	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	$\mathfrak{O}^6$, $\mathfrak{O}^7$	—	—	—	—	—	—	—
$\mathfrak{O}_h^{\ 4}$	$\mathfrak{O}_h^{\ 9}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
^{7}, $\mathfrak{D}_{4h}^{\ 18}$	—	—	$\mathfrak{C}_{3v}^{\ 6}$	$\mathfrak{O}^5$, $\mathfrak{O}_h^{\ 3}$, $\mathfrak{D}_{3d}^{\ 6}$	$\mathfrak{T}_h^{\ 5}$, $\mathfrak{T}_h^{\ 7}$, $\mathfrak{O}_h^{\ 2}$, $\mathfrak{D}_{3d}^{\ 6}$	$\mathfrak{O}_h^{\ 9}$	$\mathfrak{T}_d^{\ 5}$, $\mathfrak{O}^3$, $\mathfrak{O}^5$, $\mathfrak{T}_h^{\ 3}$	$\mathfrak{O}_h^{\ 6}$	$\mathfrak{O}_h^{\ 6}$	$\mathfrak{O}_h^{\ 5}$	—
^{9}	—	—	—	—	—	—	$\mathfrak{T}_h^{\ 4}$, $\mathfrak{O}^4$	—	—	$\mathfrak{O}_h^{\ 7}$	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Haupttabelle VI

Gitterkomplexe	C_i
Achtpunktner:	
$[\![0 \mid 0\,\tfrac{1}{2}\,0 \mid \tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{3}{4} \mid \tfrac{1}{4}\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{4}]\!]^{i} = \frac{\overset{v}{8}[\![0]\!]^{i}}{2}$	$\mathfrak{C}_{4h}^{6}$
$[\![0 \mid \tfrac{1}{2}\,0\,0 \mid \tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{4}\,0 \mid \tfrac{1}{4}\,\tfrac{3}{4}\,0]\!]_3^{\prime} = \frac{\overset{v}{8}[\![0]\!]_3^{\prime}}{2}$	$\mathfrak{C}_{4h}^{3}$
$[\![0 \mid \tfrac{1}{2}\,0\,0 \mid \tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{2} \mid \tfrac{1}{4}\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{2}]\!]_3^{\prime} = \frac{\overset{v}{8}[\![0]\!]_3^{\prime}}{2}$	$\mathfrak{C}_{4h}^{4}$
$[\![0 \mid \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{3}{4} \mid \tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{4} \mid \tfrac{1}{4}\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{2}]\!]^{i} = \frac{\overset{v}{8}[\![0]\!]^{\prime\prime\prime}}{4}$	—
$[\![0 \mid 0\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{4} \mid \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,0 \mid \tfrac{1}{2}\,0\,\tfrac{1}{4}]\!]^{i} = \frac{\overset{v}{8}[\![0 \mid \overset{c}{\tfrac{1}{2}}]\!]}{2}$	—
Zwölfpunktner:	
$[\![0 \mid \tfrac{3}{4}\,0\,\tfrac{1}{4} \mid 0\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{4}]\!]^{\prime\prime\prime} = \frac{\overset{v}{8}[\![0 \mid \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,0 \mid \tfrac{1}{2}\,0\,\tfrac{1}{2}]\!]}{2}$	$\mathfrak{C}_{3i}^{2}$
$[\![0 \mid 0\,0\,\tfrac{1}{2} \mid \tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{4} \mid \tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{4} \mid \tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{4}]\!]^{i} = \frac{\overset{v}{8}[\![0 \mid \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,0 \mid \tfrac{1}{2}\,0\,\tfrac{1}{2}]\!]}{2}$	—
$[\![0 \mid 0\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{4} \mid \tfrac{3}{8}\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{7}{8} \mid \tfrac{1}{8}\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{3}{8} \mid \tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{8}\,\tfrac{5}{8} \mid \tfrac{3}{4}\,\tfrac{7}{8}\,\tfrac{5}{8}]\!]^{i}$ und ähnlicher Form $= \frac{\overset{v}{8}[\![0 \mid 0\,\tfrac{1}{2}\,0 \mid \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{4} \mid \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{3}{4} \mid \tfrac{3}{4}\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{2} \mid \tfrac{1}{4}\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{2}]\!]}{4}$	—
Sechzehnpunktner:	
$[\![0 \mid \tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{4}\,0 \mid \tfrac{1}{4}\,0\,\tfrac{1}{4} \mid 0\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{4}]\!]^{\prime\prime\prime} = \frac{\overset{v}{8}[\![0]\!]^{\prime\prime\prime}}{2}$	$\mathfrak{C}_{4h}^{6}, \mathfrak{B}_{h}^{24}$
$\overset{v}{8}[\![0]\!]_3^{\prime}$	$\mathfrak{C}_{4h}^{5}, \mathfrak{D}_{4h}^{4}, \mathfrak{D}$
	$\mathfrak{D}_{4h}^{11}, \mathfrak{D}_{4h}^{13}$
$\overset{v}{8}[\![0]\!]^{i}$	$\mathfrak{D}_{4h}^{20}$
$\frac{\overset{v}{64}[\![0]\!]}{4}$	—
Vierundzwanzigpunktner:	
$[\![0 \mid \tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{4}\,0 \mid 0\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{3}{4}]\!]^{i\prime\prime\prime} = \overset{v}{8}[\![0 \mid \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,0 \mid 0\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}]\!]$	—
$\frac{\overset{v}{8}[\![0 \mid 0\,\tfrac{1}{2}\,0 \mid \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{3}{4} \mid \tfrac{3}{4}\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{2} \mid \tfrac{1}{4}\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{2}]\!]}{2}$	—
ebenso anderer Art	—
Zweiunddreißigpunktner:	
$\overset{v}{8}[\![0]\!]^{\prime\prime\prime}$	$\mathfrak{D}_{4h}^{20}$
Achtundvierzigpunktner:	
$\overset{v}{8}[\![0 \mid \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,0 \mid \tfrac{1}{2}\,0\,\tfrac{1}{2}]\!]^{i}$	—

(Fortsetzung)

Symmetriebedingungen												
C_2	V	C_{2h}	V_h	S_4	C_{4h}	D_4	V_d	D_{4h}	D_3	C_{3i}	D_{3d}	T
—	—	$\mathfrak{D}_{4h}^{19}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	$\mathfrak{D}_{4h}^{3}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{7}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	$\mathfrak{D}_{4h}^{12}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{16}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	$\mathfrak{O}^8$	—	—	—
$\mathfrak{C}_{4v}^{12}$	$\mathfrak{D}_{4h}^{20}$	—	—	$\mathfrak{D}_{4h}^{20}$	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	$\mathfrak{D}_{3d}^{5}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	$\mathfrak{O}^5$, $\mathfrak{O}_h^4$	—	—	$\mathfrak{T}_d^3$, $\mathfrak{O}_h^2$	—	—	$\mathfrak{O}_h^9$	—	—	—	—	—
—	—	—	—	$\mathfrak{T}_d^6$	—	—	—	—	—	—	—	—
—	$\mathfrak{O}^8$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	$\mathfrak{D}_{4h}^{19}$	—	—	—	—	—	—	$\mathfrak{O}^4$	$\mathfrak{T}_h^4$	$\mathfrak{O}_h^7$	—
—	—	$\mathfrak{D}_{4h}^{17}$, $\mathfrak{D}_{4h}^{18}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$\mathfrak{C}_{4v}^{12}$	$\mathfrak{D}_{4h}^{20}$	—	—	$\mathfrak{D}_{4h}^{20}$	—	—	—	—	—	$\mathfrak{O}_h^{10}$	—	$\mathfrak{O}_h^8$
—	—	—	—	—	—	—	—	—	$\mathfrak{O}_h^{10}$	—	—	—
—	$\mathfrak{O}^3$	$\mathfrak{T}_h^3$	$\mathfrak{O}_h^5$	$\mathfrak{T}_d^5$	$\mathfrak{O}_h^6$	—	$\mathfrak{O}_h^6$	—	—	—	—	
—	$\mathfrak{O}_h^{10}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	$\mathfrak{O}_h^{10}$	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	$\mathfrak{O}_h^8$	$\mathfrak{O}_h^8$	—	—
—	—	—	—	$\mathfrak{O}_h^8$	—	—	—	—	—	—	—	—

IV. Kapitel: Die Kristalle in der Auffassung als homogene Diskontinua

I. Einleitung

Die bisherigen Erörterungen waren rein analytisch-geometrischer Natur. Ob in der Natur die homogenen Diskontinua eine materielle Verbildlichung besitzen, ist für sie gleichgültig. Die Untersuchung hat ergeben, daß homogene Diskontinua nach verschiedenen Richtungen im Raume im allgemeinen ein verschiedenes Verhalten aufweisen. Symmetriebeziehungen können neue Decktransformationsbedingungen, somit einander gleichwertige Richtungen, erzeugen, und zwar gibt es 230 in Art oder Lage ungleiche Kombinationsmöglichkeiten von Symmetrieelementen bezw. von Decktransformationsbeziehungen. Die Achsen dürfen nur 1-, 2-, 3-, 4- oder 6zählig sein. Geht das Diskontinuum infolge der Größenordnung der Identitätsabstände für gewisse Erscheinungen in ein Scheinkontinuum über, so lassen sich geometrisch lediglich die 32 Klassen der Raumsysteme unmittelbar voneinander unterscheiden.

In allen wesentlichen Punkten stimmen diese Folgerungen mit den Beobachtungen an kristallisierten Substanzen überein. Die Symmetrieverhältnisse sind derartige, daß die phänomenologische Zuordnung zu irgend einer der 32 Klassen stets möglich ist; von 31 Klassen sind mit Sicherheit Beispiele bekannt geworden. Insbesondere hat sich das Fehlen fünfzähliger Symmetrieachsen bewahrheitet.

Die induktiv gewonnenen kristallographischen Grundgesetze der Winkelkonstanz der Flächen und Kanten, sowie der kleinen rationalen Indizeszahlen lassen sich auf Grund einer sehr plausiblen Hypothese sofort aus der Raumgitterlehre ableiten. Nimmt man nämlich an, daß als natürliche Flächen und Kanten der Kristalle nur (oder weit vorwiegend, da es sich im Hinblick auf die Vizinalflächenbildungen mehr um Regeln als um Gesetze handelt) Elemente möglich sind, die durch viele Massenschwerpunkte gehen, und daß bei richtiger Wahl der Elementarparallelepipede im allgemeinen Flächen und Kanten

umso häufiger erscheinen, je dichter ihre Besetzung mit Massenpunkten ist, so ergibt sich sofort, daß bei gleicher Struktur die häufigsten Flächen und Kanten gleich orientiert sein müssen und daß ihnen kleine, wirklich rationale Zahlen als Indizes zukommen.

Keine Erscheinungen sind gefunden worden, die in prinzipiellem Widerspruch zu der Annahme stehen, die Kristalle seien homogene Diskontinua, wenn auch mancherlei Beziehungen noch nicht völlig geklärt sind. Neuerdings haben sich die Beobachtungen gemehrt, die in wissenschaftlich überzeugender Weise die diskontinuierliche Struktur der Materie dartun, ja es ist bereits gelungen, mehreren Kristallarten bestimmte Strukturen beizuordnen, die sich zur Interpretation einer Großzahl, wenn nicht aller, Erscheinungen zweckdienlich erwiesen haben. Der geniale Gedanke M. v. Laue's, die Röntgenstrahlen als Interferenzerreger zu benutzen, hat zum physikalischen, experimentellen Nachweis der Gitterstruktur kristallisierter Substanzen geführt.

Mathematische Ableitung, die sich auf eine einzige Voraussetzung, die Voraussetzung homogener Diskontinua, stützt, vermag somit dem Wesen nach eine schier unübersehbar erscheinende Fülle von Beobachtungstatsachen verständlich zu machen. Es ist das eine Großtat der Wissenschaft, die wenige ihresgleichen hat. Noch sind lange nicht alle Konsequenzen dieser Übereinstimmung gezogen worden, zögernd nur sucht bei uns die physikalische Kristallographie sich von der Kontinuumsauffassung frei zu machen. Die nächsten Jahrzehnte werden dem Ausbau der Theorie gewidmet sein, wodurch sich zweifellos manche neue Aus- und Einblicke ergeben werden.

Eine Frage von zweitem Rang ist es, ob das, was wir als Kristallindividuum bezeichnen, stets als aus einem einzigen homogenen Diskontinuum mit einer einzigen überall gleichorientierten Translationsgruppe bestehend aufgefaßt werden darf. Auf derartige Probleme wird erst im letzten Abschnitt dieses Kapitels Rücksicht genommen. Wir haben guten Grund, die einschlägigen Erscheinungen zunächst zu betrachten, als ob dies der Fall wäre.

2. Allgemeine physikalisch-chemische Erwägungen

Jeder Punkt eines homogenen Diskontinuums kann an sich Sitz des Schwerpunktes eines Massenteilchens sein (bezw. Schwingungszentrums in kinetischer Auffassung). Das zeigt, wie außerordentlich wichtig die Klassifikation der Punktlagen in den einzelnen Raumsystemen für die Kristallstrukturlehre ist. Wie in der gewöhnlichen Lehre von den Wachstumserscheinungen die Fläche, ist hier der Punkt das Grundelement jeglicher Betrachtung. Wir wollen auch im folgenden

die Fiktion der Starrheit unter gegebenen Bedingungen aufrecht erhalten. In Wirklichkeit wird, besonders im Hinblick auf die Quantentheorie, die anisotrope Homogenität ebenfalls nur eine zeitlich statistische sein. Die als starr betrachteten Punkte entsprechen nicht in der Zeit unveränderlichen Schwerpunktslagen von Massenteilchen, sondern ihren Schwingungszentren.

Ein vollständiger Massenteilchenhaufen wird aus einem einzigen Komplex hinsichtlich der Symmetrie gleichwertiger Teilchen oder aus mehreren derartigen Komplexen bestehen. Im ersteren Fall ist er als einfach, im zweiten Fall als zusammengesetzt (als Kombination) zu bezeichnen. Es ist dies eine Erscheinung, die mit den einfachen Flächenformen und den Flächenkombinationen verglichen werden kann. Die resultierende Symmetrie des Teilchenhaufens kann hinwiederum ganz durch die Anordnung bedingt sein oder zum Teil auf der Symmetrie der Partikelchen, zum Teil auf der Anordnung beruhen. Ganz in ähnlichem Sinne ist ja die den Kristallformen zukommende Symmetriegruppe manchmal von der Flächensymmetrie abhängig.

Die Teilchen müssen als Ganzes, in Rücksicht auf die Symmetrieelemente des zugehörigen Raumsystemes, allgemeinste Lage besitzen, soll ihre Gestalt, bezw. Eigensymmetrie, ohne direkten Einfluß auf die resultierende Symmetrie des Massenteilchenhaufens sein. Es ließe sich auch denken, daß konstituierenden Teilchen, wie Atomen, stets punktuelle, d. h. höchste, Eigensymmetrie zukommt, dann wäre die resultierende Symmetrie stets die höchstmögliche bei gegebener Anordnung.

Es gibt, rein mathematisch gesprochen, unendlich viele Möglichkeiten, einen Massenteilchenhaufen bestimmter Raumsystemssymmetrie zu konstruieren. Die Aufgabe ist ebenso vieldeutig wie etwa die: beliebige Flächenkombinationen zu zeichnen, welche mit den Symmetrieverhältnissen einer gegebenen Kristallklasse im Einklang sind. Wie aber schon hier die Zahl der natürlichen Kombinationen durch die Regel verhältnismäßig kleiner rationaler Indizes der Flächen erheblich eingeschränkt wird, läßt sich erwarten, daß aus der unendlichen Fülle der Möglichkeiten von Massenteilchenanordnungen von vornherein nur eine beschränkte Anzahl wahrscheinlich ist. Das Problem hört ja von dem Moment an, wo wir materielle Punkthaufen berücksichtigen, auf, ein rein mathematisches zu sein, es wird nun im eigentlichen Sinne ein physikalisches und chemisches. Die mathematischen Ableitungen bilden nur noch einen Rahmen, der wahllos alle denkbar möglichen Fälle umfaßt.

In der Physik werden die Elektronen als letzte Bausteine der Materie aufgefaßt. Elektronenhaufen bilden Atome, Atome setzen sich zu Molekeln zusammen. Ionen sind Atome oder Atomhaufen mit besonderer Elektronenverteilung. Da ein Großteil der Phänomene, die

dem kristallierten Zustande eigen sind, in wichtiger funktioneller Abhängigkeit von der Massenverteilung steht, besteht die erste Aufgabe in der Feststellung der Atomschwerpunktsanordnung. Mannigfache physikalische Überlegungen und Untersuchungen machen es zur Gewißheit, daß die größeren Massenebenenabstände von der Größenordnung 10^{-8} cm sind. Über die Rolle, die den Elektronen zukommt, lassen sich vorläufig nur Vermutungen äußern. Es ist aber wahrscheinlich, daß auch hier experimentelle Untersuchungen zum Ziel führen werden. Das Problem der Atom- und Molekelkonstitution, das neuerdings so vielverheißend in Angriff genommen ist, gehört zu den wichtigsten zukünftigen Problemen der Kristallstrukturlehre. Vorläufig ist die nächstliegende Frage die nach den Identitätsbeziehungen. Lassen sich hinsichtlich der resultierenden Struktursymmetrie Stellungsverschiedenheiten chemisch gleicher Atome erkennen oder sind die Atome für die Struktur immer von punktuellem Wert? Können chemisch ungleiche Atome strukturell einander gleichwertig sein? Von welcher Größenordnung sind im allgemeinen die kürzesten Perioden oder auch die Identitätsabstände in Richtung der Kanten der Elementarparallelepipede? Alle diese Fragen brauchen nicht eine allgültige einzige Lösung zu geben, und es darf unter keinen Umständen der Eindruck erweckt werden, als ob heute schon eine vollständige Entscheidung möglich wäre. Die Physiker haben es sich, von ihrem Standpunkte aus ohne Zweifel mit Recht, bei der Ableitung von Strukturbildern aus röntgenometrischen Untersuchungen außerordentlich leicht gemacht. Sie setzten diejenige Struktur als richtig voraus, die bei kleinster Periodenvoraussetzung annähernd die experimentellen Daten erzeugen kann. Das darf nur dann als zweckmäßig angesehen werden, wenn keinerlei Gründe irgendwelcher Art dagegen sprechen. Abgesehen davon vermißt man in den sonst sicherlich bahnbrechenden Untersuchungen oft irgendwelche Diskussionen über die Vieldeutigkeit. Gerade um diese Mannigfaltigkeit in das richtige Licht zu stellen und in Übersichtstabellen hervortreten zu lassen, wurde dieses Buch geschrieben. Es soll auch dem Physiker das weitschichtige Gebiet der geometrischen Kristallographie eines Diskontinuums näher bringen.

Bei der vorläufigen Beurteilung der oben gekennzeichneten Fragen muß das gesamte Tatsachenmaterial, vor allem der chemischen Kristallographie, mitberücksichtigt werden. Zunächst ist klar, daß bei einer bestimmt stöchiometrischen Verbindung die einem Elementarparallelepiped angehörigen Atome ein Ein- oder Vielfaches der chemischen Formel ergeben müssen[1]). Alle Elementarparallelepipede, die in paralleler Wiederholung den Raum ausfüllen, sind

[1]) Die von einem Elementarparallelepiped absorbierten Atome. (Siehe Seite 4, 22, 133.)

sich ja gleich; jedes von ihnen enthält im physikalischen und chemischen Sinne (als Ein- oder Vielfaches der räumlichen Nichtidentität) die gesamte Anisotropie in sich. Jedem Atomschwerpunkt kommt durch die Art und Weise, in der er von anderen Atomschwerpunkten umgeben ist, bereits eine gewisse Symmetrie der Lage zu. Im allgemeinen wird man erwarten müssen, daß bestimmten Atomen bestimmte Wirkungsweiten, die die Abstände regeln, eigen sind, so daß schon aus diesem Grunde verschiedenartige Atome der Lage nach nicht gleichwertig sein dürften. Sind diese Wirkungsweiten nicht zu sehr voneinander verschieden, so ist allerdings denkbar, daß sie sich gegenseitig zu kompensieren suchen. Damit hängt eng das Problem der Mischkristallbildung zusammen. In den vollständigen Mischkristallreihen können in beliebigem Verhältnis einzelne Atome durch andere ersetzt werden, ohne daß die makroskopische (auf Scheinkontinuum bezogene) Symmetrie eine andere wird. Derartige kontinuierliche Übergänge sind nur möglich, wenn die Ersetzung in bestimmter Weise erfolgt unter gleichzeitiger Änderung der Größe des Elementarparallelepipeds oder wenn die vikarisierenden Atome als äußerlich (kristallgeometrisch) gleichwertig angesehen werden dürfen. Nun macht man die Beobachtung, daß isomorphe Vertretbarkeit von Atomen an schon im periodischen System der Elemente zum Ausdruck kommende Verwandtschaften geknüpft ist, und daß weniger nahe verwandte Atome sich im allgemeinen erst in Verbindungen von komplexem Formeltypus ersetzen können. Es sind die chemischen Elemente der Vertikalreihen des periodischen Systemes, die sich, mit Ausnahme etwa der ersten Glieder, leicht ersetzen lassen. Diese Tatsache muß mit der Atomkonstitution in Verbindung stehen, sie wird bei der weiteren Forschung in dieser Richtung stets Berücksichtigung erfahren müssen.

Die atomaren Eigenschaften zerfallen aber in zwei ziemlich scharf getrennte Gruppen. Sie sind entweder abhängig von der sogenannten Ordnungszahl der Elemente im periodischen System, besitzen also keine Periodizität, oder aber sie treten in typisch periodischer Wiederholung auf. Die moderne Atomphysik führt dieses verschiedene Verhalten auf die Atomkonstitution zurück. Die Eigenschaften der ersten Art sind danach von den Atomkernen, speziell den positiven Kernladungen, abhängig, die Eigenschaften der zweiten Art von der Anordnung der äußeren, negativen Elektronen. Das Bohrsche Atommodell setzt voraus, daß im Flüssigkeits- und Gaszustand die negativen äußeren Elektronen in ganz bestimmten Abständen und bestimmter nach außen periodisch sich wiederholender Anordnung um den Kern in Kreisbewegung begriffen sind. Der Atomkern nimmt im allgemeinen wenig Raum ein (bei Wasserstoff ist sein Radius von der Größenordnung 10^{-16} cm). Der Radius des ganzen planetarischen Atomsystemes ist von der Größenordnung 10^{-8} cm. Diese für die Atomphysik wichtige Größe

Periodisches System der Elemente mit den Atomgewichten[1])

(nach K. Fajans, 1915)

VIII a				I a	I b	II a	II b	III a	III b	IV a	IV b	V a	V b	VI a	VI b	VII a	VII b
1 H 1,008	2 He 4,00	—		3 Li 6,94		4 Be 9,1		5 B 11,0		6 C 12,0		7 N 14,01		8 O 16,00		9 F 19,0	
—	10 Ne 20,2	—		11 Na 23,00		12 Mg 24,32		13 Al 27,1		14 Si 28,3		15 P 31,04		16 S 32,06		17 Cl 35,46	
18 A 39,88	—	—		19 K 39,10	—	20 Ca 40,07	—	21 Sc 44,1	—	22 Ti 48,1		23 V 51,0	—	24 Cr 52,0	—	25 Mn 54,93	—
26 Fe 55,84	27 Co 58,97	28 Ni 58,68		—	29 Cu 63,57	—	30 Zn 65,37	—	31 Ga 69,9	—	32 Ge 72,5	—	33 As 74,96	—	34 Se 79,2	—	35 Br 79,92
36 Kr 82,92	—	—		37 Rb 85,45	—	38 Sr 87,63	—	39 Y 89,0	—	40 Zr 90,6	—	41 Nb 93,5	—	42 Mo 96	—	43 —	
44 Ru 101,7	45 Rh 102,9	46 Pd 106,7		—	47 Ag 107,88	—	48 Cd 112,40	—	49 In 114,8	—	50 Sn 119,0	—	51 Sb 120,02	—	52 Te 127,5	—	53 J 126,92
54 X 130,2	—	—		55 Cs 132,81	—	56 Ba 137,37	—	57 La 139,0	—	58 Ce 140,25	59 Pr 140,6	—	60 Nd 144,3	61	62 Sm 150,4	63 Eu 152,0	
64 Gd 157,3	65 Tb 159,2	66 Ds 162,5		67 Ho 163,5		68 Er 167,7	69 Tu 168,5	—	70 Yb 173,5	71 Lu 175,0	72 —	73 Ta 181,5	—	74 W 184,0	—	75 —	
76 Os 190,9	77 Ir 193,1	78 Pt 195,2		79 Au 197,2		—	80 Hg 200,6	—	81 Tl 204,0	—	82 Pb 207,2	—	83 Bi 208,0	—	84 Po (210)	85 —	
86 Em (223)	—	—		87 —	—	88 Ra 226,4	—	89 Ac (227)	—	90 Th 232,4	—	91 Bv (234)	—	92 U 238,2	—	—	

[1]) Unter den Elementensymbolen stehen die Atomgewichte. Die Zahlen neben den Buchstaben stellen die Ordnungszahlen dar.

hat man als Einheit neu bezeichnet und nennt einen zehnmillionstel Millimeter (10^{-8} cm) eine Ångström-Einheit (A-E). Atomeigenschaften der ersteren Art sind beispielsweise die sogenannten Hochfrequenzspektren. Jedes Metall als Antikathode einer Röntgenröhre genommen zeigt eine ganz charakteristische Strahlung, entsprechend bestimmten Linien im Spektrum des Röntgenlichtes. Der Bau dieses Liniensystems ist teils ähnlich, teils verschieden (K-, L-, M-Linien). Die Wellenlängen, die den Linien entsprechen, sind von der Größenordnung der Angströmeinheit, sie sind um so kleiner, je höher die Ordnungszahl der Elemente ist, und zwar gilt das Moseleysche Gesetz, daß die Quadratwurzeln aus den Schwingungszahlen der sich entsprechenden Röntgenschwingungen linear von den Ordnungszahlen der Elemente abhängig sind.

Die chemischen Eigenschaften der Elemente, die sogenannten Valenzeigenschaften, sind typische periodische Funktionen. Es liegt nahe, anzunehmen, daß die negativen äußeren Elektronen in bestimmter Weise, die periodisch im Systeme der Elemente wiederkehrt, um die positiven Kerne gruppiert sind, so daß die den gleichen Vertikalkolonnen des periodischen Systemes angehörigen Elemente nach außen hin gleichen Bau aufweisen. Natürlich nimmt die Zahl der negativen Elektronen mit der Größe der positiven Kernladung (also der Ordnungszahl) zu, aber die inneren negativen Elektronen sind dann wohl in ziemlich engem Verband mit den Kernen und spielen hinsichtlich der Valenzeigenschaften keine Rolle mehr. Nur die äußeren negativen Elektronen bestimmen die Valenzeigenschaften der Elemente, also ihr chemisches Verbindungsvermögen.

Wenn nun die vergleichende chemische Kristallographie zeigt, daß die Vertretbarkeit der Elemente im Kristallgebäude ebenfalls eine periodische Funktion ist und die gleichen Verwandtschaftsbeziehungen aufweist, wie das chemische Verbindungsvermögen, so läßt sich diese Tatsache nur so deuten, daß kristallstrukturell besonders der äußere Bau der Atome und Atomkomplexe eine Rolle spielt. Anordnung und Zahl der äußeren Elektronen bestimmen ebensosehr den Zusammentritt der Partikelchen zum Kristallgebäude als sie die chemische Verbindungsfähigkeit bedingen. Kristallograph und Chemiker befassen sich mit Erscheinungen, die sich auf ein- und dieselbe Ursache zurückführen lassen. Beide müssen Hand in Hand arbeiten, soll das Problem der Valenzlehre einer Lösung entgegengeführt werden. Der moderne Chemiker wird die Kristallstrukturlehre in vollem Maße beherrschen müssen. Andererseits findet der Kristallograph in den komplexen Verbindungen so viele an Kristallstrukturen erinnernde Beziehungen, daß er nicht achtlos daran vorbeigehen darf. Die Valenzchemie auf Wernerscher Grundlage wird für ihn immer den Anfang des Studiums der Kristallstrukturen bedeuten. Es wird aber auch das

richtige Studium der Kristallstrukturen dem Physiker unschätzbare Dienste leisten, wenn es gilt, den äußeren Bau der Atome und Atomkomplexe zu erforschen. Ja er darf die kristallographischen Eigenschaften nicht vernachlässigen, soll den Bildern, die er sich von der atomaren Konstitution schafft, ein realer ökonomischer Wert zukommen.

Für unsere Zwecke ergibt sich aus diesen Erörterungen die wichtige Folgerung, daß kristallstrukturell nicht nur die Lage der Atomschwerpunkte von Bedeutung ist, sondern auch deren äußerer Bau, kurz das, was wir vorläufig in Ermanglung besserer Kenntnisse das Gestaltliche der Atome nennen wollen. Es ist nicht unwahrscheinlich, daß die Zahl oder Lage der äußeren Elektronen mit den Symmetriebedingungen der Schwerpunktlagen in Übereinstimmung sein muß, wie ich denn persönlich glaube, daß der wesentliche Unterschied zwischen Kristallzustand und molekulardispersem Zustand darauf beruht, daß im ersteren die Elektronenbeweglichkeit (Rotation) eingeschränkt ist und einer gewissen Fixierung der Elektronen und somit auch der Valenzen Platz gemacht hat. Geschieht dies nur für einen zentralen Atomkomplex, so entstehen Verbindungen höheren Grades, die also in gewissem Sinne Fastkristalle sind.

Es kann also sehr wohl sein, daß für die resultierende Symmetrie eines Atomhaufens nicht nur die gegenseitige Lage der Atome eine Rolle spielt, sondern auch deren Bau, d. h. die Lage der äußeren Elektronen. Direkt können wir bis jetzt die Anordnung der Elektronen im Kristallgebäude nicht bestimmen, es läßt sich experimentell vorläufig nur die Atomanordnung feststellen. Man darf daher eo ipso nicht glauben, daß die auf der Atomschwerpunktsanordnung beruhenden Strukturbilder schon gestatten müssen, alle Eigenschaften der betreffenden Kristallarten zu erklären. Nur die, welche direkt von der Massenverteilung abhängig sind, werden auf die Kristallkonstitution zurückführbar sein. Und es wird notwendig sein, die Symmetriebedingungen der Atomlagen in ihren möglichen Varianten jedem Strukturbild beizufügen, damit der Physiker erkennt, welche Anordnungsmöglichkeiten ihm für die äußeren Elektronen zur Verfügung stehen.

Diese Überlegungen werden durch die Tatsache bestätigt, daß in komplizierten Verbindungen oder in Kristallarten mit wenig entwickelter Symmetrie auch Atome isomorph ersetzbar sind, die das in einfachen Verbindungen niemals tun, deren chemische Verwandtschaft keine bedeutende ist (Al und Si in Feldspäten usw.). Atomeigenschaften, die vorher eine Gleichstellung verhindert haben, sind nun für die resultierende Symmetrie der Teilchenhaufen bedeutungslos geworden. Derartiges ist möglich, wenn die Atome vorher speziellere Lagen der Raumsysteme eingenommen haben, in denen sie gewissen Symmetrie-

bedingungen genügen mußten, die bei weniger spezieller oder gar allgemeiner Lage wegfallen.

Wenn, wie aus allem dem hervorzugehen scheint, zwischen Valenzkräften und Kristallbindungskräften an sich kein prinzipieller Unterschied besteht, und wenn diese Valenzeigenschaften, wie die statistische chemische Kristallographie zeigt, bereits von direktem Einfluß auf die Symmetrie der Teilchenhaufen sind, so können im allgemeinen nur relativ kurze Perioden in Frage kommen. Würden nämlich die Identitätsabstände in Richtung der Kanten der Elementarparallelepipede (also a, b, c) im Verhältnis zu den Atomabständen außerordentlich groß sein, so brauchten die kürzesten Bindungsrichtungen zwischen den einzelnen Atomen in keinerlei Beziehung zu den Symmetrieeigenschaften der Raumsysteme zu stehen. Es könnte beispielsweise ein Atomhaufen mit lauter ungleichen und schiefwinklig aufeinanderstehenden kürzesten Bindungen zu kubischer Gesamtsymmetrie führen. Nur schwerverständlich wäre dann übrigens, aus welchen Gründen sich die hohe Gesamtsymmetrie einstellt, die auch nach homogenen Deformationen erhalten bleibt. In der Tat hat die bisherige Untersuchung der Kristalle gezeigt, daß man im allgemeinen mit der Voraussetzung kleiner Perioden gut auskommt, die Zahl der Moleküle pro Elementarparallelepiped ist häufig 2, 4, 6 oder 8.

Valenzen können nun aber nicht nur von Einzelatomen, sondern von ganzen Atomkomplexen ausstrahlen. Die Atome vereinigen sich zu einem neuen, höheren Gebilde, das eine eigene äußere Elektronenverteilung besitzt. Diese innerkomplexartige Struktur müssen wir auch in den Kristallen finden; in der Hauptsache sind es wohl diese Komplexe (Ionen, Teilmoleküle, Moleküle), welche zum Kristallgebäude zusammentreten.

Vom chemischen Standpunkt ist ja die Vorstellung, daß bei der Kristallisation die Atome aus ihren Verbänden (Molekeln, Ionen) gerissen werden und in ganz neuer Gruppierung zu Raumgittern zusammentreten, äußerst unwahrscheinlich. Alle physikalisch-chemischen Beobachtungen, insbesondere auch solche über die Abhängigkeit der Modifikationsbildungen von der molekularen Beschaffenheit der Lösungen, zwingen zur Annahme, daß ein inniger Konnex zwischen Kristallbildung und Molekülbildung vorhanden ist. Die Auflösungsmöglichkeit der Kristalle in kongruente Atomgitter ist eine rein formale Eigenschaft, die weder für die Symmetrielehre, noch für die physikalische Chemie des festen Aggegratzustandes von irgendwelcher Bedeutung ist. Sie ist nichts anderes als der Ausdruck für den Satz, daß die Identität in von der Richtung allein abhängigen Abständen wieder auftritt. Sie verbürgt also lediglich die periodische Homogenität. Vom Standpunkte der Symmetrielehre aus erlangt die Sonderung der Massenteilchenhaufen in die gleichwertigen

Gitterkomplexe Bedeutung, vom Standpunkt der physikalischen Chemie die gegenseitige Verteilung der Atomschwerpunkte, das heißt die innere molekulare oder atomkomplexartige Struktur. Auch diese ist experimentellen Untersuchungen zugänglich. Durch Reflexionsmessungen im Ultraroten lassen sich kurzwellige Eigenfrequenzen von Atomkomplexen nachweisen. Besonders Cl. Schäfer und seine Schüler (M. Schubert, K. Brieger usw.) haben diese Methode benutzt, um über die Konstitution der Kristalle Auskunft zu erlangen. Sie fanden beispielsweise in Sulfaten und Karbonaten die Eigenfrequenzen der CO_3- und SO_4-Gruppen, in Hydraten die der H_2O-Gruppen. Aus den Strukturmodellen selbst ist das Vorhandensein derartiger Baugruppen in nachdrücklicher Weise zuerst von mir gefolgert worden.

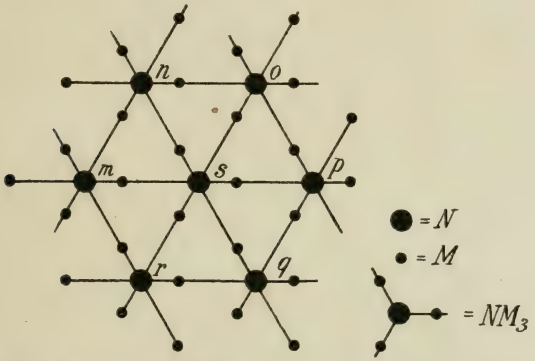


Fig. 162. Atomverteilung $NM_3 = CO_3$ des Calcites auf einer Basisebene nach Bragg

Fig. 162 zeigt beispielsweise in der Braggschen Auffassung eine der Atomebenen parallel (111) = (0001) des rhomboedrisch (ditrigonal skalenoedrisch?) kristallisierenden Calcites. Der Komplex CO_3 hebt sich noch deutlich heraus, da je drei O-Atome einem C-Atom näher liegen und infolge der trisymmetrischen Anordnung ihren Schwerpunkt im C-Atom besitzen. Es wäre nicht vorstellbar, daß bei der Kristallisation des Calcites die O-Atome zunächst Sauerstoffgitter bilden und diese Sauerstoffgitter schließlich mit C- und Ca-Gittern zusammentreten. Ca und der Komplex CO_3 sind die Baugruppen, die zum Kristallgebäude des Calcites sich vereinigen. Die O-Atome bleiben sicherlich während des ganzen Prozesses im Verbande mit den zugehörigen C-Atomen, und die für die Kristallsymmetrie eventuell maßgebenden Valenzen müßten solche zwischen den Ionen CO_3 und Ca sein. Maßgebend sind diese Valenzrichtungen dann, wenn den Baugruppenschwerpunkten ausgezeichnete Lagen zukommen, so daß die Komplexstruktur eine Symmetriebedingung der Lage veranschaulicht. Auch wenn die O-Atome im Kristallgebäude mitten zwischen zwei C-Atomen liegen würden, die engere Zusammengehörigkeit je dreier Sauerstoffatome zu einem C-Atom also nicht mehr ersichtlich wäre, müßte man sich den Prozeß der Kristallbildung in dieser Weise vorstellen. Die Mittellagen

hätten sich in einem solchen Falle wohl durch Ausgleich ergeben, wie beispielsweise im Spinelltypus nach der Braggschen Auffassung.

Mit den vorangegangenen Erörterungen habe ich das Gebiet der geometrischen Kristallographie verlassen. Vieles ist hier noch im Fluß, und wenn es mir persönlich auch scheint, daß manches heute schon schärfer und bestimmter gesagt werden könnte, so will ich es doch nicht tun, damit nicht eventuelle Mißgriffe, wie sie in jeder neuen Wissenschaft auftreten, kurzsichtigerweise der geometrischen Kristallographie, die einen vollständig abgeschlossenen Wissenszweig darstellt, zur Last gelegt werden. Ja, ich will in den nachfolgenden Anwendungen auf diese Ausführungen weniger Gewicht legen, als vielleicht erwartet wird, gerade um zu zeigen, daß sich auch bei anderen Voraussetzungen die in diesem Buche durchgeführte Darstellung als Grundlage zweckdienlich erweist. Hingegen rechtfertigt es sich, wenigstens als vorläufiges Arbeitsprinzip, einen engeren Zusammenhang zwischen konstituierenden Hauptkristallbindungskräften und Symmetrie anzunehmen und zu schauen, wieweit sich derartige Überlegungen chemischer Natur mit den übrigen Beobachtungen widerspruchslos erweisen. Auf diese Weise können wir, ohne die Besprechung anderer Deutungsmöglichkeiten zu vernachlässigen, in einzelnen Fällen bewußt die Vieldeutigkeit der Lösungen einschränken und von besonderen Prinzipien ausgehend die wahrscheinlichsten unter ihnen herausgreifen. So lange wir die zu diesem Zwecke gemachten Voraussetzungen und Annahmen im Auge behalten, ist keine Gefahr vorhanden. Wir wissen dann zu jeder Zeit, wo wir einsetzen müssen, wenn unlösbare Widersprüche entstehen, wir wissen auch, daß diese Widersprüche mit dem umfassenden Rahmen der mathematischen Ableitungen nichts zu tun haben und zunächst wenigstens nur von außen hergebrachte Einschränkungen aufheben würden. Anderseits können wir in der die Anwendungen der ersten drei Kapitel erläuternden Diskussion bestimmte Bahnen einschlagen, während sonst nur eine generalisierende Behandlung möglich wäre. Manches läßt sich so an hübschen Beispielen erörtern, das, abgesehen von der speziellen Richtigkeit der physikalisch-chemischen Voraussetzungen, sicherlich wertvolle Fingerzeige für den Gebrauch der Tabellen und der geometrisch-analytischen Untersuchungen enthält.

3. Die Bestimmung der Raumgruppe bei gegebener Atomschwerpunktsanordnung

Von der Struktur eines Kristalles müssen alle seine Eigenschaften abhängig sein. Es gibt daher soviele Methoden zur Strukturbestimmung, als es distinkte Eigenschaften kristallisierter Substanzen gibt. Wenn wir vorläufig eine Großzahl dieser praktisch

noch nicht verwerten können, so hat dies seinen Grund nur in mangelnder Erfahrung über die engeren Beziehungen dieser Eigenschaften mit dem konstitutionellem Bau. Die physikalische und chemische Kristallographie des Diskontinuums steht in ihren Anfängen und hat erst an wenigen Stellen das Gebiet der schematischen verallgemeinerten Ansätze verlassen. Das hat zurzeit Bestimmungsmethoden, wie die röntgenometrischen, in den Vordergrund gestellt, die nur als Glieder einer großen Kette ihre Berechtigung haben.

Wenn wir sagen, von der Struktur seien alle Eigenschaften abhängig, so dürfen wir, wie bereits betont, nicht umgekehrt schließen, daß aus einer Eigenschaft eindeutig die Struktur in allen Einzelheiten ableitbar ist, oder daß ein noch generalisiertes Strukturbild alle Eigenschaften bereits erklären kann. Es ist beispielsweise zurzeit noch nicht angängig, wie das erst kürzlich geschehen ist, zu verlangen, daß die Atomschwerpunktsanordnung alle physikalischen Eigenschaften, beispielsweise auch die makroskopisch wahrnehmbare Symmetrie, bestimmen müsse. Es ist, wie schon früher bemerkt, wahrscheinlich, daß die Atomkonfiguration selbst von Einfluß ist. Es könnte aber auch sein, daß in komplexen Strukturen die Wirkung gewisser Atome so gering ist, daß sie für die gewöhnlichen Methoden der makroskopischen Kristallklassenbestimmung nicht ins Spiel kommt. Auch hier müssen wir noch reichlich Erfahrung sammeln, bevor bindende Schlüsse gezogen werden.

Vorläufig müssen wir uns damit begnügen, darzutun, in welcher Weise nach den zurzeit gebräuchlichen Methoden mögliche, einer Kristallart zugrunde liegende Raumsysteme gefunden werden können und zwar zunächst unter der Voraussetzung, daß die Massenverteilung bekannt ist.

A. Struktur von Steinsalz nach den Braggschen Untersuchungen

Wenn gewisse physikalische Voraussetzungen zu Recht bestehen, so lassen sich auf röntgenometrisch-spektroskopischem Wege über die in beliebiger Richtung aufeinander folgenden relativen Massenbelastungen von Atomschwerpunktsebenen, sowie ihre Abstände voneinander, Schlüsse ziehen. Die Belastungen ihrerseits sind, wie in einem späteren Abschnitt eingehend dargetan werden wird, von der Schwerpunktsanordnung abhängig. Aus einer gegebenen Atomschwerpunktsanordnung sind die Belastungen und Ebenenabstände eindeutig berechenbar, währenddem zurzeit (infolge den Untersuchungsmethoden anhaftender Fehlerquellen und theoretischer Unbestimmtheit) aus den experimentellen Daten auch bei relativ einfachen Körpern das Gebiet möglicher, damit nicht in offenem Widerspruch stehender Strukturen lediglich mehr oder weniger stark eingeengt werden kann. Es lassen sich aber stets die einfachsten Atomanordnungen mit möglichst kleiner Periode aufsuchen, die innerhalb

der Fehlergrenzen mit den gefundenen experimentellen Werten in Übereinstimmung sind, und es läßt sich auch diskutieren, nach welchen Gesichtspunkten andere Lösungen gesucht werden können.

Von Steinsalz wissen wir mit Bestimmtheit, daß es dem kubischen Kristallsystem (Abteilung) angehört. Die Bestimmung der Kristallklasse nach den Methoden der makroskopischen Symmetrielehre hat noch nicht zu zweifelsfreien Resultaten geführt. Dem gewöhnlichen Habitus nach erscheint Steinsalz holoedrisch. Anzeichen für Enantiomorphie oder gar Tetartoedrie sollen nach vereinzelten Beobachtungen im Ätzverfahren zu erkennen sein. Wir werden also gut tun, bei der Diskussion die gesamte kubische Abteilung zu berücksichtigen.

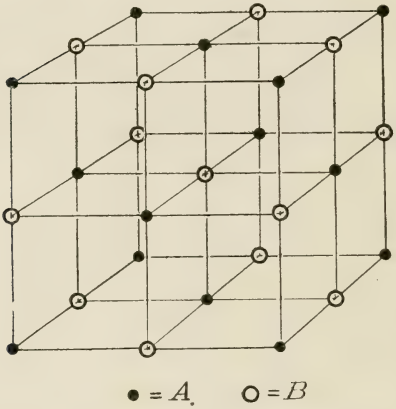


Fig. 163. Atomverteilung im Elementarwürfel des Kochsalzbautypus (nach Bragg). A = Na; B = Cl.

W. H. und W. L. Bragg kommen auf Grund ihrer bahnbrechenden röntgenometrisch-spektroskopischen Untersuchungen zum Resultat, daß die einfachst ableitbare Struktur die folgende ist: Eines der zwei Ionen (Na oder Cl) sehr nahe den Eckpunkten und Flächenmitten eines Würfels von den Dimensionen $a = 5 \cdot 63 \cdot 10^{-8}$ cm, das andere Ion nahe dem Würfelzentrum und den Kantenmitten[1]). In einer Verbindung NaCl wird man in erster Linie den zwischen Na und Cl wirksamen Valenzen die Kristallbindung zuschreiben wollen. Soll in ihr bereits die kubische Symmetrie zum Ausdruck kommen, so müssen die Atome genau an den bezeichneten Stellen des Würfels liegen. Der Würfel könnte dann Elementarparallelepiped sein, was bedeuten würde, daß die durch Translation von der Länge und Richtung der Würfelkanten aus einander ableitbaren Atome einander parallelgestellt (identisch) sind.

Vier hinsichtlich dieser Kantentranslationen voneinander unabhängige Na- und Cl-Atome gehören in diesem Falle dem Elementarwürfel an. Die der Verbindung NaCl zukommenden stöchiometrischen Verhältnisse sind damit für den Elementarwürfel erfüllt. Fig. 163 zeigt

[1]) Der Aufbau aus Ionen Na^+ und Cl^- kann heute wohl kaum mehr bezweifelt werden. Wenn im Folgenden immer nur von Atomen die Rede ist, so ist Atom nicht im Gegensatz zu Ion gemeint.

die von den Herren Bragg vorgeschlagene „Normalstruktur". Sie ist eine Kombination zweier Gitterformen $[\![0]\!]'''$ mit der gegenseitigen Verschiebung von $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

Unter dieser Voraussetzung hinsichtlich der Periodengrößen lassen sich nun alle möglichen Raumsystemszuordnungen aufsuchen. Eindeutig bestimmt ist durch die Festlegung der Atome in einem Elementarparallelepiped das Raumsystem noch nicht; das wäre erst der Fall, wenn über den Atomeinfluß sichere Aussagen gemacht werden könnten. Von dem durch die Atomschwerpunkte gegebenen Würfel wissen wir ja nicht einmal die Nullpunktslage. Bekannt ist lediglich, daß nach der einfachsten Auffassung 4 Na- und 4 Cl-Atome dem Elementarparallelepiped angehören und daß deren Schwerpunkte einzeln flächenzentrierte Gitter bilden, die um eine halbe Würfeldiagonale oder eine halbe Kantenlänge gegeneinander verschoben sind. Na und Cl werden einander in symmetrischer Beziehung nicht gleichwertig gesetzt werden dürfen, wohl aber ist denkbar, daß dies die Na-Atome unter sich und die Cl-Atome unter sich sind. Im Elementarparallelepiped müssen dann zwei vierzählige Lagen vorhanden sein, die in der gekennzeichneten Beziehung zueinander stehen.

Der Übersichtstabelle der kubischen Abteilung (Seite 410—411) entnehmen wir sofort, daß mindestens zwei im Elementarwürfel vierzählige Lagen in folgenden Raumsystemen auftreten: $\mathfrak{T}^1$, $\mathfrak{T}^2$, $\mathfrak{T}^4$, $\mathfrak{T}_h{}^2$, $\mathfrak{T}_h{}^3$, $\mathfrak{T}_h{}^6$, $\mathfrak{T}_d{}^1$, $\mathfrak{T}_d{}^2$, $\mathfrak{O}^2$, $\mathfrak{O}^3$, $\mathfrak{O}^6$, $\mathfrak{O}^7$, $\mathfrak{O}_h{}^4$, $\mathfrak{O}_h{}^5$, alle übrigen Raumsysteme fallen, so lange unsere Voraussetzungen zu Recht bestehen, außer Betracht.

In der gleichen Reihenfolge lauten die zugehörigen Symmetriebedingungen der Punktlagen: C_3, T, C_3, C_{3i}, T_h, C_{3i}, C_{3v}, T_d, D_3, O, D_3, D_3, D_{3d}, O_h. Symmetriebedingungen müssen somit von Atomen stets erfüllt werden, sollen zwei vierzählige Lagen ein kubisches Raumsystem ergeben. Nächste Aufgabe ist es nun, zu untersuchen, ob die vierzähligen Lagen in den betreffenden Raumsystemen flächenzentrierte Gitter bilden können, und ob zwei in der angegebenen Beziehung zueinander stehen. Das kann nur an Hand der Einzeldarstellungen (oder der Gitterkomplextabelle auf Seite 420) entschieden werden. Einzig $\mathfrak{O}^6$ und $\mathfrak{O}^7$ erweisen sich als ungeeignet. 12 kubische Raumsysteme besitzen Anordnungsmöglichkeiten zweier Atomarten vom Typus der Fig. 163. Sie unterscheiden sich voneinander durch die Zahl, Art und Lage der Symmetrieelemente, und von diesen selbst sind die den Atomen zugeschriebenen Symmetrien und die Stellungen der Atome abhängig. Betrachten wir die Atome als strukturell von punktuellem Wert (Kugelsymmetrie), so stellt sich dasjenige Raumsystem ein, das von allen die höchste Symmetriebedingung für die Atomlagen besitzt. Es ist $\mathfrak{O}_h{}^5$, und durch die Atomschwerpunkte gehen alle einfachen Symmetrieelemente der kubisch holoedrischen Klasse. Alle gleichartigen

Atome sind sich identisch, die Translationsgruppe selbst ist flächenzentriert. Die Schwerpunktslagen besitzen in unserer Bezeichnungsweise die Koordinaten:

$[\![0\ 0\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$ einerseits,
$[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ 0]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![0\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$ anderseits.

In der Fig. 164 sieht man die in einer Würfelfläche liegenden und darauf senkrecht stehenden Symmetrieachsen und Symmetrieebenen. Die Lage der A- und B-Atome (Na- und Cl-Atome) ist für diese Fläche eingezeichnet. Sowohl Gleitspiegelebenen als Schraubenachsen sind er-

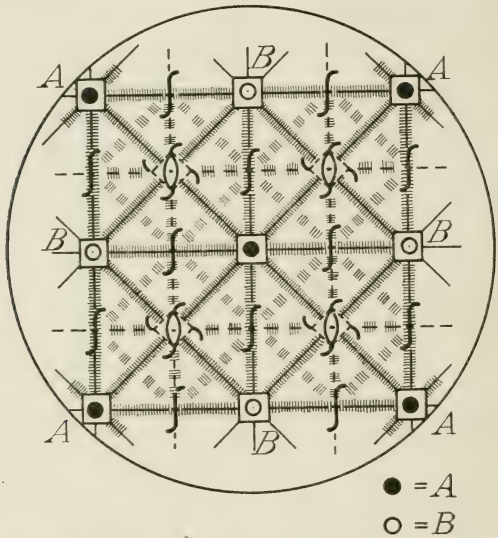


Fig. 164. $\mathfrak{D}_h^5$ Atomverteilung, Symmetrieebenen und Achsen auf $(001)_0$ bei Kochsalzbautypus.

kennbar, außerdem finden sich auch Drehungsachsen und Spiegelebenen. Gleiche Atome sind einander parallel gestellt, der Elementarwürfel ist vierfach primitiv.

Sobald die Atome für die resultierende Symmetrie nicht von punktuellem Wert sind, sobald beispielsweise durch die Lage der Atomachsen Stellungsverschiedenheiten markiert werden oder durch die Elektronenverteilung Symmetriebedingungen, so sind auch die übrigen 11 Raumsysteme mit der Schwerpunktsanordnung bei angenommener einfachster Elementarperiode in Übereinstimmung. Sie realisieren 11 nur durch die Atomstellung und Atomsymmetrie voneinander unterscheidbare Fälle. Die Vieldeutigkeit entspricht genau der Vieldeutig-

keit von Flächenformen der Kontinuumskristallographie. Wie der Würfel in allen 5 kubischen Klassen auftreten kann, und die verschiedenen Würfel sich nur durch die (Flächensymmetrie und die Gleichwertigkeit bedingenden) Symmetrieverhältnisse unterscheiden, ist die durch Fig. 163 dargestellte Anordnung zweier Atomschwerpunkte an sich vieldeutig. Uns interessiert zunächst vor allem, ob noch eine zweite Möglichkeit denkbar ist, die zu kubisch holoedrischer Gesamtsymmetrie führt. Mit anderen Worten, wir wollen untersuchen, welchen Minimalsymmetriebedingungen die Atomlagen genügen müssen, damit bei der angenommenen

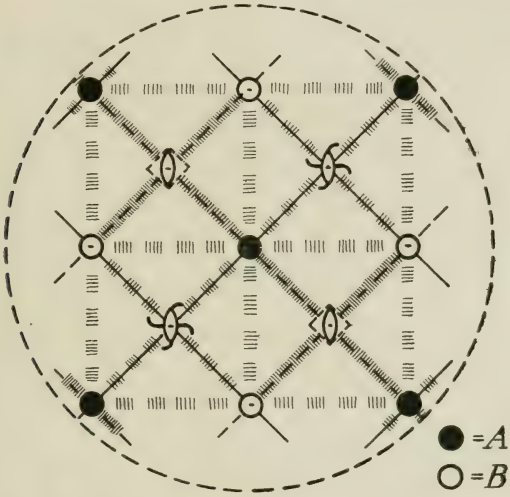


Fig. 165. $\mathfrak{D}_h^4$ Atomverteilung, Symmetrieebenen und Achsen auf $(001)_{\frac{1}{4}}$ bei Kochsalzbautypus.

Elementarperiode das Raumsystem der hexakisoktaedrischen Klasse isomorph ist. Die aus den Tabellen gewonnene Zusammenstellung zeigt sofort, daß noch $\mathfrak{D}_h^4$, mit der Symmetriebedingung der Lage D_{3d}, in Frage kommt. Aus der Einzeldarstellung ist ersichtlich, daß den Atomschwerpunkten dann, gemäß unserer Nullpunktswahl, die Lagen:

$\left[\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\right]$ $\left[\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\right]$ $\left[\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\right]$ $\left[\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\right]$ einerseits

$\left[\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\right]$ $\left[\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\right]$ $\left[\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\right]$ $\left[\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\right]$ anderseits zukommen.

Verschieben wir nun zum Vergleich den Nullpunkt in einem Atomschwerpunkt, so finden wir die in Fig. 165 angegebene Verteilung von Symmetrieachsen und Symmetrieebenen, die in bezw. senkrecht auf einer der Würfelfläche parallelen Atomebene liegen. Während in $\mathfrak{D}_h^5$ durch

jeden Atomschwerpunkt 4 trigonale Achsen gehen, durchsticht ihn jetzt nur je eine trigonale Drehungsachse. Die Stellung dieser trigonalen Drehungsachsen zueinander ist durch Fig. 166 gekennzeichnet. Also auch bei einer auf diese Weise genugsam gekennzeichneten Verteilung der Symmetrieelemente und Stellung der Atome besitzt der Gesamtteilchenhaufen noch kubisch holoedrische Symmetrie. Soll aber bei gleicher Schwerpunktslage die resultierende Symmetrie, wie das für Sylvin (KCl) wahrscheinlich, für Steinsalz nicht ausgeschlossen ist, kubisch enantiomorph sein, so kommen nach der Tabelle die Raum-

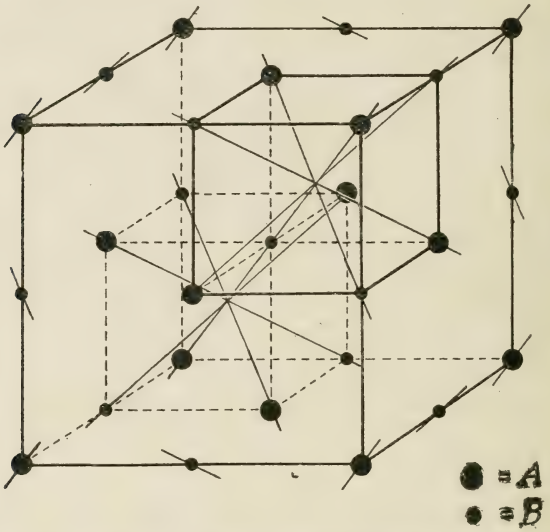


Fig. 166. Anordnung der trigonalen Drehungsachsen hinsichtlich der zweierlei Punktlagen eines Bautypus NaCl in Raumgruppe $\mathfrak{O}_h^4$.

systeme $\mathfrak{O}^8$ und $\mathfrak{O}^2$ in Frage. Die Verteilung der Symmetrieachsen von $\mathfrak{O}^3$ entspricht genau der von $\mathfrak{O}_h^5$, die von $\mathfrak{O}^2$ ist der von $\mathfrak{O}_h^4$ gleich. Wir müssen uns in den Fig. 164, 165 nur die Symmetrieebenen und Drehspiegelebenen wegdenken und erhalten so die Figuren für $\mathfrak{O}^8$ und $\mathfrak{O}^2$. Statt den Symmetriebedingungen O_h oder D_{3d} zu genügen, müßten die Atome nun so gebaut sein, daß nur O oder D_3 durch sie zum Ausdruck kommen. Spiegelebenen würden fehlen. In allen vier Fällen besitzen die Atomschwerpunktslagen keinen Freiheitsgrad der Lageänderung. Ein solcher könnte ihnen bei einfacher Elementarperiode nur in $\mathfrak{T}^1$, $\mathfrak{T}^4$, $\mathfrak{T}_d^1$ zukommen.

Bis jetzt ist in Übereinstimmung mit physikalisch-chemischen Erwägungen immer vorausgesetzt worden, daß in der Richtung der Koordinatenachse durch die Entfernung zweier nächster A- oder zweier nächster B-Atome die Periode in dieser Richtung bestimmt sei. Dadurch sind sowohl A als B für den Elementarwürfel vierzählig geworden. Der Atomschwerpunktsanordnung an sich entsprachen dann kubisch holoedrische Raumgruppen, und es mußten den Atomen niedrigere Eigensymmetrien zugeschrieben werden, sollte ein enantiomorphes Verhalten der Kristalle verständlich gemacht werden. Diese Periodenfestsetzung ist an sich willkürlich. Sie ist für kubisch enantiomorphe oder holoedrische Gesamtsymmetrie nur dann etwas Gegebenes, wenn wir annehmen, daß die Atome genau auf die Ecken, Kantenmitten, Flächenmitten und Zentren der Würfel fallen. Dafür aber liefert die experimentelle Untersuchung keine ganz sicheren Anhaltspunkte, und es liegt durchaus im Bereich der Möglichkeiten[1]), daß sehr kleine Verschiebungen gegenüber diesen Lagen vorhanden sind. Daß im großen der Bauplan durch das Braggsche Schema gekennzeichnet ist, dürfte kaum bezweifelt werden, gesetzmäßige Abweichungen sind aber in den Kreis der Betrachtung einzuschließen, insbesondere ist darauf zu achten, ob sich etwa auf derartigem Wege eine schwache Hemiedrie erklären ließe. Statt daß wir die Atomschwerpunkte unverändert lassen und den Atomen (mit ihren Elektronen) in der Schwerpunktslage nicht zum Ausdruck kommende Symmetriequalitäten zuschreiben, wollen wir jetzt chemisch gleiche Atome wie Punkte betrachten und nachprüfen, von welchem Einfluß sehr kleine Lageverschiebungen in bestimmter Richtung sind. Daß derartige Lageverschiebungen in den beiden zur Diskussion stehenden Klassen bei einfacher Elementarperiode nicht möglich sind, ist soeben gezeigt worden, wohl aber sind sie möglich, wenn die Perioden größer gewählt werden. Die Aufgabe wird erst eindeutig und lösbar, wenn über die Größe der auftretenden Perioden eine Festsetzung gemacht wird. Wir wollen uns auf die Fälle beschränken, wo der Identitätsabstand in Richtung der Würfelkanten doppelt so groß ist wie der Abstand zweier annähernd oder ganz in dieser Richtung liegender A-Atome. A und B treten also im Elementarwürfel 32 mal auf. Es werden die Raumsysteme der Klasse $\mathfrak{O}$ näher untersucht und mit denen der Klasse $\mathfrak{O}_h$ verglichen.

Mittels der Tabellen und der Einzeldarstellung ist die Aufgabe leicht und elegant zu lösen. Wir haben zu untersuchen, ob es Punktlagen gibt, deren Summe der Zähligkeiten 32 ist und die zusammen Gitterkomplexe bilden können, die aneinandergereihten flächenzentrierten

[1]) Sofern man keinen direkten Einfluß der Valenzrichtungen auf die Symmetrie annimmt.

Würfelchen von $\frac{1}{8}$ Volumen des Elementarwürfels entsprechen. Es muß zweierlei Sorten von derartigen Punktlagen geben, und die zweiten Punktlagen müssen sich zu den ersten verhalten können wie Zentrum und Kantenmitten der kleinen Würfelchen zu Ecken und Flächenmitten. Es müssen unter diesen Punkten solche vorhanden sein, die mindestens einen Freiheitsgrad besitzen, den die betreffenden Atome benutzen, so daß ihre Lage nicht genau mit den am Würfelchen fixierten Lagen übereinstimmt, denn sonst wäre, bei punktuellem Wert chemisch gleicher Atome, die Periode auf den halben Betrag herunterzusetzen.

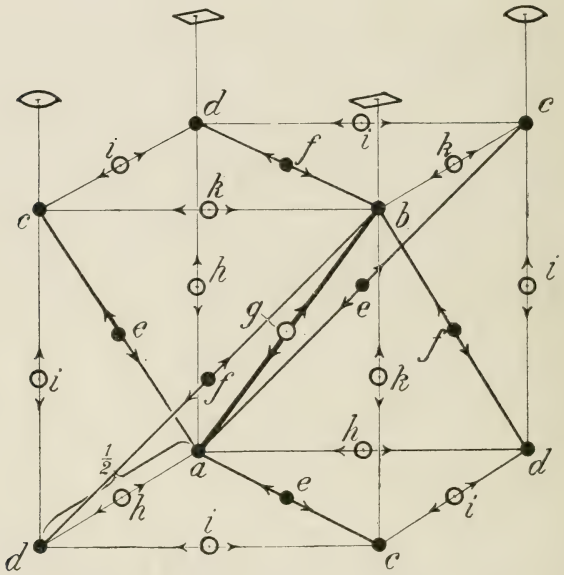


Fig. 167. Drehungsachsen und Punktzusammengehörigkeit im ersten $\frac{1}{8}$-Elementarwürfel von $\mathfrak{O}^1$ bei einer dem Kochsalzbautypus von doppelter Elementarperiode entsprechenden Atomverteilung.

In $\mathfrak{O}^1$ finden wir, daß die Ecken des Elementarwürfels (a), das Zentrum des Elementarwürfels (b), die Flächenmitten des Elementarwürfels (c), die Kantenmitten (d), die Punktkomplexe $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ 0]\!]$ und $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}]\!]$ als (e) und (f) zusammen 32zählig sind und eine Lage zueinander haben, wie Ecken und Flächenmitten der Würfelchen von $\frac{1}{8}$ Volumen des Elementarwürfels. Ihnen stehen entgegen die 8zähligen Punkte des Komplexes $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ (g), die 6zähligen Punkte des Komplexes $[\![\frac{1}{4}\ 0\ 0]\!]$ (h), die 6zähligen $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}]\!]$ (k), die 12zähligen von $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ 0]\!]$ (i). Sie nehmen die Lage der Zentren und Kantenmitten dieser Würfelchen ein.

In ihrer Lage fixiert sind nur (a), (b), (c), (d); alle übrigen Punkte besitzen einen Freiheitsgrad, können somit in je einer Richtung verschoben werden, ohne daß, sofern dies gemäß den Koordinatentripeln gesetzmäßig geschieht, die Symmetrie des Gesamtgebäudes sich ändert. In Fig. 167 ist das nach unserer Aufstellung links hinten unten gelegene Würfelchen von $\frac{1}{8}$ Volumen des Elementarwürfels abgebildet. Es enthält nun nicht mehr die ganze Periode, und die übrigen 7 Würfelchen sind, bei Abweichung der Punktlagen mit einem Freiheitsgrad, nicht mehr parallel orientiert. Es genügt aber zur Darstellung der Verhältnisse, soweit sie für unsere Diskussion von Bedeutung sind. Die für die Freiheitsgrade in Frage kommenden Atome sind eingezeichnet. Durch Doppelpfeile sind die möglichen Lageverschiebungen der Punkte (e)—(k) markiert. Bei zusammengehörigen Punkten (gleicher Buchstabe) ist selbstverständlich durch die abweichende Lage des einen die Lage jedes anderen Punktes bestimmt. Die gesamte Punktgruppe besitzt daher außer der Periodenlänge sechs Unbekannte, je eine für (e), (f), (g), (h), (i), (k). Bei allen diesen Betrachtungen müssen wir das „Gestaltliche" der Atome ausschalten, beziehungsweise die Atome als von punktuellem Wert für die Symmetrie annehmen, denn sonst wäre es kaum verständlich, daß chemisch gleiche Atome verschiedene Minimalsymmetrie besitzen können. Daher ist nun die Frage zu stellen, ob die gleiche Anordnung bei punktuellem Wert der Atome nicht etwa gar kubische holoedrische Gesamtsymmetrie bedingt. Die Antwort ist bejahend. In $\mathfrak{O}_h^1$ besitzen alle Punkte (a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i) (k) gleiche Zusammengehörigkeit (Zähligkeit) und gleichen Freiheitsgrad, lediglich jeweilen höhere Symmetriebedingungen, die aber stets erfüllt sind, wenn für die Symmetriebetrachtungen die Atome selbst punktuellen Wert besitzen (Kugelsymmetrie!). Abweichungen der Lagen im Rahmen des soeben Mitgeteilten sind somit möglich, ohne daß die kubisch holoedrische Gesamtsymmetrie verloren geht. Nur die Periode in Richtung der kristallographischen Atome (Koordinatenachsen) ist doppelt so groß geworden.

In $\mathfrak{O}_h^2$ würden (a) und (b), ferner (c) und (d), ferner (e) und (f) sowie (h) und (k) zusammengehören, die zwei letzteren in den Lageverschiebungen somit voneinander abhängig sein. (i) wäre in der Lage fixiert, ebenso (g). Unbekannte wären nur noch vier vorhanden. Man ersieht daraus, wie wichtig für die Zuordnung die genaue Bestimmung der Art und Größe der Lageverschiebungen gegenüber den durch den Braggschen Typus gegebenen „Normallagen" wäre.

Die den Koordinatenachsen gegenüber gleichgelegenen Punkte liefern bei doppelter Periode auch in $\mathfrak{O}^2$ Punktsysteme vom allgemeinen Charakter des Kochsalztypus. Die Zusammengehörigkeit sowie die Freiheitsgrade haben sich aber geändert. (Siehe Fig. 168.)

Man hat:

einerseits			anderseits		
Lage	Zähligkeit	Freiheitsgrad	Lage	Zähligkeit	Freiheitsgrad
a	2	0	d	6	0
b	6	0	e	6	0
c	24	3	f	4 + 4	0
	32		g	12	1
				32	

Die Fig. 168 stellt wieder nur einen der 8 kleinen Würfel dar, die erst in ihrer Gesamtheit die Raumperiode bedingen. Von den Drehungsachsen sind nur die durch das Würfelchen gehenden eingezeichnet. Man wird auf Seite 378 jede weitere wünschenswerte Auskunft finden. Doppelpfeile markieren wiederum die Richtungen der möglichen Lageverschiebungen bei einem Freiheitsgrad. (c) mit drei Freiheitsgraden ist nicht als

Punkt, sondern nur durch die Buchstaben gekennzeichnet. Die Zentren von allen 8 Teilwürfeln besitzen die Symmetrie D_3, die nun bereits in der Anordnung der Punkte (bezw. ihren Lageverschiebungen) zum Ausdruck kommt. Auch hier ist zu untersuchen, ob bei punktuellem Wert der Atome die Gesamtanordnung kubisch holoedrisch wird. $\mathfrak{O}^2$ mit gleicher Achsenverteilung ist in $\mathfrak{O}_h^3$ und $\mathfrak{O}_h^4$ enthalten. Lediglich höhere Symmetrie bei gleicher Zähligkeit besitzen in $\mathfrak{O}_h^3$ (a) (b) (d) (e) (g). — (f) aller Teilwürfelchen ist nun als 8zählige Punktlage zusammengehörig. (c) besitzt bei gleicher Zähligkeit nur noch zwei Freiheitsgrade, da die Teilwürfelflächen Spiegelebenen sind. Auch in $\mathfrak{O}_h^4$ besitzt (c) nur noch zwei Freiheitsgrade, da hier je drei Diagonalflächen Spiegelebenen

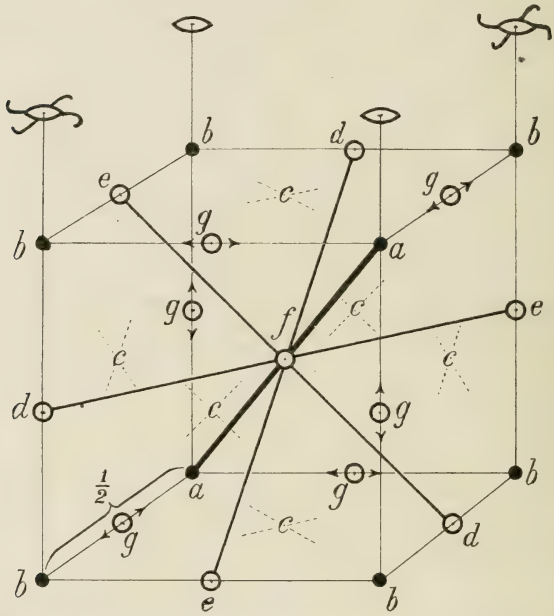


Fig. 168. Drehungsachsen und Punktzusammengehörigkeit im ersten $\frac{1}{8}$-Elementarwürfel von $\mathfrak{O}^2$ bei einer dem Kochsalzbautypus von doppelter Elementarperiode entsprechenden Atomverteilung.

sind. Wenn somit (c) weder auf den Würfelchenseitenflächen noch auf den $\mathfrak{O}_h^4$ zugehörigen Diagonalflächen liegt, ist bei Benutzung der Freiheitsgrade eine derartige Anordnung eindeutig kubisch enantiomorph. Sie könnte uns eine Vorstellung vermitteln über kleine Lageverschiebungen der Atome im Sylvin. Es wäre zur Vervollständigung noch zu untersuchen, warum die Anordnung nicht etwa paramorph oder hemimorph ist. In $\mathfrak{T}_h^2$, das in Betracht kommt, müßte (f) beispielsweise einen Freiheitsgrad besitzen. Im übrigen darf die weitere Diskussion wohl dem Leser überlassen werden.

Für $\mathfrak{O}^3$ ist ein gleiches Teilwürfelchen in Fig. 169 gezeichnet.

Man erkennt:

einerseits			anderseits		
Lage	Zähligkeit	Freiheitsgrad	Lage	Zähligkeit	Freiheitsgrad
a	4	0	d	8	0
b	4	0	e	24	1
c	24	0		32	
	32				

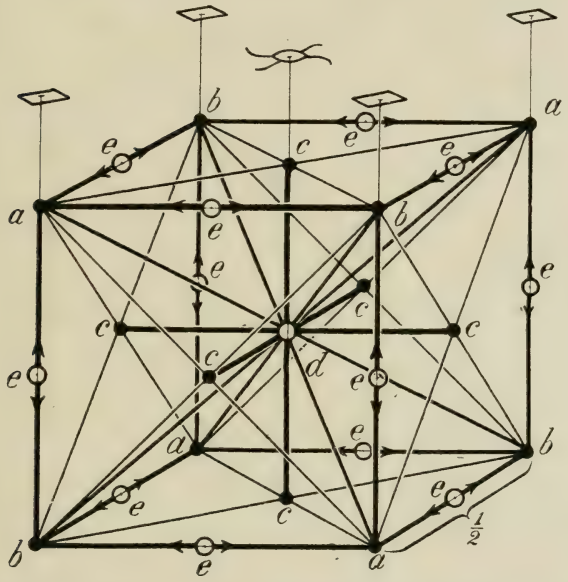


Fig. 169. Drehungsachsen und Punktzusammengehörigkeit im ersten $\frac{1}{8}$-Elementarwürfel von $\mathfrak{O}^8$ bei einer dem Kochsalzbautypus von doppelter Elementarperiode entsprechenden Atomverteilung.

Nur (e) besitzt einen Freiheitsgrad. Der genau gleiche Freiheitsgrad, lediglich mit höherer Eigensymmetrie, kommt ihm aber auch in $\mathfrak{O}_h^5$ zu, so daß bei punktuellem Atomwert die Anordnung kubisch holoedrisch wirkt. In $\mathfrak{O}_h^6$ wären alle Punktlagen fixiert, also nicht unterscheidbar von einer Anordnung mit einfacher Periode.

In $\mathfrak{O}^4$ sind die bis jetzt betrachteten Punktlagen zur Konstruktion von Kochsalztypen mit doppelter Periode nicht mehr brauchbar, weil $[\![0\,0\,0]\!]$ und $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ zusammengehören. Hingegen liefern die zu $[\![\frac{1}{8}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{8}]\!]$ und $[\![\frac{5}{8}\,\frac{5}{8}\,\frac{5}{8}]\!]$ gehörigen Punktkomplexe mit einem Komplex $[\![\frac{3}{8}\,\frac{3}{8}\,\frac{3}{8}]\!]$ passende Punktsysteme. Ein Teilwürfelchen mit eingezeichneten trigonalen Drehungsachsen ist in Fig. 170 dargestellt. (a) ist wie (b) 16zählig und gemäß der Symmetriebedingung D_3 ohne Freiheitsgrad. (c) gehört nur trigonalen

Drehungsachsen an und besitzt einen Freiheitsgrad. Aber auch dann, wenn dieser Freiheitsgrad ausgenützt wird, ist die Anordnung immer noch kubisch holoedrisch. In $\mathfrak{O}_h^7$ sind nämlich die Punktzusammengehörigkeiten gleich, nur müssen jetzt (a) und (b) mindestens D_{3d}, (c) C_{3v} als Eigensymmetrie besitzen, was bei punktuellem Atomwert stets der Fall ist. In $\mathfrak{O}^5$ liefern die früher betrachteten Punktlagen wieder ein brauchbares Resultat. (Siehe Fig. 171, wo ein Teilwürfelchen abgebildet ist mit den zur Diskussion notwendigen Drehungsachsen).

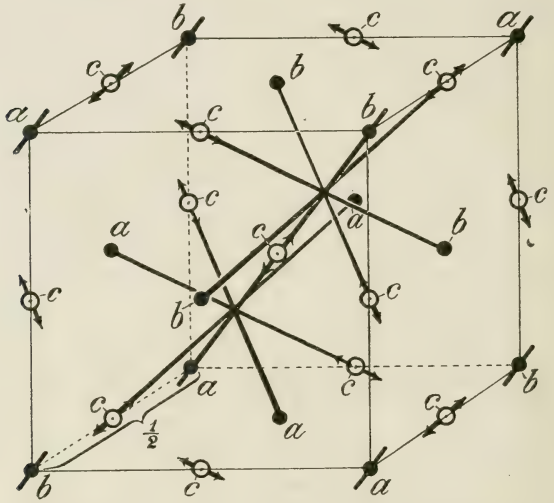


Fig. 170. Trigonale Drehungsachsen und Punktzusammengehörigkeit in einem $\frac{1}{8}$-Elementarwürfel von $\mathfrak{O}^4$ bei einer dem Kochsalzbautypus von doppelter Elementarperiode entsprechenden Atomverteilung. Der Elementarwürfel ist gegenüber dem Koordinatenwürfel um $\frac{1}{8}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{8}$ verschoben.

Es sind vorhanden:

einerseits			anderseits		
Lage	Zähligkeit	Freiheitsgrad	Lage	Zähligkeit	Freiheitsgrad
a	2	0	d	8	0
b	6	0	e	12	0
c	24	1	f	12	1
	32			32	

Zwei einzige Unbekannte für (c) und (f) sind zu erkennen. Die Anordnung ist bei punktuellem Atomwert aber nicht enantiomorph, sondern kubisch holoedrisch entsprechend $\mathfrak{O}_h^9$, wo (c) und (f) bei gleicher Zähligkeit und gleichem Freiheitsgrad lediglich höhere Minimalsymmetrie besitzen müssen.

Es genügt, wenn wir an Stelle von $\mathfrak{O}^6$ und $\mathfrak{O}^7$ eine Gruppe, beispielsweise $\mathfrak{O}^6$, betrachten. Der Eckpunkt links hinten unten des Teilwürfelchens von Fig. 172 ist

wiederum der Koordinatennullpunkt unserer Darstellung auf Seite 384. Diesmal sind nun aber die Teilwürfelchen ganz unsymmetrisch zueinander, so daß sich das Bild wesentlich verschieben würde, wenn wir ein anderes Würfelchen betrachten. Der Leser tut gut, an Hand jener Darstellung eine diesbezügliche Konstruktion auszuführen. (a) ist die 4zählige Punktlage $[\![0\ 0\ 0]\!]$; (b) die ebenfalls 4zählige Lage $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$. Beides sind die einzigen Lagen ohne Freiheitsgrad. (c) und (d) sind 12zählig und liegen auf den eingezeichneten digonalen Achsen (1 Freiheitsgrad). Auf trigonalen Achsen liegt (e), während das 24zählige (f) drei Freiheitsgrade besitzt. Bei wenn auch nur geringer

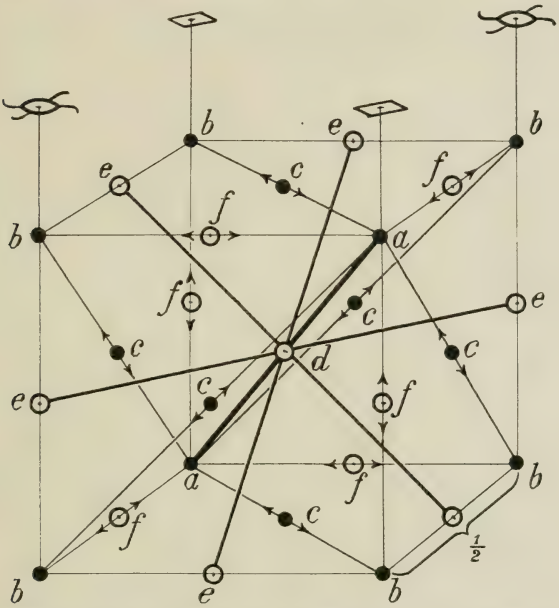


Fig. 171. Drehungsachsen und Punktzusammengehörigkeit in einem $\frac{1}{8}$-Elementarwürfel vo $\mathfrak{O}^5$ bei einer dem Kochsalzbautypus von doppelter Elementarperiode entsprechenden Atomverteilung.

Ausnützung aller Freiheitsgrade ist die Atomanordnung eindeutig als enantiomorph gekennzeichnet. Es gibt keine entsprechende holoedrische Raumgruppe. Hier liegt ein zweites Beispiel vor, wie man sich durch Lageverschiebungen und Periodenerhöhung die enantiomorphe Symmetrie von Sylvin vorstellen kann. Auch $\mathfrak{O}^8$ liefert bei zweifacher Kantenperiode eine als enantiomorph charakterisierte Punktverteilung. (Siehe Fig. 173.) Auch hier gilt für das Teilwürfelchen dasselbe, was vorhin bemerkt wurde. Fig. 173 stellt jenes Würfelchen dar, dessen Eckpunkt links hinten unten Koordinatennullpunkt der Darstellung auf Seite 386 ist. (a) ist 8zählig ohne Freiheitsgrad, (b) gehört digonalen Drehungsachsen an und ist 24zählig. (c) ist ohne Freiheitsgrad wie (a) achtzählig. (d), auf digonalen Drehungsachsen liegend, ist wieder 24zählig. Alle Verschiebungsrichtungen verlaufen schief zu den Koordinaten-

achsen, nämlich parallel zu Nebenachsen. In $\mathfrak{D}_h^{10}$ würden (a) und (c) zusammengehören, also keinen Typus Kochsalz liefern, bei dem in (a) und (c) verschiedene Atome sitzen. Bei Ausnützung der Freiheitsgrade ist somit auch eine derartige Verteilung der Atomschwerpunkte zur Charakterisierung enantiomorpher Hemiedrie geeignet.

Man sieht, wie schon unter den einschränkenden Voraussetzungen die Mannigfaltigkeit möglicher Lageverschiebungen gegenüber den Braggschen Normallagen ohne Änderung der Symmetrie oder unter Herabsetzung der Symmetrie in die enantiomorphe Hemiedrie eine ganz erhebliche ist. Das zeigt den vom kristallographischen Standpunkte aus

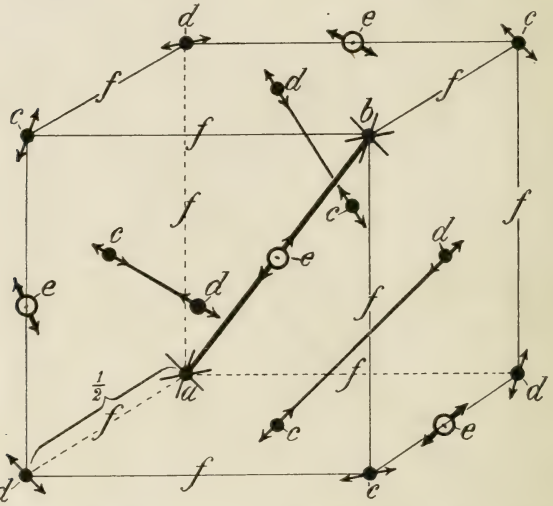


Fig. 172. Punktzusammengehörigkeit bei Kochsalzbauschema in einem $\frac{1}{8}$-Elementarwürfel von $\mathfrak{D}^6$. Nur die zur Diskussion notwendigen Drehungsachsen sind gezeichnet.

etwas unbestimmten Charakter jeder Strukturbestimmung nach den bis jezt üblichen Methoden. Denn, daß sehr kleine Lageverschiebungen dieser Art mit experimentellen Daten immer noch in Einklang zu bringen sind, ist bei der rohen Experimentaltechnik zweifellos. Anderseits müssen wir uns der Tragweite derartiger spekulativer Erwägungen genau bewußt sein, um ihren Wert abschätzen zu können. In keinem der besprochenen Fälle wären nun gleichzeitig alle A-Atome unter sich und alle B-Atome unter sich gleichwertig. Wir müßten, wollten wir die enantiomorph-symmetrischen Ätzfiguren des Sylvins auf derartige Lageabweichungen zurückführen, annehmen, daß es mehrere Arten von K- und Cl-Atomen im Kristallgebäude gibt, die jeweilen in

verschiedener Weise von anderen Atomen umgeben sind. Erst für gewisse Komplexe stellt sich wieder eine gleichwertige Atomverteilung ein. Man hätte mit anderen Worten nichts mehr und nichts weniger getan, als dem allerdings etwas vagen Begriff der „Kristallmolekel" Eingang verschafft. Da müßte nun die Wahrscheinlichkeit der Komplexbildungen vor allem von einem chemischen Standpunkte aus geprüft werden. Uns genügt, auf einige strukturelle Möglichkeiten hingewiesen zu haben, aus denen hervorgehen soll, wie auch in derartigen Fällen stets die analytische-geometrische Untersuchung der Raumsysteme unerläßliche Vorbedingung für eine erschöpfende Diskussion ist.

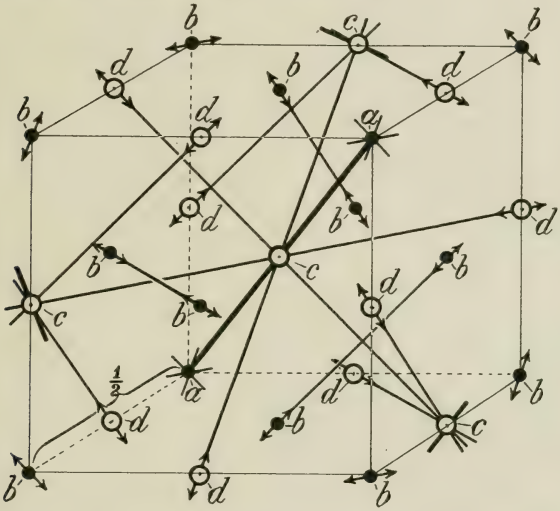


Fig. 173. Punktzusammengehörigkeit bei Kochsalzbauschema in einem $\frac{1}{8}$-Elementarwürfel von $\mathfrak{O}^8$. Nur die zur Diskussion notwendigen Drehungsachsen sind gezeichnet.

In den in Betracht gezogenen Raumsystemen doppelter Koordinatenachsenperiode, die nur enantiomorph zu deutende Anordnungen ermöglichen, sind die an höchstsymmetrischer Stelle stehenden Atome in folgender Weise von übrigen Atomen umgeben: In $\mathfrak{O}^2$ entsprechend einer Symmetrie T und D_3, während die Verteilung bei holoedrischer Wirkung (in $\mathfrak{O}_h^3$ und $\mathfrak{O}_h^4$) den Symmetrien T_h und D_3 bezw. T und D_{3d} entsprechen müßte. In $\mathfrak{O}^6$, $\mathfrak{O}^7$, $\mathfrak{O}^8$ ist die höchstsymmetrische Verteilung von Atomen um ein Atom stets durch D_3 gekennzeichnet. Die Atomsymmetrie ist also auch an der günstigsten Stelle tatsächlich geringer geworden, als die den Normallagen entsprechende. Nur wäre sie dies-

mal selbst in der Massenverteilung erkennbar. Da aber die Lageabweichungen, schon der äußerst schwachen wirksamen Hemiedrie wegen, nur sekundärer Art sein könnten, d. h. auf Kräfte zurückgeführt werden müßten, die nicht für das allgemeine Bauschema der Kristalle verantwortlich sind, ergibt sich von selbst der enge Zusammenhang zwischen einer solchen Deutung und einer Deutung, die lediglich von niedriger Atomsymmetrie spricht, ohne Massenschwerpunktsverschiebungen in Frage zu ziehen. Und wenn wir uns bewußt sind, stets im Bilde zu sprechen, so genügt es vollkommen zu sagen, A und B besitzen praktisch die von Bragg angegebenen Normallagen, doch müsse die Atomsymmetrie, sofern Ätzversuche strukturell zu deuten wären, eine niedrigere sein, beispielsweise D_3 statt D_{3d} oder O statt O_h. Die spezielle Art der Vorstellung ist so lange dem eigenen Belieben anheimgestellt, bis zwingende Gründe für eine ganz besondere Deutung sprechen. Richtig ist wohl, daß derartige symmetrieherabsetzende Einflüsse mit dem allgemeinen Bauschema nichts zu tun haben, sondern durch von den Atomen ausgehende Nebenkräfte bedingt sind, gleichgültig, ob sie chemisch als Komplexbildung oder nur atomstrukturell durch Elektronenanordnung zu deuten sind. Dafür spricht das Verschwinden derartiger schwacher Hemiedrien bei Temperaturerhöhung. Es wird darauf noch zurückzukommen sein.

Die Darstellung der letzten Seiten kann auch in anderer Hinsicht ausgebeutet werden. Nimmt man nach den Vegardschen Untersuchungen an, was meiner Meinung nach durchaus nicht notwendig ist, daß in Mischkristallen die einander ersetzenden Atome von verschiedenem Einfluß auf die Gesamtsymmetrie sind, d. h. einander ungleichwertig erscheinen, so muß ihre gegenseitige Verteilung eine derartige sein, daß die resultierende Symmetrie nicht geändert wird. Hätten wir also einen regulär holoedrisch kristallisierenden Typus AB, wo 50% von B durch B′ ersetzt sind, so wären dann in Wirklichkeit mindestens drei konstitutionelle Punktlagen vorhanden: 1. eine 2n-zählige von A, 2. eine n-zählige von B und 3. eine n-zählige von B′.

Nun können beispielsweise in dem behandelten Kochsalztypus bei nur doppelt so großer Periode schon alle nicht zusammengehörigen Punkte (in den Figuren 167—173 mit verschiedenen Buchstaben bezeichnet) von verschiedenen Atomen besetzt sein, ohne daß die Symmetrie geändert wird. (Die Buchstaben der Figuren beziehen sich auf enantiomorphe Symmetrie; im Text ist jeweilen angegeben, ob bei kubischer Gesamtsymmetrie einzelne noch zusammenfallen). Man kann so eine Reihe von Mischungsverhältnissen finden, für welche die Achsenperiode nur verdoppelt werden müßte. Fig. 170 ist beispielsweise typisch für 50 B zu 50 B′. Selbstverständlich können jetzt die Punkte genau die Lage der Ecken und Zentren der Teilwürfelchen einnehmen, ohne daß das zugehörige Raumsystem ein anderes würde, sofern B und B′ als ungleichwertig betrachtet

werden. Die Anordnung, die von Vegard bei seinen Untersuchungen vorausgesetzt wurde, ist noch dadurch ausgezeichnet, daß parallel den Würfelkanten B und B′ stets abwechseln, sie ist also auch in dieser Hinsicht die einfachst mögliche. Es scheint mir nun allerdings noch nicht ohne weiteres notwendig zu sein, daß einander ersetzende Atome bei fixierter Lage nicht als gleichwertig betrachtet werden dürfen. Denn erfahrungsgemäß sind in allen Verhältnissen bei einfachen Substanzen nur strukturell nahe verwandte Atome mischbar. Die zugleich wahrscheinlichste Verteilung vikarisierender Atome ist in solchen Fällen wohl lediglich eine relative homogene, gleichgültig ob auf die Einzelatome bezogen die Symmetriebedingungen noch erfüllt sind oder nicht[1]). Übrigens wird man bei Mischkristallen auch diese selten oder nie auffinden können, da innerlich ganz homogene Mischkristalle wohl nur eine gedankliche Abstraktion sind.

Es sind im Anschluß an die Besprechung des Kochsalztypus von Bragg Fragen gestreift worden, für die keine besondere physikalisch-chemische Lösung vorgeschlagen werden soll. Dazu ist die Erfahrung noch viel zu unbedeutend. Es sollte nur gezeigt werden, wie auch in derartigen Fällen die geometrische Untersuchung der Raumsysteme, und zwar besonders in der hier zum ersten Mal durchgeführten Darstellung, das Fundament für alle Erörterungen abgibt.

B. Chemische Komplexsymmetrie und Kristallstruktur

Dem gleichen Zwecke sollen die nachfolgenden Bemerkungen dienlich sein. Der Anordnung zweier chemisch verschiedener Massenzentren, wie sie in dem von Bragg angenommenen Normaltypus des Kochsalzes zum Ausdruck kommt, liegt eine große Wahrscheinlichkeit im chemischen Sinne inne. Sie steht in enger Beziehung mit den neueren Vorstellungen über Molekularkonstitution, die A. Werner entwickelt hat. Jedes Massenteilchen A oder B (Na oder Cl) ist in drei aufeinander senkrecht stehenden, zweiseitigen Richtungen im kürzesten Abstand von Massenteilchen der anderen Art umgeben. Fig. 174 zeigt das diesbezügliche Verhalten. Es ist nicht ausgeschlossen, daß eine ähnliche Anordnung der Massenzentren sich häufig einstellen wird, wenn zwei gleichzählige Arten von Ionen oder Atomkomplexen zum Kristallgebäude zusammentreten. Nehmen wir nun beispielsweise in B den Schwerpunkt eines Atomkomplexes an, während A noch Einatomwert besitzen soll. Dann wird selbstverständlich die Atomanordnung innerhalb des Komplexes die Symmetrie der Gasamtanordnung beeinflussen. Sie, sowie die Stellung der Atomkomplexe zueinander, bestimmen das Raumsystem,

[1] Das Problem der Verteilung ist dann eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. M. von Laue hat die Verteilung in diesem Sinne diskutiert.

welches der betreffenden Struktur zugeordnet werden kann. Es handelt sich im wesentlichen um eine ähnliche Erscheinung, wie die, welche bei der Symmetrieklassenbestimmung der makroskopischen Kristallographie eine Rolle spielt. Ein Kristallindividuum, das von drei praktisch aufeinander senkrecht stehenden Flächenpaaren begrenzt ist, wird je nach den Flächensymmetrien und ihrem gegenseitigen Verhalten verschiedenen Klassen angehören. Dabei kann es sich herausstellen, daß die Flächenpaare einander nicht gleichwertig sind, oder daß die rechten Winkel keine notwendige Bedingung mehr darstellen. Ebenso können die Abstände der Schwerpunkte von A und B unter Umständen ungleichwertig werden und die von den Richtungen eingeschlossenen Winkel teils oder ganz beliebige sein. Machen wir nun eine Annahme über die Größe der Identitätsabstände in den Bindungsrichtungen, so läßt sich leicht mittels der Tabellen diskutieren, welche Gesamtsymmetrien mit einer

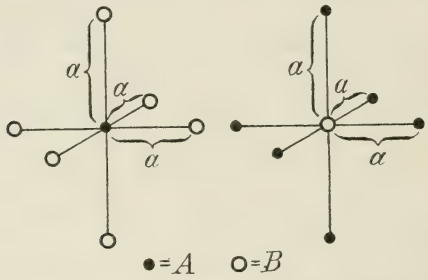


Fig. 174. Kürzeste Bindungsrichtungen zwischen den Bauelementen A und B im Typus Kochsalz.

bestimmten Komplexsymmetrie im Einklang sind, und welcher Art in den verschiedenen Fällen die gegenseitige Stellung der Komplexe zueinander sein muß. Mit anderen Worten, wir können untersuchen, welche Raumsystemsymmetrien resultieren, wenn Komplexe bestimmter Symmetrie nach dem Kochsalzschema zum Kristallgebäude zusammentreten.

Nehmen wir beispielsweise für das Kochsalzschema die einfachsten Elementarperioden an, so daß beide Lagen vierzählig werden, und denken wir uns an Stelle von B einen Komplex MN_8. Die denkbar höchstsymmetrische Anordnung eines solchen Komplexes ist M im Mittelpunkt eines gleichseitigen Dreieckes, N an den Ecken (Fig. 175). Der Schwerpunkt von M ist dann zugleich der Schwerpunkt des Komplexes. Bei punktuellem Atomwert wäre D_{3h} die Komplexsymmetrie; mindestens muß der Komplexschwerpunkt eine Symmetriebedingung besitzen, die eine Zuordnung von nur drei Punkten in einer Ebene gestattet. Soll die Gesamtanordnung kubisch bleiben, so besitzen nach den früheren Erörterungen die Schwerpunktslagen eine von den auf Seite 437 zusammengestellten und der Tabelle IV entnommenen Symmetriebedingungen.

Davon sind mit der durch Fig. 175 gekennzeichneten Komplexsymmetrie C_3, C_{3v} und D_3 verträglich, ihnen entsprechen die Raumsysteme $\mathfrak{T}^1$, $\mathfrak{T}^4$, $\mathfrak{T}_d^1$ und $\mathfrak{O}^2$. Kubische Holoedrie oder kubische paramorphe Hemiedrie würden nie als Gesamtsymmetrie resultieren. Die Lage der trigonalen Achsen ist in jedem Einzelfall bestimmt. Von besonderem Interesse ist die der Raumgruppe $\mathfrak{T}^4$ entsprechende Struktur. In Fig. 176 sind die trigonalen Achsen eingezeichnet und die MN_3-Ebenen durch Kreise markiert. Würden sich alle diese MN_3-Ebenen einer Ebene parallelstellen, so wäre das gleichbedeutend mit dem Verlust von dreien der vier verschieden gerichteten trigonalen Achsen; rhomboedrische Raumsysteme würden resultieren.

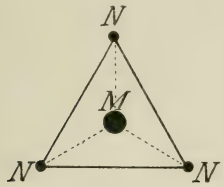


Fig. 175. Symmetrische Baugruppe MN_3.

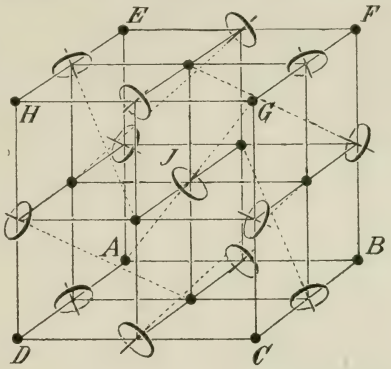


Fig. 176. Trigonale Achsen und MN_3-Ebenen eines Typus Kochsalz ($M = A$, $MN_3 = B$ von Fig. 163) in $\mathfrak{T}^4$.

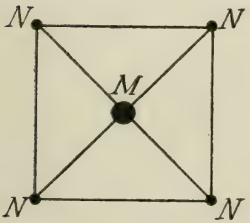


Fig. 177. Höchste Ebenensymmetrie einer Baugruppe MN_4.

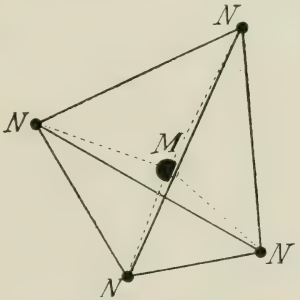


Fig. 178. Tetraedersymmetrie einer Baugruppe MN_4.

Drei in einer Ebene liegende Massenteilchen lassen sich auch so um ihren Schwerpunkt gruppieren, daß dessen Symmetriebedingung durch C_2, C_s oder C_1 gegeben ist. Niemals würden dann alle N-Atome einander gleichwertig sein. Derartige Symmetriebedingungen kommen in kubischen Raumgruppen erst bei relativ hochzähligen Punktlagen vor, sind also mit dem Kochsalzbauschema bei kleiner Periode nicht verträglich.

Denken wir uns anderseits einen Komplex MN_4. Hier gibt es, neben vielen mittelsymmetrischen, zwei hochsymmetrische Anordnungen innerhalb des Komplexes selbst, wobei M zugleich der Schwerpunkt von MN_4 ist. Es sind das der tetraedrische

Typus (Fig. 178) und der quadratische Typus, letzterer mit den Schwerpunkten aller Atome in einer Ebene (Fig. 177).

MN_4 trete im Kochsalzschema unter gleichen Voraussetzungen wie früher an Stelle von B, während A noch Einatomwert zukomme. Mit kubischer Gesamtanordnung ist nur der tetraedrische Typus verträglich, denn wie aus der auf Seite 437 mitgeteilten Zusammenstellung hervorgeht, sind für vierzählige Punktlagen im kubischen Kristallsystem in B bei Anwesenheit einer vierzähligen Achse immer deren drei da. In der Tat, denken wir uns einen quadratischen Komplex mit der Gruppenebene senkrecht zur z-Richtung eingesetzt, so zum Beispiel, daß die vier N-Atome von MN_4 gerade in die x- und y-Richtungen oder die Winkelhalbierenden dazwischen fallen, so läßt sich von vornherein erwarten, daß z andere Dimensionsverhältnisse annehmen wird als x und y. Tetragonale Gesamtanordnung würde resultieren. Es kann aber MN_4 alle Atomschwerpunkte in einer Ebene und in M seinen Schwerpunkt haben, ohne quadratische Symmetrie aufzuweisen (zum Beispiel die N-Atome durch Symmetrieebenen oder zweizählige Achsen zusammengehörig). Kristallographisch muß dann der Mittelpunkt, wenn alle N-Atome sich gleichwertig sind, notwendig die Symmetrie einer Kristallklasse besitzen, die eine Form enthält mit 4 (und nur 4) Flächen in einer Zone, entsprechend einer Zuordnung von 4 Punkten in einer Ebene. Auch diese Bedingung ist in kubischen und rhomboedrischen Raumsystemen bei vierzähliger Punktlage im Elementarparallelepiped nicht erfüllt, wohl aber in tetragonalen, rhombischen und monoklinen.

Im letzteren Falle sind dann naturgemäß die Abstände der A- und B-Schwerpunkte nicht mehr gleich groß, ihr gegenseitiges Verhalten ist durch die Form des Elementarparallelepipeds bedingt. Die Komplexe MN_3 oder MN_4 an Stelle von B des Kochsalzschemas einfachster Elementarperioden würden somit, bei durch die Fig. 175 und 177 dargestellten Eigensymmetrien, von ganz verschiedenem Einfluß auf die resultierende Gesamtsymmetrie sein. MN_3 ist auch unter dieser Periodenvoraussetzung mit einzelnen kubischen und rhomboedrischen Raumsystemen verträglich, während der quadratische Typus MN_4 oder irgend ein einfacher Ebenentypus MN_4 tetragonale Raumsysteme als höchstsymmetrische bedingen würde.

Was hier speziell für das Kochsalzbauschema abgeleitet wurde, gilt auch sonst für die Zusammenaggregierung von A und B zu einem Kristallgebäude, sofern deren Schwerpunkte geringzählige, das heißt in den betreffenden Raumsystemen relativ ausgezeichnete Lagen einnehmen. Anders wäre es, wenn die Schwerpunkte hochzähligen oder gar höchstzähligen Punktlagen entsprechen, besonders im letzteren Falle würde die Komplexsymmetrie für die Gesamtsymmetrie belanglos sein können.

Bei relativ einfachen Perioden müßte somit ein Zusammenhang zwischen chemischer Konstitution der Komplexe im Kristall und der Kristallsymmetrie erkennbar sein, bei großen Perioden wäre dies nicht notwendig. Man erkennt die verwickelte Natur des Problemes: „Chemismus und Kristallsymmetrie". Wird man sich einerseits hüten, alles schematisch von einem Gesichtspunkte aus zu betrachten, so darf man anderseits an denjenigen Erscheinungen nicht vorübergehen, die einen oft recht innigen Zusammenhang zwischen chemischer Konstitution und Kristallstruktur zur Gewißheit machen. Auch hier wird sich bei fortschreitender Erkenntnis, wie bereits das fingierte Beispiel A (MN_3) und A (MN_4) zeigt, ein Hilfsweg zur Kristallstrukturbestimmung auftun.

Einige statistische Zusammenstellungen, die das Problem beleuchten, mögen hier folgen. Die große Mehrzahl zweiatomiger Verbindungen $A_1 B_1$ kristallisiert in kubischen Kristallklassen, nächsthäufig sind Kristallisationen der hexagonalen oder rhomboedrischen (bezw. trigonalen) Abteilung, während niedersymmetrische und tetragonale Symmetrieklassen nur relativ schwach vertreten sind. Bei Annahme eines Zusammenhanges zwischen Bindungsrichtungen und Symmetrieelementen der Raumsysteme ist ein derartiges Verhalten durchaus verständlich, die erkennbare Vorliebe für hexagonal-rhomboedrische Symmetrie macht sich schon in der Kristallisation chemischer Elemente bemerkbar und hängt vielleicht mit dem Atombau zusammen.

Es kristallisieren kubisch: CuZn, AgZn, MnSi, FeSi, MgO, CaO, MnO, NiO, CoO, SrO, CdO, BaO, SnO, MgS, CaS, MnS, MnSe, NiSe, ZnS, ZnSe, ZnTe, SrS, CdTe, BaS, HgS, HgSe, HgTe, PbSe, PbTe, PbS, FeS, CdS, LiF, NaF, KF, CsF, TlF, LiCl, LiBr, LiJ, NaCl, NaBr, NaJ, KCl, KBr, KJ, RbCl, RbBr, CsCl, CsJ, CsBr, CuCl, CuBr, CuJ, AgJ, AgCl, AgBr, TlCl, TlBr, TlJ.

Hexagonal, rhomboedrisch oder trigonal kristallisieren: CuSn, SiC, NiAs, NiSb, BeO, ZnO, FeS, NiS, CoS, CuS, ZnS, ZnSe, CdS, CdSe, HgS, AgJ.

Tetragonal: PbO.

Rhombisch: FeAs, ZnSb, PbO, SnSe, SnS, TlJ.

Monoklin: HgO, NiS, AsS.

Triklin: CuO.

Weiterhin möge statistisch untersucht werden, ob sich bei Kristallarten, die vermutungsweise chemisch als A (MN_3) oder A (MN_4) zu deuten sind, ein Einfluß der Komplexe in dem Sinne geltend macht, wie er nach den vorhergehenden Erläuterungen bei einfachen Perioden zu erwarten wäre.

Die Tabelle VII zeigt in der Tat, daß die Verbindungen A (MN_3) meistens rhomboedrisch, trigonal oder hexagonal kristallisieren oder doch in sehr großer Annäherung (sog. Pseudosymmetrie) derartige Symmetrieverhältnisse aufweisen. Die Abweichungen von den wirklichen Symmetrieverhältnissen der betreffenden Abteilungen, die in den Tabellen durch das Wort pseudo gekennzeichnet sind, mögen ungefähr von der gleichen Größenordnung sein, wie diejenigen, welche zur Folge haben, daß Sylvin der kubisch enantiomorphen und nicht der kubisch holoedrischen Klasse zugerechnet werden darf. Es handelt sich sehr wahrscheinlich um sekundäre Einflüsse, die mit dem allgemeinen Bauschema nichts zu tun haben. Es wird später versucht werden, diese Erscheinungen von einem allgemeinen Gesichtspunkte aus zu betrachten. Auch in der kubischen Abteilung finden sich einige Kristallarten, die chemisch als A (MN_3) aufgefaßt werden können. Die Diskussion für das spezielle Normalschema des Kochsalzbautypus findet sich auf den vorhergehenden Seiten. Der Einfluß der Komplexsymmetrie (MN_3) ist

Haupttabelle VII. Symmetrieverhältnisse der Verbindungen [A (MN_3)]

[A (MN_3)]		[A (MN_3)]	
$NaClO_3$	kubisch	$CaCO_3$	pseudohexagonal oder pseudotrigonal (eventuell zum Teil auch mit pseudorhomboedrischer Translationsgruppe)
$NaBrO_3$	kubisch tetardoedrisch	$BaCO_3$	
$AgClO_3$	kubisch	$PbCO_3$	
$TlNO_3$		$SrCO_3$	
$RbJO_3$	bei gewöhnlicher Temperatur	$PbSiO_3$	
$NaNbO_3$	pseudo-kubisch, bei höherer	$CaSiO_3$	
$CaTiO_3$	Temperatur wohl kubisch	$BaSiO_3$	
$MgCO_3$		$SrSiO_3$	
$CaCO_3$	rhomboedrisch	$RbNO_3$	
$MnCO_3$		KNO_3	
$FeCO_3$		$CsNO_3$	
$NiCO_3$		$(TlSO_3)_2$	
$CoCO_3$			
$ZnCO_3$		$HgAsO_3$	? hexagonal
$CdCO_3$		$TlNO_3$	
$MnTiO_3$	rhomboedrisch (tetartoedrisch)	$AgClO_3$	tetragonal
$FeTiO_3$		$AgBrO_3$	
$NiTiO_3$	rhomboedrisch	$NaJO_3$	rhombisch, meist nicht näher bekannt
$CoTiO_3$		$AgJO_3$	
$LiNO_3$		$TlNO_3$	
$NaNO_3$		$ZnSiO_3$	
$AgNO_3$			
$KBrO_3$	rhomboedrisch, pseudokubisch	$MgSiO_3$	rhombisch und monoklin. (in Hornblendeform pseudohexagonal)
$(KSO_3)_2$	rhomboedrisch (enantiomorph)		
$(RbSO_3)_2$			
$KClO_3$	pseudorhomboedrisch (meist monoklin pseudorhomboedrisch)	$FeAsO_3$	monoklin (? ob Beziehung zu trigonaler Translationsgruppe)
KJO_3		$Tl(SO_3)_2$	
$RbClO_3$		$CaSiO_3$	
$CsClO_3$		$MnSiO_3$	triklin

somit in statistischem Sinne durchaus erkennbar. Verstärkt wird dieser Eindruck durch die Betrachtung der Tabelle VIII. Bei Verbindungen vom vermutlichen Typus A (MN_4) fehlen trigonale, rhomboedrische und hexagonale Kristallklassen fast völlig. Kubische Symmetrie findet sich nur dort, wo mit Sicherheit die Baugruppe (MN_4) als tetraedrisch angesprochen werden darf. Hingegen sind nun tetragonale Symmetrien neben rhombischen und monoklinen häufig. Alles das kann auf dem Einfluß der Komplexsymmetrie MN_4 beruhen, sofern dieser Komplex ein Ebenenschema bevorzugt.

Schließlich sind in der Tabelle IX noch die Kristallsysteme (Abteilungen) für einige wenigatomige Verbindungen zusammengestellt. Es geht daraus hervor, daß einfache Verbindungen im allgemeinen relativ

Haupttabelle VIII. Symmetrieverhältnisse der Verbindungen [A (MN_4)]

[A (MN_4)]

$LiJO_4$		$CsMnO_4$	rhombisch	Regulär sind die Chloride, Bromide, Jodide von (NH_4) einer typisch tetraedrisch gebauten Gruppe.
$NaJO_4$		$TlClO_4$		
$AgJO_4$		$SrSO_4$		
KJO_4		$SrSeO_4$		
$RbJO_4$		$BaSO_4$		
$KRuO_4$		$BaCrO_4$		
$CaWO_4$	tetragonal	$BaSeO_4$		$[AuCl_4]NH_4$ wieder tetragonal
$MgWO_4$		$PbSO_4$	rhombisch	
$BaWO_4$		$PbSeO_4$		$[AuCl_4]K$ monoklin
$ZnWO_4$		$FeSO_4$		$[AuBr_4]K$ monoklin
$SrWO_4$		$CuSO_4$		$[BF_4]K$ rhombisch und
$PbMoO_4$		$CdSO_4$		$[BF_4]Rb$ kubisch
$PbWO_4$		$ZnSO_4$		$[SbCl_4]Rb$ monoklin
$CaMoO_4$		$SrCrO_4$	rhombisch und monoklin	$AlPO_4$ hexagonal
$SrMoO_4$				
$BaMoO_4$	tetragonal	$PbCrO_4$	monoklin	
$ZnMoO_4$		$BiVO_4$	rhombisch	
YPO_4		$MnMoO_4$		
$CaSO_4$	rhombisch oder	$FeMoO_4$		
$CaCrO_4$?	pseudotetragonal	$CoMoO_4$		
$CaSeO_4$		$NiMoO_4$	monoklin	
$AgClO_4$	rhombisch	$MnWO_4$		
$AgMnO_4$	monoklin	$FeWO_4$		
$KClO_4$		$PbWO_4$		
$KMnO_4$		$MgWO_4$		
$RbClO_4$	rhombisch	$NiWO_4$	vermutlich monoklin	
$RbMnO_4$		$CoWO_4$		
$CsClO_4$		$AlAsO_4$	monoklin, pseudokubisch	
		Monazit	monoklin	
		$Y(Nb,Ta)O_4$	monoklin	
		$BiPO_4$	monoklin	
		$BiAsO_4$		

hohe Symmetrien aufweisen, und daß der Einfluß der Atomzahlen sehr häufig bemerkbar ist. Das alles wird, trotz der Vorsicht, die für Deutungen irgendwelcher Art zurzeit hier am Platze ist, den Eindruck erwecken müssen, daß die Zukunft uns ermöglichen wird, die Probleme der Beziehungen zwischen chemischer Konstitution und Kristallsymmetrie einer Lösung entgegenzuführen. G. Tschermak und P. v. Groth gebührt besonderer Dank, auf ähnliche Zusammenhänge zuerst nachdrücklichst hingewiesen zu haben.

Haupttabelle IX. Symmetrieverhältnisse sonstiger einfacher Verbindungen

Einfache dreiatomige Typen mit zwei gleichen Atomen

Sie kristallisieren fast alle noch mit hoher Symmetrie (kristallographisch z. B. AB_2 BAB AAB_4 usw.)

Cu_2Zn		ThO_2	kubisch oder tetrag.
$NaCd_2$		US_2	
Mg_2Sn		PbO_2	
Ag_2S		MgF_2	tetragonal
$PtSb_2$		TiF_2	
$PtAs_2$		HgJ_2	
$PtTe_2$		$CuSn_2$	
FeS_2		SiO_2	
MnS_2		PbO_2	
Sn_2Sb		MoS_2	hexagonal oder
SiO_2	kubisch	$FeCl_2$	trigonal (rhom-
Cu_2O		$FeBr_2$	boedrisch)
CeO_2		FeJ_2	
UO_2		CdJ_2	
RuS_2		PbJ_2	
CaF_2		$PbBr_2$	rhombisch
SrF_2		$PbCl_2$	pseudohexagonal
PbF_2		$FeAs_2$	
BaF_2		FeS_2	
$MnCl_2$		TiO_2	
$CaCl_2$		TeO_2	rhombisch
TeO_2		$ZnBr_2$	
ZrO_2	pseudokubisch	$HgCl_2$	
Cu_2S		$HgBr_2$	
TiO_2		Cu_2S	
MnO_2		$AuTe_2$	monoklin
SnO_2	tetragonal	SnF_2	
ZrO_2		PbJ_2	triklin
RuO_2			

Weitere einfache Typen mit nur zweierlei verschiedenen Atomen

$AlCl_3$		As_2O_3	
AlF_3		Sb_2O_3	rhombisch, event.
CrF_3	rhomboedrisch	Bi_2O_3	pseudorhombisch
$FeCl_3$	(eventuell mit	Bi_2S_3	
$TiCl_3$	hexagonaler		
PJ_3	Translations-	Sb_2S_3	rhombisch
AsJ_3	gruppe)	As_2S_3	monoklin
SbJ_3			
BiJ_3			
$SbCl_3$	rhombisch	SnJ_4	
SbF_3	? pseudotrigonal	UCl_4	kubisch (vielleicht
$(FeAl_3)$	? monoklin	$IrCl_4$	tetraedrische
Mn_3C	pseudohexagonal	SiJ_4	Baugruppe)
Fe_3C	hexagonal (trigon.)	TiJ_4	
	oder rhombisch	CJ_4	kubisch oder
Fe_3Si	triklin, pseudo-	CBr_4	pseudokubisch
	hexagonal	$SnBr_4$	
Cu_3As	rhombisch-	$CeAl_4$	rhombisch
	pseudohexagonal	$LaAl_4$	
Fe_3P	tetragonal	$ThAl_4$	rhombisch,
$CoAs_3$	kubisch		pseudohexag.
Al_2O_3			
Fe_2O_3			
Cr_2O_3	rhomboedrisch		
Ti_2O_3			
La_2O_3			
As_2O_3			
Sb_2O_3	pseudokubisch		
Bi_2O_3			

Vermutliche Gruppen mit Zweizahl

$Na(NO_2)$	rhombisch
$K(NO_2)$	
$Fe(CuS_2)$	tetragonal pseudokubisch
$Sb(CuS_2)$	rhombisch
$Bi(CuS_2)$	rhombisch
$As(AgS_2)$	monoklin
$As(TlS_2)$	monoklin

Ausgesprochene wirksame Sechszahl

$Na_2[Sn(OH)_6]$	rhombo-
$K_2[Sn(OH)]_6$	edrisch (di-
$K_2[Pt(OH_6)]$	trigonal ska-
$K_2[Pb(OH)_6]$	lenoedrisch)

$MgSiF_6 \cdot 6H_2O$ · rhomboedrisch

Anderseits auch kubisch wie:

K_2PtCl_6

K_2SnCl_6

C. Einige andere einfache Strukturbilder

Im Typus ZnS als Zinkblende bilden nach Bragg sowohl die Zn- als die S-Atomschwerpunkte für sich flächenzentrierte kubische Gitter. ([[0]]''' der Tabelle VI auf Seite 420.) Sie sind also, wie die Na- und Cl-Atome des Kochsalzes (in der Auffassung als gleichwertiger Komplex), im Würfel elementar vierzählig. Allein die beiden Gitterkomplexe stehen in anderer gegenseitiger Lage zueinander. Sind $[[0\,0\,0]]$ $[[\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]]$ $[[\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]]$ $[[0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]]$ die Koordinatenwerte der einen Atomart, so sind $[[\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]]$ $[[\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]]$ $[[\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]]$ $[[\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]]$ beziehungsweise $[[\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]]$ $[[\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]]$ $[[\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]]$ $[[\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]]$ Koordinaten der anderen Atomart. (Siehe Fig. 179.) Eine derartige Kombination ist nun (bei einfachster Periodenfestsetzung in Richtung der kristallographischen Achsen) weniger vieldeutig als die von Kochsalz. $\mathfrak{T}^2$ und $\mathfrak{T}_d^2$ gestatten die Zuordnung zweier vierzähliger Punktlagen nach dem Schema der Fig. 179. Daraus ergibt sich je nach den Eigensymmetrien der Punktlagen tetartoedrische oder hemimorph hemiedrische Gesamtsymmetrie.

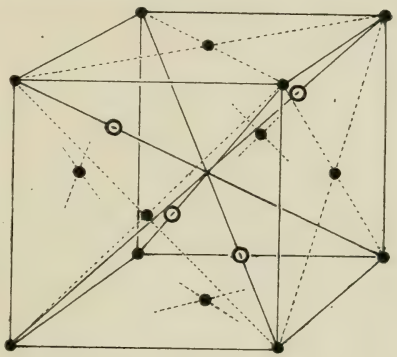


Fig. 179. Atomverteilung im Elementarwürfel des Typus Zinkblende (nach Bragg). A = Zn; B = S.

Sind, wie zum Beispiel im Diamant (nach Bragg), beide Punktlagen von chemisch gleichen Atomen besetzt, so können sie bei richtiger Stellung der Atome zueinander einem einzigen achtzähligen gleichwertigen Komplex angehören (Diamantgitterkomplex = $[[0\ \frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]]'''$). Die Tabelle der Seite 420 zeigt, daß eine derartige Zuordnung für Punkte ohne Freiheitsgrad in $\mathfrak{T}_h^4$, $\mathfrak{O}^4$, $\mathfrak{O}_h^7$ möglich ist. Damit $\mathfrak{O}_h^7$ entsteht, müssen zwischen $[[0\,0\,0]]$ und $[[\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]]$ usw. Symmetriezentren vorhanden sein und außerdem digonale Nebenachsen auftreten.

Eine Anordnung, wie sie der Normalstruktur des Diamanten entspricht, kann somit in allen kubischen Klassen vorkommen, in tetraedrischer und tetartoedrischer Auffassung müßten lediglich zwei voneinander unabhängige konstruktive Punktlagen (gleicher Symmetriebedingung!) angenommen werden [1]). Bei punktueller Atomsymmetrie resultiert $\mathfrak{O}_h^7$.

[1]) Chemisch gleiche Atome brauchen einander nicht strukturell gleichwertig zu sein, besonders wenn Stellungsverschiedenheiten als solche erkennbar sind. Die Gleichwertigkeit verlangt dann immer genau bestimmte Stellungen zueinander.

Pyrit (FeS_2) und Hauerit (MnS_2) bauen sich nach den Braggschen Untersuchungen aus Fe (bezw. Mn) und dem Komplexe S_2 in der Weise auf, daß beide Massenschwerpunkte gleiche Lage zueinander haben wie Na und Cl im Kochsalz. Die Verteilung der S-Atome, die einen Freiheitsgrad der Lageänderung (auf trigonalen Drehungsachsen) besitzen, geht aus der schematisch gezeichneten Fig. 180 hervor. Sie führt zum Raumsystem $\mathfrak{T}_h^6$. Denken wir uns Fe (AsS) in gleicher Weise gebaut, so würde der Schwerpunkt von (AsS) nicht mehr mitten zwischen den As- und S-Atomen liegen. Beide Atomlagen müßten als ungleichwertig angesprochen werden und $\mathfrak{T}^4$ würde resultieren. Denken wir uns anderseits den Komplex S_2 in die Einzelatome aufgelöst, derart daß diese gleichmäßig von Fe-Atomen umgeben sind, so entstünde eine Anordnung, wie sie durch Fig. 181 veranschaulicht wird und wie sie für $CaF_2 = F - Ca - F$ wahrscheinlich ist. Eine derartige Anordnung ist wieder außerordentlich vieldeutig. Im einfachsten Falle besteht sie aus einer vierzähligen und einer achtzähligen Punktlage und entspricht bei punktueller Atomsymmetrie einem Raumsystem $\mathfrak{O}_h^5$.

Aus den Tabellen ist ersichtlich, wie drei vierzählige oder eine vierzählige und eine achtzählige Punktlage manchen kubischen Raumsystemen eigen sind. Es gibt somit schon bei einfacher Periode viele Anordnungsmöglichkeiten für Verbindungen ABB mit vier Molekülen pro Elementarwürfel. Kennen wir ganz allgemein von einer Verbindung die Molekularzusammensetzung und die Anzahl der Moleküle pro Elementarparallelepiped, so lassen sich an Hand der Zähligkeitstabellen sofort mögliche Strukturbilder finden. Sind wir über allfällige innermolekulare Komplexbildung informiert, so wird die Auswahl noch mehr eingeschränkt. Unter Voraussetzung kleiner Perioden lassen sich beispielsweise für so komplexe Verbindungen wie die Alaune sofort einfachste Strukturbilder angeben, die auch mit allen bereits bekannten Abhängigkeitsbeziehungen physikalischer und chemischer Natur im Einklang sind.

Ein Atomkomplex beliebiger Symmetrie kann seinen Schwerpunkt in irgend einer Punktlage haben, deren Symmetriebedingung eine Untergruppe der darauf bezogenen Komplexsymmetrie ist. Ist die Komplexsymmetrie von nicht kristallographischem Charakter (Fünfner-Siebnerring usw.), so ist lediglich die Beibehaltung der Symmetrie bei Deformationen auf keinerlei Art gewährleistet, da niemals alle Punkte des Komplexes einander strukturell gleichwertig sein können. An sich sind somit derartige Ringbildungen im Kristallgebäude nicht ausgeschlossen, ihre Vollsymmetrie kommt nur nicht dem ganzen Teilchenhaufen zu.

Von nichtkubischen Kristallarten seien nur die Modelle von Calcit nach Bragg und Graphit nach Debye-Scherrer etwas näher

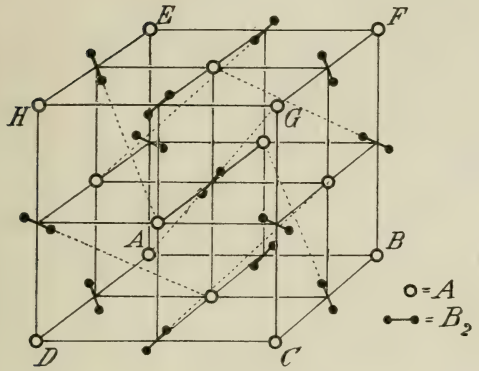


Fig. 180.
Atomverteilung im Elementarwürfel des Typus Pyrit (nach Bragg).
A = Fe; B = S.

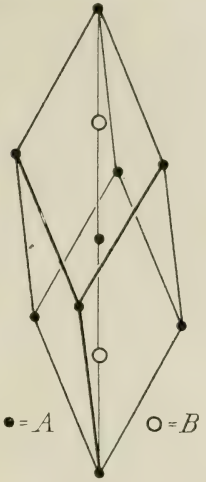


Fig. 182.
Hauptmassenschwerpunktsverteilung im Elementarrhomboeder des Typus Calcit (nach Bragg).

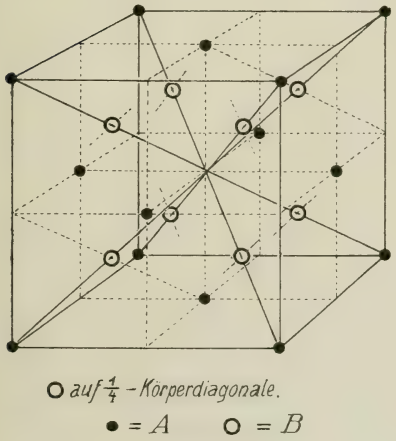


Fig. 181.
Atomverteilung im Elementarwürfel des Typus Flußspat (nach Bragg).
A = Ca; B = F.

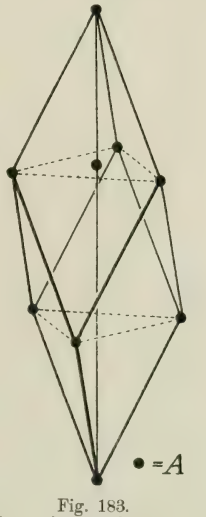


Fig. 183.
Atomschwerpunktsverteilung im Elementarrhomboeder des Typus Graphit (nach Debye-Scherrer).

betrachtet. Chemische Überlegungen machen es wahrscheinlich, daß die Kristallbindungskräfte in $CaCO_3$ von den Schwerpunkten von Ca und CO_3 ausgehen. Sind drei O-Atome von CO_3, wie es die Fig. 162 auf Seite 433 zeigt, auch im Kristallgebäude deutlich je einem C-Atom zugeordnet, so darf die Symmetrie des Komplexschwerpunktes nicht höher als C_3 oder C_{3v} oder D_3 sein. Daß die Translationsgruppe rhomboedrisch ist, geht, wie später gezeigt wird, mit Bestimmtheit aus der Flächenhäufigkeit hervor. Soll die Atomanordnung ditrigonal-skalenoedrische (rhomboedrisch-holoedrische) Symmetrie aufweisen, so stehen der Kristallisation nur die beiden Raumsysteme $\mathfrak{D}_{3d}^5$ und $\mathfrak{D}_{3d}^6$ zur Verfügung. Die niedrigstzähligen Punkte besitzen in $\mathfrak{D}_{3d}^5$ durchweg ein Symmetriezentrum, der Schwerpunkt einer einfachen CO_3-Gruppe könnte also nicht mit ihnen zusammenfallen.

In $\mathfrak{D}_{3d}^6$ sind auf das Elementarrhomboeder bezogen zwei zweizählige Punktlagen vorhanden, eine mit der Symmetrie C_{3i}, die andere mit der Symmetriebedingung D_{3d}. Ist die eine durch Ecken und Innenzentrum des Rhomboeders gegeben, so kommt der anderen die Lage $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ und $[\![\frac{5}{4}\ \frac{5}{4}\ \frac{5}{4}]\!]$ zu. (Siehe Fig. 182). Fällt der Schwerpunkt von CO_3 auf die Punktlage der Symmetrie D_{3d}, so ist eine Zuordnung der Sauerstoffatome zum Kohlenstoffatom, wie sie Fig. 162 zeigt, ohne weiteres gegeben. C und Ca besitzen keinen Freiheitsgrad, O besitzt einen Freiheitsgrad. An Stelle der Spiegelebenen besitzt das Raumsystem Gleitspiegelebenen, so daß die O-Atomschwerpunkte in zwei aufeinanderfolgenden Ebenen CO_3 um 180^0 gegeneinander verdreht sind. Das Elementarrhomboeder ist nun nach den Untersuchungen von Bragg nicht das Spaltungsrhomboeder, sondern auf dieses bezogen $(40\bar{4}1)$ bezw. $(3\bar{1}\bar{1})$. Das kleinste in seinen Eckpunkten mit Massenschwerpunkten versehene Rhomboeder von der Spaltform besitzt in den Flächenzentren gleiche Massen wie an den Ecken; in den Kantenmitten und im Innenzentrum die Schwerpunkte der anderen Baugruppe.

Graphit ließe sich nach den Debye-Scherrerschen Untersuchungen am einfachsten der Raumgruppe $\mathfrak{D}_{3d}^5$ zuordnen. Die C-Atome sind, auf das Elementarrhomboeder bezogen, zweizählig. Sie besitzen einen Freiheitsgrad mit der Symmetriebedingung C_{3v}. Ein Elementarrhomboeder, dessen Eckpunkte mit C-Atomen besetzt sind, besitzt in $[\![\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}]\!]$ ein weiteres C-Atom. (Siehe Fig. 183.) Die C-Atome bilden in der Basisebene Sechserringe, die in je zwei aufeinanderfolgenden Ebenen gegeneinander gedreht sind und erst in der dritten Ebene wieder parallele Lagerung besitzen. Das von Debye betrachtete „Elementarrhomboeder" ist vierfachprimitiv, flächenzentriert, also $\langle 110\rangle$, wenn $\langle 100\rangle$ das richtige einfachste Elementarrhomboeder ist. Es läßt sich direkt mit dem Elementardiamantwürfel vergleichen. Daraus ergibt sich, daß die Umwandlung Diamant —→ Graphit mit einer starken Dilatation

in Richtung einer trigonalen Achse und einer gleichzeitigen Reduktion der Ebenensätze senkrecht dazu verknüpft ist. (Im Diamant liegt ein Teil der C-Atome in $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$, ihre (111)-Ebenen fallen somit mit denen der Ecken und Flächenmitten nicht zusammen.)

4. Allgemeines über Struktur und Massenverteilung, sowie über die Bestimmung der Atomschwerpunktsanordnung

Der dritte Abschnitt dieses Kapitels handelt von der Vieldeutigkeit gewisser Atomschwerpunktsanordnungen und berücksichtigt Erwägungen physikalisch-chemischer Natur. Im vierten Abschnitt sollen die Beziehungen zwischen Massenverteilung und Struktur näher ins Auge gefaßt werden, damit sich daraus die geometrischen Unterlagen der Bestimmung der Atomschwerpunktsanordnung ergeben. Auf die physikalische Seite dieser Untersuchungen wird, dem Charakter des Buches gemäß, nicht eingegangen werden.

Von der Anordnung der Atomkerne, das heißt von der Massenverteilung, müssen schon eine Reihe physikalischer Eigenschaften der kristallisierten Phasen abhängig sein. So wenig daher die Massenverteilung das Gesamtstrukturproblem umfaßt, so wichtig ist eine eingehende Untersuchung über deren Abhängigkeit von der Art des Raumsystemes, den Größen des Elementarparallelepipedes und innerhalb der gleichen Struktur von der Richtung.

Eine bestimmte Atomschwerpunktsanordnung ist gekennzeichnet:

1. Durch das Raumsystem, die Konstanten des Elementarparallelepipedes und die Koordinaten je eines Atomschwerpunktes von jeder gleichwertigen Schar; oder
2. Durch die Art des Elementarparallelepipedes, seine Konstanten und die Koordinaten aller hinsichtlich der Elementartranslationen voneinander unabhängigen Schwerpunktslagen.

Die zweite Art der Darstellung empfiehlt sich besonders bei vieldeutigen Gitterkomplexen, da sie über die Zugehörigkeit zu einem bestimmten Raumsystem nichts aussagt. Ist die Atomanordnung durch 1 oder 2 definiert, so ist man im Besitz aller notwendigen Daten, um die Beziehungen zwischen Massenverteilung besonderer Ebenenlage oder Richtung festzustellen. Die Aufgaben sind rein analytisch-geometrischer Natur, mit der Besonderheit, daß Raumelementscharen in Wirkung treten, wie das im ersten Kapitel eingehend erläutert wurde. Auch ist bei einzelnen Anwendungen zu berücksichtigen, daß unser Koordinatensystem im allgemeinen inhomogen ist, das heißt verschiedene Maßstäbe a, b. c in den drei Achsenrichtungen besitzt. Wir wollen daher zunächst die

Beziehungen zwischen unseren Symbolen und den gewöhnlichen Gleichungen, bezogen auf ein Einheitskoordinatensystem, aufschreiben, so daß die in den Lehrbüchern der analytischen Geometrie des Raumes sich vorfindenden Gleichungen ohne weiteres substituiert werden können. Koordinatenachsenrichtung und Nullpunkt werden beibehalten.

1. Es seien x_1, y_1, z_1 die gewöhnlichen Koordinaten eines Punktes, m_1, n_1, p_1 die auf a, b, c bezogenen Koordinaten.

Dann ist

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \frac{x_1}{a} & x_1 &= a \cdot m_1 \\ n_1 &= \frac{y_1}{b} \quad \text{bezw.} & y_1 &= b \cdot n_1 \\ p_1 &= \frac{z}{c} & z_1 &= c \cdot p_1 \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

2. Die Gleichung einer Geraden laute im gewöhnlichen Koordinatensystem: $y = Rx + r;\ z = Sx + s.$

Sie besitze, auf a, b, c als Einheitsmaßstäbe bezogen, das Symbol $[u\ v\ w]^{BC}$.

Dann ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{v}{u}\frac{b}{a} &= R; \quad Bb = r \\ \frac{w}{u}\frac{c}{a} &= S; \quad Cc = s \end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

3. Die Gleichung einer Ebene laute in gewöhnlichen Koordinaten:

$$Rx + Sy + Tz - Q = 0.$$

Ihr Symbol, bezogen auf a, b, c als Einheitsmaßstäbe sei: $(h\,k\,l)_d$.

Es ist:

$$\left.\frac{h}{a} = R \quad \frac{k}{b} = S \quad \frac{l}{b} = T; \quad Q = d\right\} \qquad (48)$$

Ist die Ebene in der Form $R_1 x + S_1 y + T_1 z - 1 = 0$ gegeben, so ist

$$\left.\frac{h}{a \cdot d} = R_1 \quad \frac{k}{b \cdot d} = S_1 \quad \frac{l}{c \cdot d} = T_1\right\} \qquad (49)$$

Durch a, b, c: α, β, γ des Elementarparallelepipeds ist ein durch die Eckpunkte gegebenes Gitter bestimmt. Jede von dazugehörigen Translationen unabhängige Punktlage bildet ebenfalls kongruente derartige Gitter. Aus irgend einer durch einen Eckpunkt gelegten Ebene schneidet das Elementargitter Parallelogramme heraus. Die jeweilen kleinsten, welche Elementargittereckpunkte als Ecken besitzen, nennen wir Elementarparallelogramme der betreffenden Ebene. Sind a, b, c ein primitives Tripel, so sind diese Parallelogramme die primitiven auf der zugehörigen Ebene, in allen anderen Fällen brauchen sie dies nicht zu sein.

Den Inhalt eines Elementarparallelogrammes der Ebenen (h k l) bezeichnen wir mit $J_{(hkl)}$.

Die analytische Geometrie des Raumes liefert sofort:

$$\begin{aligned} J^2_{(hkl)} = {} & h^2b^2c^2 \sin^2\alpha + k^2a^2c^2 \sin^2\beta + l^2a^2b^2 \sin^2\gamma + 2hkabc^2 \\ & (\cos\alpha \cdot \cos\beta - \cos\gamma) + 2hlab^2c\,(\cos\gamma \cdot \cos\alpha - \cos\beta) + \\ & 2kla^2bc\,(\cos\beta \cdot \cos\gamma - \cos\alpha). \end{aligned} \qquad (50)$$

Sind rechtwinklige Elementarparallelepipede vorhanden, so reduziert sich die Formel auf: $J_{(hkl)}^2 = h^2b^2c^2 + k^2a^2c^2 + l^2a^2b^2$.

Die speziellen Werte für die kubische Abteilung ($a = b = c$), die tetragonale Abteilung ($a = b$), die hexagonale und trigonale Abteilung $\left(a = \frac{b}{\sqrt{3}}\right)$ sind leicht einzusetzen.

In einem monoklinen Elementarparallelepiped lautet die Formel:

$$J_{(hkl)}^2 = h^2b^2c^2 + k^2a^2c^2 \sin^2\beta + l^2a^2b^2 - 2hlab^2c \cos\beta.$$

Im rhomboedrischen Elementarparallelepiped sind $a = b = c$; $\alpha = \beta = \gamma$.

Aus den Formeln erkennt man, daß der Inhalt rasch mit den Indexzahlen der Flächen wächst.

Wir wollen nun wissen, wie viele Atomschwerpunkte von einem Elementarparallelogramm irgend einer Ebene $(hkl)_d$ absorbiert werden. Zu dem Zwecke muß nur untersucht werden, wie viele von den hinsichtlich der Elementarkantentranslationen voneinander unabhängigen („elementar unabhängigen") Punktlagen in die betreffende Identitätsschar von Ebenen fallen, für welche also die Bedingung

$$hm + kn + lp + r - d = 0 \qquad (51)$$

erfüllt ist, wo r irgend eine positive oder negative ganze Zahl einschließlich Null ist (so daß d zum kleinsten positiven echten Bruch wird).

Zwei elementar unabhängige Atomlagen besitzen die Koordinaten

$$[\![m_1\ n_1\ p_1]\!],\ [\![m_2\ n_2\ p_2]\!].$$

Sie liegen in gleichen Ebenen (hkl),

wenn $$h(m_2 - m_1) + k(n_2 - n_1) + l(p_1 - p_2) = r \qquad (52)$$

wo r wiederum irgend eine positive oder negative ganze Zahl einschließlich Null ist.

Sind A_1, A_2, A_3 Atomgewichte oder Ordnungszahlen chemisch verschiedener, elementar unabhängiger Atome, die q_1, q_2, q_3 ... mal von einem Elementarparallelogramm einer Ebene $(hkl)_d$ absorbiert werden, so nennt man

$$\frac{q_1A_1 + q_2A_2 + q_3A_3 + \cdots}{J_{(hkl)}} = L = \text{die Belastung der Ebene.}$$

Sie ist, sofern Ordnungszahlen berücksichtigt werden, gewissermaßen ein Maß für die Elektronenbelastung. Handelt es sich um Ionen, so muß die veränderte Elektronenzahl in diesem Falle berücksichtigt werden.

L ist proportional der Massensumme aller einem Elementarparallelogramm angehörigen Atome und umgekehrt proportional dem Flächeninhalt dieses Parallelogrammes (oder proportional der Summenzahl der positiven Elektronen).

J nimmt mit der Komplexheit der Indizes zu, L also ab, doch besitzt der Ausdruck einen spezifisch von der Struktur abhängigen

Zähler, der nach (51) von m, n, p, h, k, l, d und naturgemäß auch von den Atomgewichten abhängig ist.

Der Abstand zweier paralleler Ebenen $(hkl)_{d_1}$ $(hkl)_{d_2}$ ist nach Formeln der analytischen Geometrie durch:

$$\delta = \frac{(d_2 - d_1)\, a\, b\, c \sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma}}{J_{(hkl)}} \qquad (53)$$

gegeben.

Bekanntermaßen ist $a\,b\,c\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma} = V_{(abc)} =$ dem Rauminhalt des Elementarparallelepipeds; so daß man auch schreiben kann:

$$\delta = \frac{(d_2 - d_1)\ V_{(abc)}}{J_{(hkl)}}. \qquad (54)$$

Parallele Gitterebenen von nur in den Eckpunkten besetzten Elementarparallelepipeden besitzen $d_2 - d_1 =$ irgendeine positive oder negative ganze Zahl, so daß $d_2 - d_1$ zweier nächsten Ebenen $(hkl) = \pm 1$ ist. In diesem Falle ist somit der Abstand zweier nächsten Ebenen umgekehrt proportional dem Inhalt der Elementarparallelogramme auf den Ebenen.

Finden wir für zwei konstitutierende Atomschwerpunktslagen $[\![m_1\ n_1\ p_1]\!]$ $[\![m_2\ n_2\ p_2]\!]$ hinsichtlich der Ebenen (hkl):

$$h\,(m_2 - m_1) + k\,(n_2 - n_1) + l\,(p_1 - p_2) = \Delta, \qquad (55)$$

so besitzen die mit Atomschwerpunkten 1 und 2 besetzten Ebenen (hkl) einen Abstand

$$\delta = \frac{\Delta \cdot V_{(abc)}}{J_{(hkl)}}. \qquad (56)$$

Indem man die kürzesten Abstände aller Massenebenen der elementar voneinander unabhängigen Punktlagen konstruiert, erhält man das Bild einer elementaren Massenebenenserie. Es entspricht der elementaren Periode des unendlich ausgedehnten Ebenenkomplexes. Die innerhalb einer Periode auftretenden Massenebenen nennen wir Zwischenebenen, die Gesamtzahl der Massenebenen einer elementaren Serie wird Serienzahl genannt.

a. Beispiele, wie L und δ bei gegebener, einfacher Massenverteilung von den Indizes der Flächen abhängig sind

L und δ sind außerordentlich wichtige Größen nicht nur für die Strukturbestimmung mittels Röntgenstrahlen, sondern auch für alle mit der Massenverteilung im Zusammenhang stehenden vektoriellen Eigenschaften. Zweifellos werden beispielsweise zu einem großen Teil Spaltbarkeit und gewöhnliche Flächenbegrenzung durch sie bedingt. Es empfiehlt sich daher, vor der allgemeinen theoretischen Untersuchung die Abhängigkeit der L- und δ-Werte von den Indizes (hkl) für einige einfache Strukturannahmen zifferngemäß zu verfolgen.

I. Der nur in den Eckpunkten besetzte Würfel.

a = Kantenlänge des Würfels = 1. Gleichwertige Ebenenscharen besitzen naturgemäß gleiche Folgen von L und δ. Einen gleichwertigen Komplex bezeichnen wir mit ⟨hkl⟩. A sei das Atomgewicht der einzig vorhandenen Massenteilchen. Es ist $J_{(hkl)} = \sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$; $\delta = \frac{1}{J_{(hkl)}}$. Einige einfache Flächenformen werden in der Reihenfolge ihrer Belastung hingeschrieben.

Angaben auf drei Stellen nach dem Komma.

⟨100⟩ L = 1 A — 1 A — 1 A — . . .
δ = 1 1

⟨110⟩ L = 0,707 A — 0,707 A — 0,707 A
δ = 0,707 0,707

⟨111⟩ L = 0,577 A — 0,577 A — 0,577 A
δ = 0,577 0,577

⟨201⟩ L = 0,447 A — 0,447 A — 0,447 A
δ = 0,447 0,447

⟨211⟩ L = 0,408 A — 0,408 A — 0,408 A
δ = 0,408 0,408

⟨221⟩ L = 0,333 A — 0,333 A — 0,333 A
δ = 0,333 0,333

⟨301⟩ L = 0,316 A — 0,316 A — 0,316 A
δ = 0,316 0,316

⟨311⟩ L = 0,302 A — 0,302 A — 0,302 A
δ = 0,302 0,302

⟨302⟩ L = 0,277 A — 0,277 A — 0,277 A
δ = 0,277 0,277

⟨321⟩ L = ca. 0,268 A — 0,268 A — 0,268 A
δ = ca. 0,268 0,268

⟨401⟩ L = ca. 0,243 A — 0,243 A — 0,243 A
δ = ca. 0,243 0,243

⟨322⟩ L = ca. 0,243 A — 0,243 A — 0,243 A
δ = ca. 0,243 0,243

⟨411⟩ L = ca. 0,236 A — 0,236 A — 0,236 A
δ = ca. 0,236 0,236

⟨331⟩ L = ca. 0,229 A — 0,229 A — 0,229 A
δ = ca. 0,229 0,229

II. Der innenzentrierte Würfel. Außer an den Eckpunkten findet sich auch in den Würfelmitten je ein Atom A.

Die zwei konstitutierenden Punktlagen sind $[\![0\,0\,0]\!]$ und $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$. Aus $\frac{1}{2}h + \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}l + r = d$ ersieht man, daß beiderlei Schwerpunkte in den gleichen Ebenen liegen, L also doppelt so groß wird, wenn die Summe der Indizes der Ebenen irgend eine gerade Zahl ist. δ ist dann gleich wie im vorhergehenden Fall. Ist die Summe der Indizes eine ungerade Zahl, so entstehen halbierende Zwischenebenen mit einfacherer L. Das kürzeste δ ist dann halb so groß wie unter I.

Infolgedessen ändert sich die Reihenfolge der Ebenen wie folgt:

⟨110⟩ L = 1,414 A — 1,414 A — 1,414 A . .
δ = 0,707 0,707

⟨100⟩ L = 1 A — 1 A — 1 A . . .
δ = 0,5 0,5

⟨211⟩ L = 0,816 A — 0,816 A — 0,816 A . .
δ = 0,408 0,408

⟨301⟩ L = 0,632 A — 0,632 A — 0,632 A . .
δ = 0,316 0,316

⟨111⟩ L = 0,577 A — 0,577 A — 0,577 A
δ = 0,289 0,289

⟨321⟩ L = ca. 0,536 A — 0,536 A — 0,536 A
δ = ca. 0,268 0,268

⟨411⟩ L = ca. 0,472 A — 0,472 A — 0,472 A
δ = ca. 0,236 0,236

⟨201⟩ L = 0,447 A — 0,447 A — 0,447 A
δ = 0,223 0,223

⟨501⟩ L = ca. 0,392 A — 0,392 A — 0,392 A
δ = ca. 0,196 0,196

⟨221⟩ L = 0,333 A — 0,333 A — 0,333 A
δ = 0,167 0,167

⟨311⟩ L = 0,302 A — 0,302 A — 0,302 A
δ = 0,151 0,251

⟨302⟩ L = ca. 0,277 A — 0,277 A — 0,277 A
δ = ca. 0,138 0,138

⟨401⟩ L = ca. 0,243 A — 0,243 A — 0,243 A
δ = ca. 0,122 0,122

Nach Debye und Scherrer soll Wolfram in dieser Weise kristallisieren.

III. Der flächenzentrierte Würfel. Außer in den Eckpunkten finden sich in allen Flächenmitten des Elementarwürfels Atome A. Die konstituierenden Punktlagen sind somit: $[\![0\ 0\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]\!]$.

Aus den Gleichungen:
$$\tfrac{1}{2}h + \tfrac{1}{2}k + r = d$$
$$\tfrac{1}{2}h + \tfrac{1}{2}l + r = d$$
$$\tfrac{1}{2}k + \tfrac{1}{2}l + r = d$$

ersieht man, daß die Belastungen bei normalen Ebenenabständen viermal so groß werden, wenn alle Indizes der Ebene ungerade sind. [Null gilt als gerader Index.] Einer von den Indizes ist, gemäß der Voraussetzung über fehlende gemeinsame ganzzahlige Teiler, immer ungerade, so daß die übrigen Ebenen bei doppelter Belastung nur halbe δ-Werte besitzen. Einige chemische Elemente kristallisieren nach Bragg in flächenzentrierten Würfeln, z. B. Cu, Ag, Au, Pb; ferner Al (nach Scherrer).

⟨111⟩	L:	2,309 A	— 2,309 A — 2,309 A
	δ:		0,577 0,577
⟨100⟩	L:	2,00 A	— 2,00 A — 2,00 A
	δ:		0,500 0,500
⟨110⟩	L:	1,414 A	— 1,414 A — 1,415 A
	δ:		0,356 0,356
⟨311⟩	L:	1,206 A	— 1,206 A — 1,206 A
	δ:		0,302 0,302
⟨331⟩	L:	ca. 0,916 A	— 0,916 A — 0,916 A
	δ:	ca.	0,229 0,229
⟨201⟩	L:	0,894 A	— 0,894 A — 0,894 A
	δ:		0,223 0,223
⟨211⟩	L:	0,817 A	— 0,817 A — 0,817 A
	δ:		0,204 0,204
⟨511⟩	L:	0,769 A	— 0,769 A — 0,769 A
	δ:		0,192 0,192
⟨532⟩	L:	0,676 A	— 0,676 A — 0,676 A
	δ:		0,169 0,169
⟨221⟩	L:	0,667 A	— 0,667 A — 0,667 A
	δ:		0,167 0,167
⟨301⟩	L:	0,632 A	— 0,632 A — 0,632 A
	δ:		0,158 0,158

In nicht kubischen Elementarparallelepipeden sind Belastung und Massenabstände noch von a, b, c eventuell von α, β, γ abhängig. Eine fingierte Berechnung hat daher wenig Zweck, hingegen sollen noch einige Werte aus der Zone der c-Achse eines rhombischen Kristalles mit genau hexagonalem Achsenverhältnis und Basiszentrierung des Elementarparallelepipeds mitgeteilt werden. Das Elementarparallelepiped ist somit orthohexegonal, doch wollen wir die längere Kante $b = a\sqrt{3}$ zu [0 1 0] machen. $a = 1$. Die konstituierenden Punktlagen sind: $[\![0\ 0\ 0]\!]$ und $[\![\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0]\!]$.

Aus der Bedingung: $\tfrac{1}{2}h + \tfrac{1}{2}k + r = d$

folgt, daß doppelte Belastung bei normalem δ auftritt, wenn die Summe $h + k$ eine gerade Zahl ist. δ zweiter Ordnung (d. h. halbe Elementarabstände) mit einfacher Belastung aller Ebenen, sind an $h + k =$ ungerade Zahl geknüpft. Für Ebenen der Zone parallel c wird $L = \frac{q\,A}{c\sqrt{3h^2 + k^2}}$. Die zugehörigen hexagonalen Formen findet man nach den Formeln auf Seite 225, es haben lediglich h_1 und k_1 ihre Werte vertauscht, weil wir das Elementarparallelepiped quer aufstellen.

⟨110⟩ ⟨010⟩	L·c:	1,00 A	— 1,00 A — 1,00 A	hexagonal ⟨10$\bar{1}$0⟩
	δ:		0,866 0,866	
⟨100⟩ ⟨130⟩	L·c:	0,577 A	— 0,577 A — 0,577 A	hexagonal ⟨11$\bar{2}$0⟩
	δ:		0,5 0,5	
⟨120⟩ ⟨310⟩ ⟨150⟩	L·c:	0,378 A	— 0,378 A — 0,378 A	hexagonal ⟨12$\bar{3}$0⟩
	δ:		0,327 0,327	

$\left.\begin{matrix}\langle 210\rangle\\ \langle 350\rangle\\ \langle 170\rangle\end{matrix}\right\}$ L·c: 0,277 A — 0,277 A — 0,277 A
δ: 0,240 0,240 } hexagonal $\langle 1\bar{3}\bar{4}0\rangle$

Bei komplizierteren Strukturen, insbesondere auch bei Anwesenheit mehrerer Atomarten A, B, C, wird es meistens größere Perioden von Ebenensätzen mit ungleichen L und δ geben. Die Verhältnisse sind mit der Ausgangslage der Atome außerordentlich variabel. Von besonderem Interesse sind einige scheinbar sehr häufige, noch relativ einfache Typen.

IV. Typus Kochsalz. Kubisches Elementarparallelepiped.

Konstitutierende Atome: A: $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$
B: $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,0]\!]$

a = Würfelkantenlänge = 1. Für A gelten die für den einfachen flächenzentrierten Würfel abgeleiteten Gesetzmäßigkeiten, ebenso für B, doch sind die auf A bezogenen, halbierenden Zwischenebenen in bezug auf B Nullebenen. Eine Belastung von 2 A + 2 B gleichzeitig ist den Elementarparallelogrammen derjenigen Ebenen eigen, deren Indizes nicht lauter ungerade Zahlen sind. Es treten halbe Elementarabstände auf. Sind alle Indizes ungerade, so bestehen die Ebenensätze aus Ebenen mit lauter A-Atomen (4 pro Parallelogramm) und aus Ebenen mit lauter B-Atomen. Die Reihenfolge der Ebenen ist jetzt nicht mehr so eindeutig bestimmt wie in den früheren Fällen, sie hängt von den relativen Atomgewichtsbeziehungen A und B ab, auch gehen L und δ nicht immer parallel. Am besten empfiehlt sich ein Ordnen der Ebenen ungefähr nach den Produkten $\frac{L_1 + L_2}{2} \cdot \delta_{(1-2)}$ (mittlere Belastung × Abstand nächstliegender Massenebenen).

$\langle 100\rangle$ L: 2 (A + B) — 2 (A + B) — 2 (A + B)
δ: 0,5 0,5

$\langle 110\rangle$ L: 1,414 (A + B) — 1,414 (A + B) — 1,414 (A + B)
δ: 0,353 0,353

$\langle 111\rangle$ L: 2,309 A — 2,309 B — 2,309 A
δ: 0,289 0,289

$\langle 201\rangle$ L: 0,894 (A + B) — 0,894 (A + B) — 0,894 (A + B)
δ: 0,224 0,224

$\langle 211\rangle$ L: 0,817 (A + B) — 0,817 (A + B) — 0,817 (A + B)
δ: 0,204 0,204

$\langle 221\rangle$ L: 0,667 (A + B) — 0,667 (A + B) — 0,667 (A + B)
δ: 0,167 0,167

$\langle 301\rangle$ L: 0,632 (A + B) — 0,632 (A + B) — 0,632 (A + B)
δ: 0,158 0,158

$\langle 311\rangle$ L: 1,206 A — 1,206 B — 1,206 A
δ: 0,151 0,151

$\langle 302\rangle$ L: 0,555 (A + B) — 0,555 (A + B) — 0,555 (A + B)
δ: 0,139 0,139

Siehe auch Fig. 184.

Unter anderem sollen nach Bragg: Kochsalz, Sylvin, Bleiglanz nach diesem Typus gebaut sein. $\langle 100\rangle$ mit größter mittlerer Belastung und größtem δ ist bei Kochsalz, Sylvin, Bleiglanz Spaltfläche. Es ist bei Kochsalz usw. auch die gewöhnlichste Wachstumsform. $\langle 111\rangle$ tritt als Form geringsten Wachstums in harnstoffhaltigen Lösungen

auf, die auf die Dissoziation einwirken. Parallel (111) folgen Na-Ebenen auf Cl-Ebenen. Ein Zusammenhang läßt sich vermuten.

V. Typus Zinkblende. Kubisches Elementarparallelepiped.

Konstitutierende Atome: A: $[\![0\,0\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0]\!]$ $[\![\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}]\!]$ $[\![0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$

B: $[\![\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}]\!]$ $[\![\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$ $[\![\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}]\!]$

Würfelkantenlänge $a = 1$. Ist die Summe $h + k + l =$ eine gerade Zahl, so fallen die B-Atome in die Ebenen der A-Atome, sonst liegen sie in gesonderten Ebenen. Im ganzen lassen sich in diesem Typus dreierlei prinzipiell verschiedene parallele Ebenensätze konstatieren:

1. Summe der Indizes = eine gerade Zahl. Dann folgen in gleichen Abständen Ebenen aufeinander, die sowohl A wie B enthalten. Hinsichtlich des Würfels sind die Abstände halbelementar.

2. Summe der Indizes = eine ungerade Zahl; es kommen aber gerade Indizes (einschließlich 0) darin vor. In gleichen Abständen folgen sich Ebenen A, dann Ebenen B usw. Die Abstände sind der vierte Teil der aus den Würfelkanten berechneten Elementarabstände.

3. Alle Indizes sind ungerade. Es folgen Ebenen mit lauter A auf Ebenen mit lauter B in zwei verschiedenen Abständen, die sich zueinander verhalten wie 3 zu 1. Die kürzesten Abstände sind ebenfalls $\frac{1}{4}$ der Elementarabstände.

Die Anordnung ist, wenn A und B verschieden sind, hemimorph hemiedrisch. Doch dürfen die Zeichen ⟨hkl⟩ holoedrisch aufgefaßt werden, da sich positive und negative Flächenformen nur in der Nullpunktslagenverschiebung der Flächenperioden voneinander unterscheiden, und auch dann nur, wenn h, k, l ungerade sind.

⟨111⟩ L: 2,309 A — 2,309 B — 2,309 A — 2,309 B
δ: 0,433 0,144 0,433

⟨110⟩ L: 1,414 (A+B) — 1,414 (A+B) — 1,414 (A+B)
δ: 0,353 0,353

⟨100⟩ L: 2 A — 2 B — 2 A — 2 B
δ: 0,25 0,25 0,25

⟨211⟩ L: 0,817 (A+B) — 0,817 (A+B) — 0,817 (A+B)
δ: 0,204 0,204

⟨301⟩ L: 0,632 (A+B) — 0,632 (A+B) — 0,632 (A+B)
δ: 0,158 0,158

⟨311⟩ L: 1,206 A — 1,206 B — 1,206 A — 1,206 B
δ: 0,075 0,226 0,075

Ferner erhalten wir für:

⟨201⟩ L: 0,894 A — 0,894 B — 0,894 A — 0,894 B
δ: 0,112 0,112 0,112

⟨221⟩ L: 0,667 A — 0,667 B — 0,667 A — 0,667 B
δ: 0,083 0,083 0,083

(Siehe Fig. 185).

Hinsichtlich L und δ zeigen zwei Ebenen Höchstwerte. Einerseits (110) mit durchschnittlich höchstem δ, anderseits (111) mit einem sehr hohen δ und einem kleinen δ bei großer Belastung. Unterschiede müssen sich ergeben, je nachdem, ob die Atomgewichte von A und B einander gleich oder sehr verschieden sind und ob die Hauptbindungen mehr in der einen oder anderen Ebene liegen. Für Zinkblende ist (110) Spaltfläche, für Diamant (mit A = B) (111). Die Spaltfläche ist ebenfalls (111) für die trigonal ähnlich gebauten Bi_2 und As_2, wo A wieder = B ist.

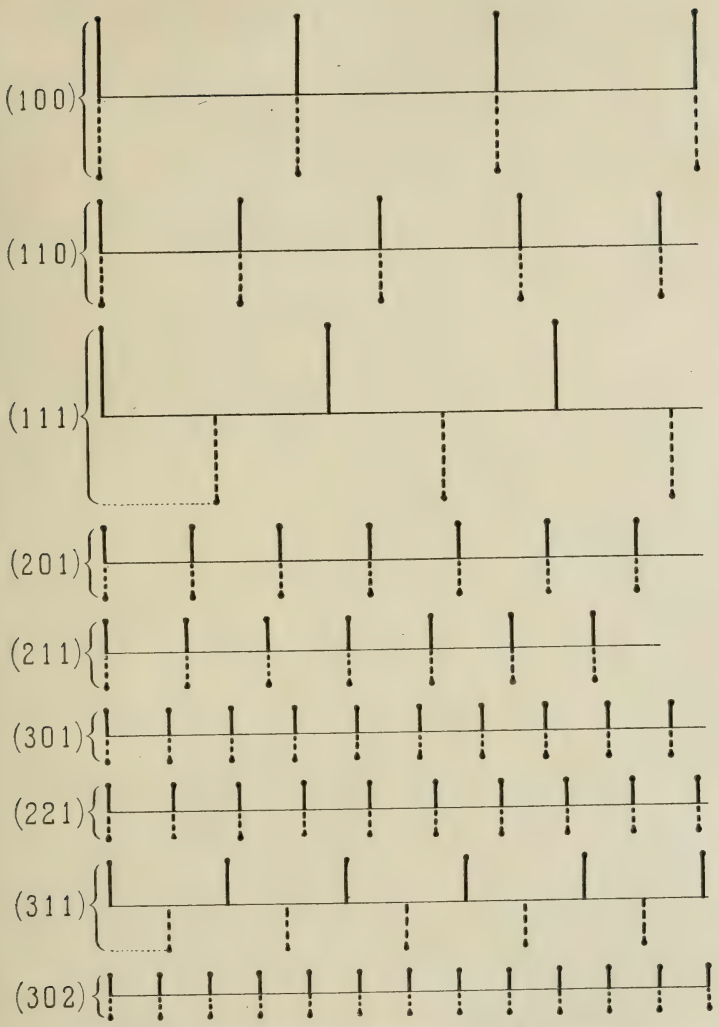


Fig. 184. Ebenenabstand und Belastung im Typus Kochsalz.
Die Ordinaten entsprechen den Belastungen (Atomgewicht von A gleich dem von B genommen), die Abzissen den Abständen. Links steht jeweilen das Symbol der Ebene. Ununterbrochene Ordinaten beziehen sich auf A-Atome, gestrichelte auf B-Atome.

VI. Als Beispiel komplizierter Strukturen mit längeren und sehr verschiedenartigen Perioden der Ebenensätze sei ein Typus AB_2 gewählt, wie er nach den Untersuchungen der Herren Bragg im Pyrit verwirklicht ist.

Kubisches Elementarparallelepiped mit a = 1.

Die konstitutierenden Punkte besitzen folgende Lage:

$$A = [\![0\,0\,0]\!]\ [\![\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,0]\!]\ [\![\tfrac{1}{2}\,0\,\tfrac{1}{2}]\!]\ [\![0\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}]\!]$$

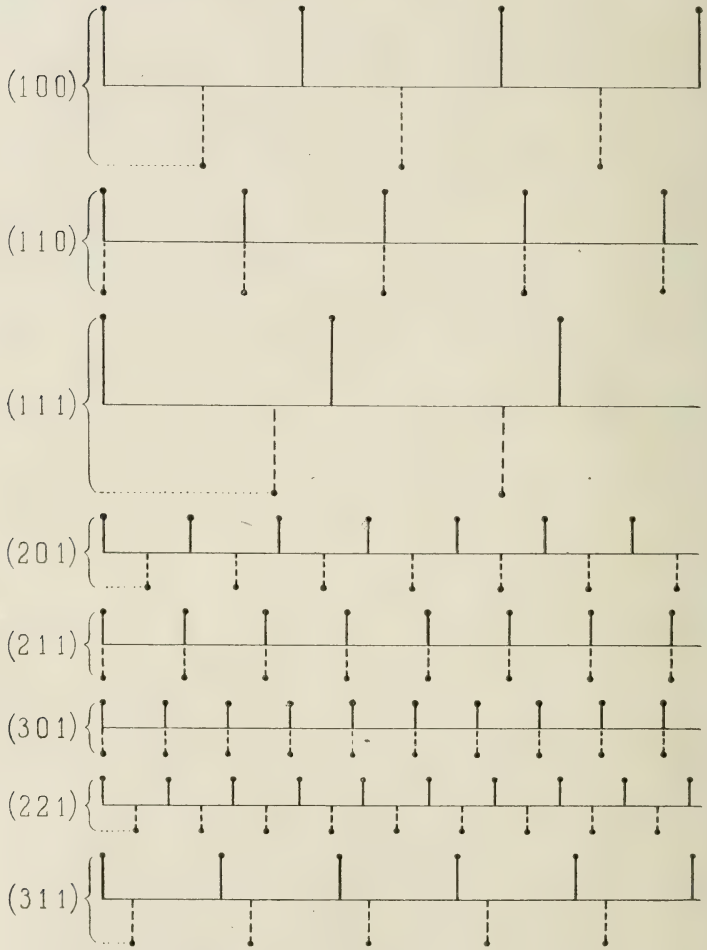


Fig. 185. Ebenenabstand und Belastung im Typus Zinkblende.
Analoge Darstellung wie Fig. 184.

$$B = [\![\tfrac{1}{2}-x,\ \tfrac{1}{2}-x,\ \tfrac{1}{2}-x]\!]\ [\![\tfrac{1}{2}+x,\ \tfrac{1}{2}+x,\ \tfrac{1}{2}+x]\!]$$
$$[\![x,\ \tfrac{1}{2}-x,\ 1-x]\!]\ [\![x,\ 1-x,\ \tfrac{1}{2}+x]\!]\ [\![\tfrac{1}{2}-x,\ 1-x,\ x]\!]$$
$$[\![\tfrac{1}{2}+x,\ x,\ 1-x]\!]\ [\![1-x,\ x,\ \tfrac{1}{2}-x]\!]\ [\![1-x,\ \tfrac{1}{2}+x,\ x]\!]$$

x wird in ungefährer Übereinstimmung mit Pyrit zu $\frac{1}{10}$ angenommen. Die Anordnung ist paramorph hemiedrisch, die Flächenkomplexe beziehen sich darauf. Die Angaben sind auf die zweite Stelle nach dem Komma aufgerundet. (Siehe Fig. 186).

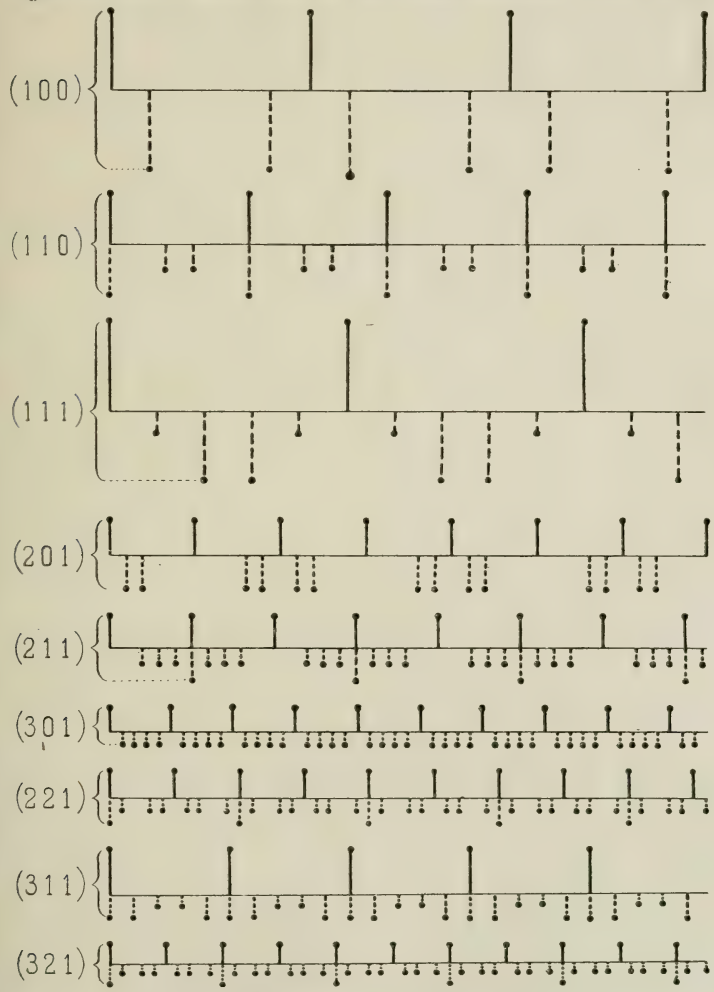


Fig. 186. Ebenenabstand und Belastung im Typus Pyrit.
Analoge Darstellung wie Fig. 184.

⟨100⟩ L: 2A — 2B — 2B — 2A — 2B — 2B — 2A
δ: 0,1 0,3 0,1 0,1 0,3 0,1

⟨111⟩ L: 2,31A — 0,58B — 1,73B — 1,73B — 0,58B — 2,31A
δ: 0,12 0,12 0,12 0,12 0,12

⟨110⟩ L: 1,41(A+B) — 0,71B — 0,71B — 1,41(A+B) — 0,71B — 0,71B — 1,41(A+B)
δ: 0,14 0,07 0,14 0,14 0,07 0,14

⟨201⟩ L: 0,89A — 0,89B — 0,89B — 0,89A — 0,89B — 0,89B — 0,89A
δ: 0,04 0,04 0,13 0,13 0,04 0,04

⟨311⟩ L: 0,60(2A+B) — 0,60B — 0,30B — 0,30B — 0,60B — 0,60(2A+B)
δ: 0,06 0,06 0,06 0,06 0,06

⟨211⟩ L: 0,82A — 0,41B — 0,41B — 0,41B — 0,82A — 0,41B — 0,41B — 0,41B — 0,82A
δ: 0,08 0,04 0,04 0,04 0,04 0,04 0,04 0,04 0,08

⟨221⟩ L: 0,67A+B — 0,33B — 0,33B — 0,33B — 0,67A — 0,33B — 0,33B — 0,33B — 0,67(A+B)
δ: 0,03 0,07 0,03 0,03 0,03 0,03 0,07 0,03

⟨321⟩ L: 0,53(A+B) — 0,27B — 0,27B — 0,27B — 0,53A — 0,27B — 0,27B — 0,27B — 0,53(A+B)
δ: 0,03 0,05 0,03 0,03 0,03 0,03 0,05 0,03

⟨301⟩ L: 0,63A — 0,32B — 0,32B — 0,32B — 0,32B — 0,63A — 0,32B — . . .
δ: 0,03 0,03 0,03 0,03 0,03 0,03

Die Berechnung ist für die gleichen Flächen wie früher durchgeführt. Nun ist aber ein wichtiger neuer Umstand zu erwähnen. Im Typus Kochsalz und im Typus Zinkblende gelten die abgeleiteten L und δ für irgendeine Fläche der holoedrisch aufgefaßten Form ⟨hkl⟩. Im Typus Zinkblende vertauscht sich beispielsweise von (111) zu $(1\bar{1}1)$ nur die Reihenfolge der verschiedenwertigen δ hinsichtlich der Nullage. Die Periodizität ist dieselbe. Man findet an natürlichen Kristallen auch beiderlei Tetraeder.

Anders ist es im Typus Pyrit für die hemiedrischen Formen. Man erhält zum Exempel für

⟨210⟩ L: 0,89A — 0,45B — 0,45B — 0,45B — 0,45B — 0,89A + . . .
δ: 0,04 0,04 0,04 0,04 0,04

Positive und negative Formen ein und desselben spezialisierten Raumsystemes verhalten sich somit verschieden.

In bezug auf L und δ vor allen anderen Flächen ausgezeichnet ist der Würfel ⟨100⟩.

VII. Als Rechnungsbeispiel bei rhomboedrischem Elementarparallelepiped seien einige Flächen des Typus Graphit (nach C. Debye und P. Scherrer) untereinander verglichen. Es ist $a = b = c$. $\alpha = \beta = \gamma$.

a sei = 1 gesetzt. Dann heißen die Gleichungen:

$$J_{hkl} = \sqrt{(h^2 + k^2 + l^2)\sin^2\alpha + 2(hk + hl + kl)(\cos^2\alpha - \cos\alpha)}$$

$$\delta = \frac{\sqrt{1 + 2\cos^2\alpha - 3\cos^2\alpha}}{J_{(hkl)}}$$

Wird in hexagonaler Auffassung das Achsenverhältnis als c-Wert angegeben, so findet man den Winkel α für das Einheitsrhomboeder.

$$\cos\alpha = \frac{2c^2 - 3}{2c^2 + 6}$$

α ist der Winkel zwischen den Rhomboederkanten, daraus berechnet sich der Winkel zwischen den Rhomboederflächen an der Endecke:

$$\cos\rho = \frac{-\cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

Das elementarste Achsenverhältnis leitet sich nach den Debye-Scherrerschen Versuchen zu 1 : 4,06 ab.

α des Elementarrhomboeders ist 39° 45′.

Die konstituierenden Punktlagen sind: $[\![0\ 0\ 0]\!]$ $[\![\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{5}]\!]$, beide mit gleichen Atomen A besetzt.

Daraus berechnen sich:

$\langle 111 \rangle$ hexagonale Koordinaten: $\langle 0001 \rangle$	L:	4,998 A	4,998 A	4,998 A — 4,998 A
	δ:	0,92	0,92	0,92
$\langle 10\bar{1} \rangle$ hexagonale Koordinaten: $\langle 11\bar{2}1 \rangle$	L:	1,845 A	1,845 A	1,845 A — 1,845 A
	δ:	0,34	0,34	0,34
$\langle 100 \rangle$ hexagonale Koordinaten: $\langle 10\bar{1}1 \rangle$	L:	1,565 A	1,565 A	1,565 A — 1,565 A
	δ:	0,19	0,38	0,19
$\langle 110 \rangle$ hexagonale Koordinaten: $\langle 01\bar{1}2 \rangle$	L:	1,471 A	1,471 A	1,471 A — 1,471 A
	δ:	0,37	0,18	0,37
$\langle 11\bar{1} \rangle$ hexagonale Koordinaten: $\langle 02\bar{2}1 \rangle$	L:	1,145 A	1,145 A	1,145 A — 1,145 A
	δ:	0,14	0,28	0,14

$\langle 111 \rangle$ ist eine ganz außerordentlich hervortretende Ebene mit sehr großer relativer Belastung und großem δ. Die ausgezeichnete Spaltbarkeit verläuft parallel zu ihr.

Aus allen Beispielen geht hervor, daß im großen und ganzen Belastung und Massenebenenabstand sehr rasch mit wachsenden Indizes abnehmen. Doch ist die spezielle Reihenfolge stets durch die besondere Atomanordnung bedingt. Nun ist als kristallographische Regel bekannt, daß die häufigsten, im größeren Maße begrenzenden, natürlichen Kristallflächen sich in relativ kleinen Indizes ausdrücken lassen, wenn man drei von ihnen zu Koordinatenebenen macht, deren Schnittkanten von einer vierten in den Einheitsabständen geschnitten werden. Bravais hatte dies mit Belastung und Ebenenabstand in Beziehung gebracht und es liegt kein Grund vor, diesen Zusammenhang zu leugnen. Die stark belasteten (gesättigten) und relativ weit voneinander abstehenden Massenebenen werden im allgemeinen eine geringere Wachstumsgeschwindigkeit aufweisen als die schwach belasteten mit kleinerem δ. Entsprechend einem verschiedenen chemischen Verhalten in verschiedenen Richtungen hängen aber diese Wachstumsgeschwindigkeiten auch von der Konstitution der Lösung ab und bedingen so im Wechselspiel mit Temperatur und Druck die verschiedenen Lokaltrachten der Mineralien. Die strukturelle Bedeutung muß daher mehr oder weniger die Statistik zu Rate ziehen. Ein weites Feld der Forschung hat sich hier aufgetan. Nach gesammelter Erfahrung wird man umgekehrt, wie das im großen bereits seit langem mit Erfolg von den französischen Kristallographen versucht worden ist, die Gesetzmäßigkeiten zur genauen Strukturbestimmung benutzen können. Jetzt schon läßt sich in dieser Beziehung viel tun und manche scheinbar unverständlichen Abweichungen, die

Friedel und andere Forscher gefunden haben, erhalten bei Berücksichtigung aller 230 Raumsysteme ihre zwanglose Erklärung. Bravais' weitere Hypothese, daß Spaltflächen durch große Belastung und relativ große Ebenenabstände gekennzeichnet sind, scheint sich ebenfalls zu bewahrheiten. Es mögen dafür noch weitere Ursachen, die in der Atomschwerpunktsanordnung vielleicht gar nicht zum Ausdruck kommen, vorhanden sein, eines der wichtigsten Momente wird aber die Massenverteilung und Bindung sein. Hinsichtlich dieser beiden Faktoren scheinen mir folgende Annahmen plausibel zu sein. Zunächst sind relativ große L- und δ-Werte für eine gute Spaltbarkeit Vorbedingung. Außerdem wird es zwischen den Baugruppen eines Kristallgebäudes (beispielsweise zwischen Fe und S_2 im Pyrit, zwischen Ca und CO_3 im Calcit, zwischen Na und Cl im Kochsalz, zwischen Zn und S in der Zinkblende, zwischen Bi_2 und Bi_2 in Wismut, zwischen ? C_2 und C_2 in Diamant) Hauptbindungsrichtungen, entsprechend den kürzesten Abständen der Baugruppenschwerpunkte, geben. Die Hauptspaltbarkeit wird sich dann parallel derjenigen Ebene vorfinden, in denen derartige Hauptbindungen enthalten sind, so daß durch eine zwischengelegte Ebene möglichst wenige zerrissen werden. Innere Komplexbindungen sollten durch eine gute und glatte Spaltebene nicht zerrissen werden müssen. Es wird also in den Ebenserien guter Spaltflächen einen extrakomplexaren Zwischenraum geben müssen, durch den die Spaltung ermöglicht wird. Neuerdings sind ganz andere in der Massenverteilung und Bindung nicht zum Ausdruck kommende Faktoren für die Spaltbarkeit verantwortlich gemacht worden. Ohne eine Mitwirkung derartiger Erscheinungen bestreiten zu wollen, erachte ich es doch für näher liegend, zunächst an möglichst vielen Beispielen Erwägungen, wie sie soeben mitgeteilt wurden, zu prüfen, umsomehr, als die Behauptung der Notwendigkeit einer Einführung anderer Faktoren auf einer irrtümlichen Auffassung beruht. Gerade die an das Spaltbarkeitsphänomen anschließende Diskussion zeigt, wie wichtig es ist, die Massenverteilung richtig zu beurteilen.

b. Über die Größen L und δ bei allgemeinster Lage des Massenkomplexes

Wir wollen daher, um den Einfluß spezieller Punktlagen und spezieller Raumsymmetrie systematisch zu betrachten, das Problem der Ebenenbelastungen und Ebenenserien noch von einem allgemeinen Gesichtspunkte aus diskutieren. Betrachten wir zunächst Raumsysteme, deren Koordinatentripel gleichwertiger Punkte keine Zusatztranslationen enthalten. Jede isomorphe Schar von Symmetrieelementen besitzt dann Spiegelebenen bezw. Drehungsachsen. $\mathfrak{D}_h^1$ ist ein solches Raumsystem. Die 48 Koordinatenwerte eines gleichwertigen Punktkomplexes allgemeinster Lage lauten:

$[\![m\,n\,p]\!]$ $[\![m\,\bar{n}\,\bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}\,n\,\bar{p}]\!]$ $[\![\bar{m}\,\bar{n}\,p]\!]$ $[\![p\,m\,n]\!]$ $[\![\bar{p}\,m\,\bar{n}]\!]$ $[\![\bar{p}\,\bar{m}\,n]\!]$ $[\![p\,\bar{m}\,\bar{n}]\!]$
$[\![n\,p\,m]\!]$ $[\![\bar{n}\,\bar{p}\,m]\!]$ $[\![n\,\bar{p}\,\bar{m}]\!]$ $[\![\bar{n}\,p\,\bar{m}]\!]$ $[\![\bar{m}\,\bar{n}\,p]\!]$ $[\![\bar{m}\,n\,p]\!]$ $[\![m\,\bar{n}\,p]\!]$ $[\![m\,n\,\bar{p}]\!]$
$[\![\bar{p}\,\bar{m}\,\bar{n}]\!]$ $[\![p\,\bar{m}\,n]\!]$ $[\![p\,m\,\bar{n}]\!]$ $[\![\bar{p}\,m\,n]\!]$ $[\![\bar{n}\,\bar{p}\,\bar{m}]\!]$ $[\![n\,p\,\bar{m}]\!]$ $[\![\bar{n}\,p\,m]\!]$ $[\![n\,\bar{p}\,m]\!]$
$[\![n\,m\,p]\!]$ $[\![\bar{n}\,\bar{m}\,p]\!]$ $[\![n\,\bar{m}\,\bar{p}]\!]$ $[\![\bar{n}\,m\,\bar{p}]\!]$ $[\![m\,p\,n]\!]$ $[\![m\,\bar{p}\,\bar{n}]\!]$ $[\![\bar{m}\,\bar{p}\,n]\!]$ $[\![\bar{m}\,p\,\bar{n}]\!]$
$[\![p\,n\,m]\!]$ $[\![\bar{p}\,\bar{n}\,m]\!]$ $[\![\bar{p}\,n\,\bar{m}]\!]$ $[\![p\,\bar{n}\,\bar{m}]\!]$ $[\![\bar{n}\,\bar{m}\,\bar{p}]\!]$ $[\![n\,\bar{m}\,p]\!]$ $[\![\bar{n}\,m\,\bar{p}]\!]$ $[\![n\,m\,p]\!]$
$[\![\bar{m}\,\bar{p}\,\bar{n}]\!]$ $[\![\bar{m}\,p\,n]\!]$ $[\![m\,\bar{p}\,n]\!]$ $[\![\bar{m}\,p\,\bar{n}]\!]$ $[\![\bar{p}\,\bar{n}\,m]\!]$ $[\![p\,n\,\bar{m}]\!]$ $[\![p\,\bar{n}\,m]\!]$ $[\![\bar{p}\,n\,m]\!]$

Die δ berechnen sich für eine Ebenenparallelserie (hkl) allgemein zu:

$$\delta = \frac{(d_2 - d_1)\ a\,b\,c\sqrt{1 + 2\cos\alpha\ \cos\beta\ \cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma}}{J_{(hkl)}}$$

$a\,b\,c\sqrt{1 + 2\cos\alpha\ \cos\beta\ \cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma}$ ist für eine bestimmte Kristallart und eine bestimmte Ebenenserie eine Konstante $\left(\text{kubisch stets} = \frac{a^3}{J_{(hkl)}}\right)$. Die Zahl verschiedener δ, also die Zahl der Zwischenebenen einer elementaren Periode, wird somit durch die Zahl verschiedener $(d_2 - d_1)$ bestimmt. Bezeichnen wir willkürlich die Ebene, welche durch den Punkt $[\![m\,n\,p]\!]$ geht, als Nullebene, so wird (siehe Formel 55)

$$\Delta_1 = (d_1 - d_0) = h(m_1 - m) + k(n_1 - n) + l(p_1 - p)$$

wo $[\![m_1\,n_1\,p_1]\!]$ irgend ein zu $[\![m\,n\,p]\!]$ gleichwertiger Punkt ist. Indem man alle gleichwertigen Punkte in die Formel einsetzt, und den Abstand von der Nullebene durch $(dn - do) = \Delta_n$ als den variablen Faktor charakterisiert, erhält man eine Reihe von Δ_1, Δ_2 . . . . . Δ_n.

So lange sich diese verschiedenen Δ nicht nur um addierte ganze Zahlen voneinander unterscheiden, entsprechen sie verschiedenen Zwischenebenen. Sind $[\![m\,n\,p]\!]$ beliebig und (hkl) beliebig, so wird man im allgemeinen so viele nichtidentische Ebenen einer Parallelserie erhalten, als einander gleichwertige Punkte vorhanden sind (maximale Zähligkeit einer allgemeinen Punktlage).

Im kubisch-holoedrischen Raumsystem $\mathfrak{O}_h^1$, also im allgemeinen 48. Die Δ-Werte sind für diese Raumgruppe die folgende:

0: $2nk + 2pl$; $2mh + 2pl$; $2mh + 2nk$

$(m - p)\,h + (n - m)\,k + (p - n)\,l$; $(m + p)\,h + (n - m)\,k + (p + n)\,l$;
$(m + p)\,h + (n + m)\,k + (p - n)\,l$; $(m - p)\,h + (n + m)\,k + (p + n)\,l$

$(m - n)\,h + (n - p)\,k + (p - m)\,l$; $(m + n)\,h + (n + p)\,k + (p - m)\,l$;
$(m - n)\,h + (n + p)\,k + (p + m)\,l$; $(m + n)\,h + (n - p)\,k + (p + m)\,l$

$2mh + 2nk + 2pl$; $2mh$; $2nk$; $2pl$

$(m + p)\,h + (m + n)\,k + (p + n)\,l$; $(m - p)\,h + (n + m)\,k + (p - n)\,l$;
$(m - p)\,h + (n - m)\,k + (p + n)\,l$; $(m + p)\,h + (n - m)\,k + (p - n)\,l$

$(m + n)\,h + (n + p)\,k + (p + m)\,l$; $(m - n)\,h + (n - p)\,k + (p + m)\,l$;
$(m + n)\,h + (n - p)\,k + (p - m)\,l$; $(m - n)\,h + (n + p)\,k + (p - m)\,l$

$(m-n)\ h+(n-m)\ k;\ (m+n)\ h+(n-m)\ k+2\,p\,l;$
$(m-n)\ h+(n+m)\ k+2\,p\,l;\ (m+n)\ h+(n+m)\ k$
$(n-p)\ k+(p-n)\ l;\ (n+p)\ k+(p+n)\ l;$
$2\,m\,h+(n+p)\ k+(p-n)\ l;\ 2\,m\,h+(n-p)\ k+(p+n)\ l$
$(m-p)\ h+(p-m)\ l;\ (m+p)\ h+2\,n\,k+(p-m)\ l;$
$(m+p)\ h+(p+m)\ l;\ (m-p)\ h+2\,n\,k+(p+m)\ l$
$(m+n)\ h+(n+m)\ k+2\,p\,l;\ (m-n)\ h+(n+m)\ k;$
$(m+n)\ h+(n-m)\ k;\ (m-n)\ h+(n-m)\ k+2\,p\,l$
$2\,m\,h+(n+p)\ k+(p+n)\ l;\ 2\,m\,h+(n-p)\ k+(p-n)\ l;$
$(n-p)\ k+(p+n)\ l;\ (n+p)\ k+(p-n)\ l$
$(m+p)\ h+2\,n\,k+(p+m)\ l;\ (m-p)\ h+(p+m)\ l;$
$(m-p)\ h+2\,n\,k+(p-m)\ l;\ (m+p)\ h+(p-m)\ l$

Jedes Elementarparallelogramm einer der 48 Ebenen ist dann mit einem Punkt der gleichwertigen Schar besetzt und die Abstände der Ebenen lassen sich aus den 48 Δ-Werten berechnen. Wir spezialisieren nun (hkl) und finden für (100) beispielsweise eine Reduktion auf 6 nichtidentische Punktebenen, von denen jede elementar mit 8 Punkten besetzt ist. Die Δ-Werte für (100) reduzieren sich auf folgende verschiedenartige:

$$0;\ 2\,m,\ m-p,\ m+p,\ m-n,\ m+n$$

Von der Serie (111) enthält jede Ebene 6 gleichwertige Punkte $[\![m\,n\,p]\!]$. 8 nichtidentische Ebenen einer Serie sind mit gleichwertigen Punkten besetzt. Die Δ-Werte für (111) ergeben sich zu:

$$0,\ 2n+2p,\ 2m+2p,\ 2m+2n,\ 2m+2n+2p,\ 2m,\ 2n,\ 2p.$$

Ein Elementarparallelogramm der Rhombendodekaederfläche (110) absorbiert 4 gleichwertige Punkte, so daß die Serie aus 12 nichtidentischen Ebenen mit folgenden Δ-Werten besteht:

$$0,\ 2n,\ 2m,\ 2m+2n,\ n-p,\ n+p,\ 2m+n+p,\ 2m+n-p,$$
$$m-p,\ m+2n+p,\ m+p,\ m+2n-p.$$

Der allgemeine Satz lautet:

Von einem gleichwertigen Punktkomplex $[\![m\,n\,p]\!]$ allgemeinster Lage werden von dem Elementarparallelogramm einer Ebene (hkl) so viele Punkte absorbiert, als, auf die äußere Flächensymmetrie bezogen, eine allgemeine Lage vielzählig ist, sofern das Elementarparallelepiped einfach primitiv und alle Symmetrieelemente im Diskontinuum durch Spiegelebenen und Drehungsachsen (bezw. Drehspiegelachsen) vertreten sind. Ist ν diese aufs Kontinuum bezogene Zähligkeit für eine bestimmte Ebene, so ist die Zahl nichtidentischer Ebenen der elementaren Serie $= \frac{\mu}{\nu}$ wo μ die Maximalzähligkeit einer Punktlage im Elementarparallelepiped ist.

Der Satz ist leicht verständlich. Die Flächensymmetrie wird durch die auf der Ebene senkrecht stehenden Symmetrieelemente bestimmt;

durch sie wird natürlich ein Punkt auf der Ebene in neue gleichwertige, komplanare Punkte übergeführt.

Sind jedoch die Symmetrieoperationen lediglich Gleitspiegelungen und Schraubenbewegungen, so wird das im allgemeinen nicht der Fall sein. Hingegen können dann bei bestimmten Werten von (h k l) die von den Zusatztranslationen gebildeten Glieder der Δ-Werte ganzzahlig werden, so daß sich wiederum eine Serienreduktion einstellt. Es sei beispielsweise $(0\,1\,0)_0$ Symmetrieebene. Gleichwertige Punkte sind dann bei der Spiegelung $[\![m\ n\ p]\!]$ $[\![m\ \bar{n}\ p]\!]$ oder bei Gleitspiegelung mit der Gleitkomponente in der a-Richtung $[\![m\ n\ p]\!]$ $[\![m + \frac{1}{2}, \bar{n}, p]\!]$. Im ersteren Falle absorbiert eine Ebene (h 0 l) beide zusammengehörigen Punkte, im zweiten Falle nur dann, wenn h eine gerade ganze Zahl ist, denn unter diesen Umständen allein wird $\Delta = \frac{1}{2}h =$ eine ganze Zahl, die zugehörige Ebene mit der Nullebene ident. Ist h von (h 0 l) ungerade, so wird die Periode von einer zweiten Ebene halbiert; jedes Elementarparallelogramm absorbiert nur einen Punkt. Ist schließlich die auf einer Ebene senkrecht stehende Symmetrieachse nur Schraubenachse, so finden sich die Zwischenebenen in den durch die Schraubungskomponenten bestimmten Abständen. Die Symmetrieoperation verursacht keine Serienreduktion mehr. Eine Reduktion der Ebenenserien senkrecht zu Gleitspiegelebenen und Schraubenachsen findet somit nur statt, wenn die Summe der Produkte aller auf die Gleitung oder Schraubung bezüglichen Zusatztranslationen mit ihren entsprechenden Indizes eine ganze Zahl wird.

Da aber, wo die Zahl der Zwischenebenen gegenüber der Zahl einer nicht auf der Gleitspiegelebene senkrecht stehenden Ebenenserie in der Elementarperiode unverändert bleibt, nehmen wir etwas anderes wahr. Es sei h ungerade. Für ein derartiges (h 0 l) werden nun im obigen Beispiel die Δ-Werte zu 0 und $\frac{1}{2}h$, also, da h eine ganze Zahl ist, zu 0 und $\frac{1}{2}$. Ist eine zweite Punktlage $[\![m_1\ n_1\ p_1]\!]$ gegeben, so werden auf die erste bezogen die Δ-Werte zu $h(m_1 - m) + l(p_1 - p)$ und zu $h(m_1 - m) + l(p_1 - p) + \frac{1}{2}h$. Bezeichnen wir den einzig von m_1 und p_1 abhängigen Ausdruck $h(m_1 - m) + l(p_1 - p)$ mit x_1, so werden die Δ-Werte zu x_1 und $x_1 + \frac{1}{2}$. Für einen dritten und vierten Punkt würden sie zu x_2 und $x_2 + \frac{1}{2}$, bezw. x_3 und $x_3 + \frac{1}{2}$ usw. Hinsichtlich der Belastungen wiederholen sich somit die Ebenenperioden bereits nach der Hälfte der Elementarperioden. Auf jede Massenebene folgt im halben Elementarperiodenabstand eine gleich belastete Massenebene, lediglich mit spiegelbildlicher Stellung der Massenteilchen. Hinsichtlich aller derjenigen Erscheinungen, für die Stellungsverschiedenheiten der Teilchen keine Rolle spielen, die also nur von der Periodizität der Massenebenenbelastungen

abhängig sind, hat sich somit die Periode gegenüber der Elementarperiode verkleinert. Wir wollen diese Perioden Belastungsperioden oder, da sie sehr wahrscheinlich für die röntgenometrischen Effekte allein von Bedeutung sind, Röntgenperioden nennen.

Was hier für Gleitspiegelebenen gezeigt wurde, gilt mutatis mutandis auch für Schraubenachsen. Das Raumsystem C_4^2 besitzt beispielsweise die Koordinatentripel: $[\![m, n, p]\!]$ $[\![n, \bar{m}, p + \frac{3}{4}]\!]$ $[\![\bar{m}, \bar{n}, p + \frac{1}{2}]\!]$ $[\![\bar{n}, m, p + \frac{1}{4}]\!]$. Die Δ-Werte für (001) sind: $0, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$. Die Elementarserie besteht aus vier einpunktigen Massenebenen, wie bei einer schief zur Achse stehenden Ebenenserie. Aber die Belastungsperiode oder Röntgenperiode ist ein Viertel der Elementarperiode geworden, immer finden wir in $\Delta + \frac{c}{4}$, $\Delta + \frac{c}{2}$, $\Delta + \frac{3c}{4}$ gleich belastete Ebenen (001).

Findet somit senkrecht zu Gleitspiegelebenen oder Schraubenachsen eine Reduktion der Ebenenserie der Elementarperiode nicht statt, so wird die Belastungs- oder Röntgenperiode ein Bruchteil der Elementarperiode.

Schließlich ist der Einfluß komplexerer Translationsgruppen, das heißt mehrfach primitiver Elementarparallelepipede, zu untersuchen. Die Elementarzähligkeit gleichwertiger Punkte ist dann, der auf nichtelementare Translationen bezüglichen Zusatzkomponenten wegen, ein Vielfaches der gewöhnlichen Indizeskombination. Infolgedessen erhöht sich im allgemeinen auch die Zahl der Zwischenebenen auf Elementarperioden bezogen (nicht primitive Perioden!). Eine Erhöhung findet stets dann nicht statt, wenn die Summe derjenigen Flächenindizes, die sich auf Achsenrichtungen beziehen, denen Zusatzkomponenten entsprechen, durch den Nenner des Zusatzkomponentenbruches ganzzahlig teilbar sind. Dementsprechend vervielfacht sich aber die Belastung für derartige Ebenen. Die Erhöhung der Zahl der Zwischenebenen findet nur hinsichtlich der elementaren Periode statt. Entsprechend verkleinert sich auch hier die Belastungsperiode oder Röntgenperiode. Sie ist unter diesen Umständen gleich der primitiven Periode.

Beispiele: Ist das Elementarparallelepiped innenzentriert, so sind die Zusatzkomponenten $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$. Serienreduktion auf die Zahl für einfach primitives Elementarparallelepiped, und Verdoppelung der Belastung, findet für diejenigen Ebenen statt, deren $\frac{h + k + l}{2}$ ganzzahlig ist. Ist $\frac{h + k + l}{2}$ nicht ganzzahlig, so ist die Belastungsperiode die Hälfte der Elementarperiode. Ist die Basisfläche des Elementarparallelepipeds

zentriert $\left(\text{Zusatzkomponenten } \frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, so sind durch halbe Seriengröße und doppelte Belastung die Ebenen ausgezeichnet, für die $\frac{h+k}{2}$ eine ganze Zahl (einschließlich stets Null) ist. Analoge Sätze gelten für die Zentrierung eines anderen Seitenflächenpaares. Sind alle sechs Seitenflächen des Elementarparallelepipeds zentriert, so sind die Zusatzkomponenten $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}; \frac{a}{2}, \frac{c}{2}; \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$. Ist die Summe irgend zweier Indizes der Fläche durch 2 ganzzahlig teilbar, so sind die Ebenenelementarparallelogramme viermal so stark belastet als bei einfachem Parallelepiped (h, k, l sind dann einzeln ungerade). Es sind auch elementar nur soviel Zwischenebenen vorhanden, als ob das Parallelepiped einfachprimitiv wäre. In jedem anderen Falle ist wenigstens die Summe zweier Indizes durch 2 teilbar, die Serien sind doppelt so groß wie bei einfachprimitivem Elementarparallelepiped, die Belastung ist ebenfalls doppelt so stark. Fig. 59 auf Seite 115 zeigt den Zusammenhang zwischen einfach hexagonaler Translationsgruppe und rhomboedrischer Translationsgruppe, bezogen auf ein Parallelepiped mit drei Bravais'schen Achsen als Kanten. Die Achse a_3 findet sich als überzählig nicht vor. Die Zusatzkomponenten des rhomboedrischen Gitters sind dann: $\frac{2\,a_1}{3}$, $\frac{a_2}{3}, \frac{c}{3}$ und $\frac{a_1}{3}, \frac{2\,a_2}{3}, \frac{2\,c}{3}$ oder bei anderer Aufstellung $\frac{2\,a_1}{3}, \frac{a_2}{3}, \frac{2c}{3}$ und $\frac{a_1}{3}, \frac{2\,a_2}{3}, \frac{c}{3}$. Alle diejenigen Ebenen schief zur Hauptachse sind daher durch stärkere Belastung und geringere Serienzahl ausgezeichnet, für welche, bezogen auf das Symbol $(h\,k\,\bar{i}\,l)$, die Werte $2h+k+l$ und $h+2k+2l$ oder $2h+k+2l$ und $h+2k+l$ durch drei ganzzahlig teilbar sind. Den vier Bedingungen entsprechen die zwei vereinfachten Bedingungen: $k+l-h$ oder $h+l-k$ durch drei ganzzahlig teilbar, beziehungsweise Null. Dadurch unterscheidet sich das rhomboedrische Raumgitter scharf vom hexagonalen. Bei letzterem sind diejenigen Ebenen, deren Indizes die oben hingeschriebenen Bedingungen erfüllen, vor den anderen Ebenen in keiner Weise ausgezeichnet. Wir nennen diese Bedingungen kurz die Rhomboederbedingungen. Ist daher bei gegebener Größe des Elementarparallelepipeds ein einziger gleichwertiger Komplex von Massenteilchen allgemeinster Lage vorhanden, so sind Ebenenbelastung und Zahl der Zwischenebenen zunächst abhängig von der Art der Translationsgruppe und der Art des Raumsystems. Der Einfluß dieser Faktoren auf eine bestimmte Ebene oder auf Ebenen einer Zone ist stets berechenbar.

Haupttabelle X. Belastungen und Ebenenserien in Punktkomplex

Raumgruppe	(100)	(111)	(110)	(hk0)
$\mathfrak{T}^1$	6 zu 2	4 zu 3	12 zu 1	12 zu 1
$\mathfrak{T}^2$	12 zu 4	4 zu 12	24 zu 2	24 zu 2
$\mathfrak{T}^3$	12 zu 2	8 zu 3	12 zu 2	Je nachdem,
$\mathfrak{T}^4$	12 zu 1	4 zu 3	12 zu 1	12 zu 1
$\mathfrak{T}^5$	12 zu 2	8 zu 3	12 zu 2	Je nachdem,
$\mathfrak{T}_h^1$	6 zu 4	8 zu 3	12 zu 2	12 zu 2
$\mathfrak{T}_h^2$	12 zu 2	8 zu 3	12 zu 2	12 zu 2, wenn beide Indizes h, k ungerade, 24 zu 1, wenn einer gerade
$\mathfrak{T}_h^3$	12 zu 8	8 zu 12	24 zu 4	24 zu 4
$\mathfrak{T}_h^4$	24 zu 4	8 zu 12	24 zu 4	24 zu 4, wenn beide Indizes h, k ungerade, 48 zu 2, wenn einer gerade
$\mathfrak{T}_h^5$	12 zu 4	16 zu 3	12 zu 4	12 zu 4, wenn beide Indizes h, k ungerade, 24 zu 2, wenn einer gerade
$\mathfrak{T}_h^6$	12 zu 2	8 zu 3	24 zu 1	12 zu 2, wenn h gerade, 24 zu 1 in den anderen Fällen
$\mathfrak{T}_h^7$	12 zu 4	16 zu 3	24 zu 2	24 zu 2
$\mathfrak{T}_d^1$	6 zu 4	4 zu 6	12 zu 2	24 zu 1
$\mathfrak{T}_d^2$	12 zu 8	4 zu 24	24 zu 4	48 zu 2
$\mathfrak{T}_d^3$	12 zu 4	8 zu 6	12 zu 4	24 zu 2, wenn beide Indizes h, k ungerade, 48 zu 1, wenn einer gerade
$\mathfrak{T}_d^4$	12 zu 2	8 zu 3	12 zu 2	24 zu 1
$\mathfrak{T}_d^5$	12 zu 8	8 zu 12	24 zu 4	48 zu 2
$\mathfrak{T}_d^6$	24 zu 2	16 zu 3	24 zu 2	24 zu 2, Summe d. Indizes gerade, 48 zu 1, Summe der Indizes ungerade

den kubischen Raumsystemen für einen gleichwertigen allgemeinster Lage

(hhl)	(kkh)	(hkl)
12 zu 1	12 zu 1	12 zu 1
Je nachdem, ob alle Indizes ungerade oder nicht 12 zu 4 oder 24 zu 2		
ob Summe der Indizes gerade oder ungerade 12 zu 2 oder 24 zu 1		
12 zu 1	12 zu 1	12 zu 1
ob Summe der Indizes gerade oder nicht 12 zu 2 oder 24 zu 1		
24 zu 1	24 zu 1	24 zu 1
24 zu 1	24 zu 1	24 zu 1
Je nachdem, ob alle Indizes ungerade oder nicht 24 zu 4 oder 48 zu 2		
Je nachdem, ob alle Indizes ungerade oder nicht 24 zu 4 oder 48 zu 2		
Je nachdem, ob Summe der Indizes gerade oder nicht 24 zu 2 oder 48 zu 1		
24 zu 1	24 zu 1	24 zu 1
Je nachdem, ob Summe der Indizes gerade oder nicht 24 zu 2 oder 48 zu 1		
12 zu 2	12 zu 2	24 zu 1
Je nachdem, ob alle Indizes ungerade oder nicht 12 zu 8 oder 24 zu 4		Je nachdem, ob alle Indizes ungerade oder nicht 24 zu 4 oder 48 zu 2
Je nachdem, ob Summe der Indizes gerade oder nicht 12 zu 4 oder 24 zu 2		Je nachdem, ob Summe der Indizes gerade oder nicht 24 zu 2 oder 48 zu 1
Je nachdem, ob Summe der Indizes gerade oder nicht 12 zu 2 oder 24 zu 1		24 zu 1
24 zu 4	24 zu 4	Wenn alle Indizes ungerade, 24 zu 4, sonst 48 zu 2
Summe der Indizes gerade und durch 4 teilbar: 12 zu 4 Summe der Indizes gerade, durch 4 nicht teilbar: 24 zu 2 Summe der Indizes ungerade . . . . . 48 zu 1		Je nachdem, ob Summe der Indizes gerade oder nicht 24 zu 2 oder 48 zu 1

Haupttabelle X

Raumgruppe	(100)	(111)	(110)	(hk0)
$\mathfrak{D}^1$	6 zu 4	8 zu 3	12 zu 2	24 zu 1
$\mathfrak{D}^2$	12 zu 2	8 zu 3	12 zu 2	24 zu 1
$\mathfrak{D}^3$	12 zu 8	8 zu 12	24 zu 4	48 zu 2
$\mathfrak{D}^4$	24 zu 4	8 zu 12	24 zu 4	48 zu 2
$\mathfrak{D}^5$	12 zu 4	16 zu 3	12 zu 4	Je nachdem,
$\mathfrak{D}^6$ $\mathfrak{D}^7$	24 zu 1	8 zu 3	12 zu 2	24 zu 1
$\mathfrak{D}^8$	24 zu 2	16 zu 3	12 zu 4	Je nachdem,
$\mathfrak{D}_h^1$	6 zu 8	8 zu 6	12 zu 4	24 zu 2
$\mathfrak{D}_h^2$	12 zu 4	16 zu 3	12 zu 4	24 zu 2, wenn beide Indizes h, k ungerade, 48 zu 1, wenn einer gerade
$\mathfrak{D}_h^3$	12 zu 4	16 zu 3	12 zu 4	24 zu 2
$\mathfrak{D}_h^4$	12 zu 4	8 zu 6	12 zu 4	24 zu 2, wenn beide Indizes h, k ungerade, 48 zu 1, wenn einer gerade
$\mathfrak{D}_h^5$	12 zu 16	8 zu 24	24 zu 8	48 zu 4
$\mathfrak{D}_h^6$	12 zu 16	16 zu 12	24 zu 8	48 zu 4
$\mathfrak{D}_h^7$	24 zu 8	8 zu 24	24 zu 8	48 zu 4, wenn beide Indizes h, k ungerade, 96 zu 2, wenn einer gerade
$\mathfrak{D}_h^8$	24 zu 8	16 zu 12	24 zu 8	48 zu 4, wenn beide Indizes h, k ungerade, 96 zu 2, wenn einer gerade
$\mathfrak{D}_h^9$	12 zu 8	16 zu 6	12 zu 8	Je nachdem,
$\mathfrak{D}_h^{10}$	24 zu 4	32 zu 3	24 zu 4	48 zu 2

(Fortsetzung)

(h h l)	(k k h)	(h k l)
24 zu 1	24 zu 1	24 zu 1
24 zu 1	24 zu 1	24 zu 1
Je nachdem, ob alle Indizes ungerade oder nicht 24 zu 4 oder 48 zu 2		
Je nachdem, ob alle Indizes ungerade oder nicht 24 zu 4 oder 48 zu 2		
ob Summe der Indizes gerade oder nicht 24 zu 2 oder 48 zu 1		
24 zu 1	24 zu 1	24 zu 1
ob Summe der Indizes gerade oder nicht 24 zu 2 oder 48 zu 1		
24 zu 2	24 zu 2	48 zu 1
Je nachdem, ob Summe der Indizes gerade oder nicht 24 zu 2 oder 48 zu 1		48 zu 1
Je nachdem, ob Summe der Indizes gerade oder nicht 24 zu 2 oder 48 zu 1		48 zu 1
24 zu 2	24 zu 2	48 zu 1
Je nachdem, ob alle Indizes ungerade oder nicht 24 zu 8 oder 48 zu 4		Je nachdem, ob alle Indizes ungerade oder nicht 48 zu 4 oder 96 zu 2
48 zu 4	48 zu 4	Je nachdem, ob alle Indizes ungerade oder nicht 48 zu 4 oder 96 zu 2
Je nachdem, ob alle Indizes ungerade oder nicht 24 zu 8 oder 48 zu 4		Je nachdem, ob alle Indizes ungerade oder nicht 48 zu 4 oder 96 zu 2
48 zu 4	48 zu 4	Je nachdem, ob alle Indizes ungerade oder nicht 48 zu 4 oder 96 zu 2
ob Summe der Indizes gerade oder nicht 24 zu 4 oder 48 zu 2		Je nachdem, ob Summe der Indizes gerade oder nicht 48 zu 2 oder 96 zu 1
Summe der Indizes gerade und durch 4 teilbar: 24 zu 4 Summe der Indizes gerade, aber durch 4 nicht teilbar . . . . . 48 zu 2 Summe der Indizes ungerade . . . 96 zu 1		Je nachdem, ob Summe der Indizes gerade oder nicht 48 zu 2 oder 96 zu 1

Eindeutig bestimmt ist das Verhältnis der drei Elementarabstände in der kubischen Abteilung. Wir können daher eine für alle kubischen Kristalle gültige Tabelle sofort aufstellen. Die Diskussion dieser Tabelle wird uns zeigen, in welch ausgedehnter Weise sich die Kristallographie des Diskontinuums noch entwickeln läßt. (Siehe Tabelle X.)

Es ist eine so allgemeine Punktlage vorausgesetzt, daß spezielle geometrische Koinzidenzen mit keiner einfachen Ebene auftreten. Für jedes Raumsystem ist angegeben, wie viele Zwischenebenen eine elementare Periode der Ebenen (100), (111), (110), (hk0), (hhl), (hkh), (hkl) enthält, und mit wie vielen gleichwertigen Punkten ein Elementarparallelogramm besetzt ist. So bedeutet beispielsweise 6 zu 2 unter (100) von $\mathfrak{T}^1$ 6 Zwischenebenen mit je 2 gleichwertigen Punkten pro Elementarparallelogramm. Die Tabelle zeigt, wie jedes Raumsystem auch hinsichtlich der Ebenenbelastung und Größe der Ebenenserien seine individuellen Merkmale besitzt. Diese können dazu dienen, kristallographisch-geometrisch das wahrscheinlichste Raumsystem einer gegebenen Kristallart zu bestimmen. Dabei wird man sich zunächst auf die Häufigkeiten der Kristallflächen beziehen, indem man das Bravais'sche Gesetz als gültig annimmt. Durch die ausgedehnten Untersuchungen französischer Kristallographen hat sich herausgestellt, daß im großen und ganzen jede Kristallart hinsichtlich der Reihenfolge der wichtigsten Flächen auf ein bestimmtes Elementarparallelepiped zurückgeführt werden kann. Doch sind häufig sehr konstante und gesetzmäßige Abweichungen vorgefunden worden. Diese als Abweichungen registrierten Merkmale werden zu einem großen Teil darauf beruhen, daß, in Anlehnung an den Bravais'schen Standpunkt, von diesen Forschern nur die symmorphen Raumsysteme (ohne selbständige Gleitspiegeloperationen und Schraubenbewegungen) berücksichtigt wurden. Findet man daher Abweichungen, die gesetzmäßig in einem der anderen Raumsysteme auftreten müssen, so liegt der Schluß nahe, daß sie durch das Vorhandensein dieser speziellen Symmetrieoperationen bedingt sind. Beispiele will ich erst erwähnen, nachdem noch ein anderer Einfluß auf Ebenenbelastung und Serienzahl berücksichtigt worden ist. Auf eine allgemeine Erscheinung möchte ich aber doch hier schon hinweisen. Jedem Kristallographen ist bekannt, daß von den Hemiedrien der kubischen Abteilung die der Tetraedrie und Tetartoedrie (hemimorphe und tetartoedrische Klasse) weit häufiger bereits in den natürlichen Kristallformen zum Ausdruck kommen als etwa die der paramorphen Hemiedrie (z. B. Alaun) und der plagiedrischen Hemiedrie (z. B. Sylvin).

Das beruht darauf, daß in den erstgenannten Hemiedrien Vier- und Zwölflächner mit relativ geringer Seriengröße, also großer zu erwartender Häufigkeit des Auftretens, bereits die hemiedrische Entwick-

lung zeigen, während es in den anderen Abteilungen erst 12- bezw. 24-Flächner sind, die das tun. Die Vier-Flächner der erstgenannten Hemiedrien sind noch dadurch ausgezeichnet, daß sie auf trigonalen Achsen senkrecht stehen, die in allen Raumsystemen als Drehungsachsen auftreten müssen. Deshalb ist das Tetraeder in allen diesbezüglichen Raumgruppen eine wichtige Fläche. Daß die auf Symmetrieelementen senkrecht stehenden Flächen wichtig sind, ist wohlbekannt. Treten einmal solche Flächen nicht in der normalen Reihenfolge für eine der möglichen Translationsgruppen auf, so ist es das Nächstliegende, anzunehmen, daß Gleitspiegelebenen, beziehungsweise Schraubenachsen vorhanden sind. Sind umgekehrt gewisse Flächen außer ihrer normalen Reihe für eine Kristallart hochbedeutsam, so ist nicht ausgeschlossen, daß darin bereits ein spezieller Strukturtypus zum Ausdruck kommt. Beispielsweise ist unter den regulär holoedrischen Raumsystemen $\mathfrak{O}_h^{10}$ dadurch ausgezeichnet, daß (211) nicht mehr Zwischenebenen besitzt als die Hauptformen (100) und (110), bedeutend weniger als (111). (211) muß dann eine der wichtigsten Flächenformen werden. Oder unter den paramorph hemiedrischen Raumsystemen der kubischen Abteilung sind nur in $\mathfrak{T}_h^1$, $\mathfrak{T}_h^3$, $\mathfrak{T}_h^7$ die Pentagondodekaederfolgen normal. In drei Raumsystemen $\mathfrak{T}_h^2$, $\mathfrak{T}_h^4$, $\mathfrak{T}_h^5$ sind diejenigen Pentagondodekaeder durch geringere Seriengröße und stärkere Ebenenbelastung ausgezeichnet, für welche h und k ungerade sind. Einzig in $\mathfrak{T}_h^6$ ist das Umgekehrte der Fall, hier einzig rangiert (210) sehr nahe (110). (Siehe Tabelle X.)

c. Benutzung der gefundenen Abhängigkeitsbeziehungen zur Raumsystemsbestimmung

Alle diese Beziehungen zwischen Belastung, Massenebenenabstand, Serienzahl und Charakter des Raumsystemes erhalten nun dadurch eine ganz außerordentliche Bedeutung, daß sie die wesentlich maßgebenden Größen sind, welche die von M. v. Laue, W. H. und W. L. Bragg und P. Debye gefundenen Effekte bei der Durchstrahlung von Kristallen mit Röntgenlicht bedingen. Da sie für fast alle Raumsysteme einer gegebenen Symmetrieklasse verschieden sind, muß es bei Anwesenheit eines relativ schweren Atomes in allgemeinster Lage möglich sein, auch auf diese Weise das Raumsystem einer gegebenen Kristallart und Kristallklasse zu bestimmen. Dabei möge von solchen innerhalb der Fehlergrenzen der Bestimmung liegenden verschiedenartigen Deutungen, wie sie im dritten Abschnitt bei der Besprechung der Kochsalzstruktur diskutiert wurden, abgesehen werden; es werden also nur die aus den Experimenten folgenden einfachsten Deutungen berücksichtigt[1]).

[1]) Auf die physikalischen Grundlagen dieser Bestimmungsmethoden soll hier nicht eingegangen werden, da aber das Problem der Kristallstrukturen erst durch sie aktuelle

Da bis jetzt an den von Röntgenstrahlen an Kristallen hervorgerufenen Interferenzerscheinungen nichts wahrgenommen werden konnte, das als Einfluß der Atomsymmetrie oder Atomstellung zu deuten wäre, ist die wirksame Röntgenperiode (R) durch die periodische Wiederkehr gleichbelasteter Ebenenserien gegeben, gleichgültig, ob in den eine Periode bedingenden Ebenen die Atome parallele Stellung besitzen oder nicht. Die Röntgenperiode kann daher unter Umständen ein Teil der Identitätsperiode oder der aus den Kanten des Elementarparallelepipeds berechneten Elementarperiode sein. Naturgemäß kann sie niemals größer sein. Die bei gegebener Röntgenperiode R einer Ebenenserie ansprechenden Wellenlängen der Röntgenstrahlen sind durch die Formel

$$n\lambda = 2\,R\,\sin\alpha \qquad (56a)$$

gegeben, wo α den Neigungswinkel der einfallenden Strahlen zur Ebene darstellt, n die Werte von 1, 2, 3, 4, 5 . . . . . n annehmen kann. Ist $n = 1$, so spricht man von Wellenlängen 1. Ordnung, bei $n = 2$ von 2. Ordnung und bei $n = n$ von n^{ter} Ordnung. Kennt man die

Bedeutung erlangt hat, mag folgende Anmerkung manchen Lesern erwünscht sein. Die Wellennatur einer Strahlung wird in der Physik durch die Beugungs- und Interferenzerscheinungen an Gittern bewiesen. Damit diese Interferenzerscheinungen auftreten, darf die Lichtweite der Beugungsgitter höchstens 20—50 mal so groß sein, als die Wellenlängen der betreffenden Strahlen. Physikalische Überlegungen zeigten, daß die Röntgenstrahlen, sofern die Wellentheorie auf sie anwendbar ist, Wellenlängenwerte besitzen müssen, die etwa 1000 mal kleiner als die des violetten Lichtes sind. Eine künstliche Darstellung von Beugungsgittern in diesen Dimensionen schien undenkbar. Einer Anregung von Laue zufolge benutzten nun Friedrich und Knipping die natürlichen Kristalle als Raumgitter. Sie bewiesen so einerseits die Wellennatur des Röntgenlichtes, anderseits die Gitterstruktur der Kristalle in mit den Röntgenwellenlängen kommensurablen Dimensionen.

Benutzt man inhomogenes Röntgenlicht von verschiedenen Wellenlängen, das man als dünnes Bündel durch eine Kristallplatte hindurchgehen läßt, so zeigt sich, daß hinter dem Kristall die Röntgenstrahlen gebeugt sind und miteinander interferieren. In einzelnen Richtungen treten so Intensitätsmaxima auf, die als Schwärzungsflecken auf einer photographischen Platte fixiert werden können. So entstehen die als Lauediagramme bezeichneten Beugungsbilder. Der Kristall hat das inhomogene Röntgenstrahlenbündel spektral zerlegt. Nach jeder Richtung werden nur Strahlen bestimmter Wellenlänge gesandt. Bragg hat dann gezeigt, daß der Erscheinungskomplex so aufgefaßt werden kann, als ob die Röntgenstrahlen an den Massenebenen reflektiert werden, wobei die Formel 56a die Beziehung zwischen Röntgenperiode der Ebenenserie, Glanzwinkel der einfallenden Strahlen und ansprechender Wellenlänge herstellt. Es läßt sich nun jedem Interferenzflecken auf der photographischen Platte eine Massenebenenserie zuordnen und die Intensität ist aus dem Grad der Schwärzung ersichtlich. Die Formeln 56a und 56b zeigen ferner, wie man nach Bragg die Röntgenperiode direkt bestimmen kann, wenn homogenes Röntgenlicht von bestimmter Wellenlänge benutzt wird. Unter bestimmten Winkeln α zeigen sich dann Intensitätsmaxima reflektierter Strahlen. Die Größe dieser Intensitätsmaxima mit wechselndem n gibt über die Massenverteilung in Zwischenebenen Aufschluß, sofern das Beugungsvermögen, wie angenommen wird, von den Belastungen abhängig ist.

Wellenlänge, die Ordnungszahl und den Winkel α, so ergibt sich für die bestimmte Ebenenserie die Röntgenperiode zu

$$R = \frac{n \cdot \lambda}{2 \sin \alpha} \tag{56b}$$

Finden sich in $\frac{1}{t'}, \frac{1}{t''}, \frac{1}{t'''} \ldots\ldots$ einer durch zwei Ebenen mit der Belastung L definierten Röntgenperiode von (h k l) noch weitere Massenebenen mit den Belastungen L′, L″, L‴ ....., so ist unter gewissen Bedingungen bis auf einen Proportionalitätsfaktor die Amplitude der durch die Interferenzerscheinungen bedingten resultierenden Welle n^{ter} Ordnung gegeben durch[1])

$$A\,n = L + L' \cos n \frac{2\pi}{t'} + L'' \cos n \frac{2\pi}{t''} + L''' \cos n \frac{2\pi}{t'''} + \ldots\ldots \tag{56c}$$

Die L werden neuerdings nicht aus den Atomgewichten, sondern den positiven Elektronenzahlen (Ordnungszahlen) gebildet. Mit den Amplituden stehen im engen Zusammenhang die Intensitäten, die nach dem Braggschen Verfahren für jede einzelne Ordnung meßbar sind und die nach dem Laue- und Debye-Verfahren in kombinatorischer Weise die Intensitäten der auf den photographischen Platten und Films erscheinenden Interferenzpunkte oder Interferenzstreifen mitbestimmen. Es muß daher möglich sein, nicht nur die Röntgenperioden einer beliebigen Ebenenschar zu bestimmen, sondern auch die relativen Verhältnisse zwischen den Amplituden. Um daraus die Massenverteilung, beziehungsweise die Struktur, abzuleiten, braucht nur die Abhängigkeit der Röntgenperioden, der Belastungen, der Zahl der Zwischenebenen einer Röntgenserie, sowie der $\frac{1}{t}$-Werte, von der Art des Raumsystemes und den Koordinaten der Massenschwerpunkte bekannt zu sein. Man ersieht ohne weiteres, wie wichtig die soeben besprochenen Gesetzmäßigkeiten für die Strukturdeutung sind. Um sie dem speziellen Zwecke dienstbar zu machen, sind nur geringe Ergänzungen notwendig. Liegt ein Atom mit nicht zu vernachlässigendem Beugungsvermögen in allgemeinster Lage, so wird für alle nicht auf Symmetrieelementen senkrecht stehenden Flächen die Röntgenperiode der Identitätsperiode in der betreffenden Richtung gleich sein. Diese Periode ist ihrerseits der Elementarperiode in der diesbezüglichen Richtung gleich, wenn das Elementarparallelepiped einfach primitiv ist. Ist das Elementarparallelepiped mehrfach primitiv (z. B. innenzentriert oder flächenzentriert), so treten die auf Seite 480/81 angeführten Gesetzmäßigkeiten auf: Die Röntgenperiode hat die normale Größe, die sich aus den Elementarabständen

[1]) Sofern die Massenebenenverteilung vom Anfangspunkt an symmetrisch ist, sonst kommen noch die Sinusglieder hinzu.

a, b, c für die fragliche Ebene (h k l) berechnet, wenn die neuen identischen Atome in die Massenebenen der Eckatome des Elementarparallelepipeds fallen, die Belastungen also pro Elementarparallelogramm sich vervielfachen. (Bei innenzentriertem Parallelepiped also beispielsweise dann, wenn die Indizessumme geradzählig ist). Die Röntgenperiode ist die Hälfte, oder bei rhomboedrischer, auf hexagonales Elementarparallelepiped bezogener Translationsgruppe, ein Drittel der elementaren Perioden, sofern die Belastungen sich gleichbleiben, aber in $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3}$ gleichbelastete Zwischenebenen auftreten. (Bei innenzentriertem Elementarparallelepiped also dann, wenn die Indizessumme nicht geradzählig ist.)

Daraus ergeben sich folgende Methoden der Bestimmung der Translationsgruppe beziehungsweise der Art des Elementarparallelepipedes. Im Braggschen Verfahren arbeitet man mit einer bestimmten Wellenlänge der Röntgenstrahlen, man bestimmt somit die Winkel α für die Spektren erster Ordnung verschiedener Flächen allgemeiner Formen, berechnet daraus nach (56b) die Röntgenperioden und untersucht, welcher Art die Gesetzmäßigkeiten sind. Meistens wird die Untersuchung an drei oder zwei Flächen eindeutige Auskunft geben. Findet man beispielsweise an allen Flächen dieser Art, gleichgültig, ob die Summen zweier Indizes oder die Gesamtsummen der Indizes gerade sind oder nicht, gleichgültig auch, ob alle Indizes ungerade oder ob sie gemischt sind, Röntgenperioden, die bei Annahme von gleichen a, b, c-Werten als Elementarabstände berechenbar sind, so können in der monoklinen, rhombischen, tetragonalen und kubischen Abteilung nur einfachprimitive Elementarparallelepipede, einfache Translationsgruppen, vorliegen. Derartige Röntgenperioden sollen normal genannt werden, die aus a, b, c resultierenden Elementarabstände in beliebiger Richtung wollen wir mit d bezeichnen. Wir hätten in diesem Falle also für alle Flächen allgemeiner Formen normale Röntgenperioden, oder für alle derartigen Flächen wäre $R = d$. Ist, um ein zweites Beispiel zu wählen, anderseits $R = d$, wenn alle Indizes ungerade sind, R aber $= \frac{d}{2}$ (bezogen auf gleiche a, b, c-Werte), wenn die Indizes gemischt sind, so kann nur ein allseitig flächenzentriertes Elementarparallelepiped der Struktur zugrunde gelegt werden.

Die Interferenzmuster der Laue-Photogramme entstehen unter der Einwirkung eines nach kleinen Wellenlängen hin meist scharf begrenzten größeren Spektralbereiches von Röntgenstrahlen. Man wird daher für verschiedene Richtungen die Interferenzmuster herstellen und unter Berücksichtigung aller Fehlerquellen die Interferenzpunkte genau den entsprechenden Ebenenserien zuordnen. Stellt man nun statistisch alle auftretenden Flächen allgemeiner Form zusammen, so wird man den Einfluß der Translationsgruppe erkennen müssen. Handelt es sich

beispielsweise um ein basiszentriertes Elementarparallelepiped, so werden bei ähnlicher Indizessumme diejenigen Flächen, für welche h + k geradzählig ist, doppelte Belastung und bedeutend größere Röntgenperiode besitzen, als die anderen Flächen. Infolge der unteren Spektralbegrenzung des einfallenden Wellenbündels werden sie daher bei relativ großen Indizes einzig vorhanden sein. Im statistischen Sinne müssen somit die schon für die natürliche Flächenbegrenzung abgeleiteten Beziehungen im Interferenzmuster noch weit schärfer zum Ausdruck kommen.

Hat man nach einer dieser zwei Methoden (die Debye-Methode ist der von Laue ähnlich) die Translationsgruppe bestimmt und kennt man die Kristallklasse des zu untersuchenden Kristalles genau oder ungefähr, so läßt sich das Raumsystem auffinden, indem man analoge Untersuchungen auf die mit Symmetrieeigenschaften behafteten Flächen ausdehnt. Für alle derartigen Flächen wird die Röntgenperiode im allgemeinen nur dann dem Identitätsabstande der Flächenserien gleich sein, wenn parallel den senkrecht zur Fläche stehenden Symmetrieelementen Scharen gewöhnlicher Symmetrieelemente (Drehungsachsen, Spiegelebenen) auftreten. In solchem Falle werden auch die Belastungen den Symmetrieeigenschaften gemäß erhöht sein. Bei Anwesenheit von Schraubung oder Gleitspiegelung treten kompliziertere Verhältnisse auf, und man wird in den Symmetriezonen oft in verschiedenem Verhältnis zu den Elementarabständen stehende Röntgenperioden erkennen können. Es sei auf die Seite 479/81 erwähnten Beispiele verwiesen. Aus der die kubische Abteilung betreffenden Haupttabelle X lassen sich beispielsweise alle Daten herauslesen, die zur Bestimmung kubischer Raumsysteme nach dem Verfahren von Bragg oder Laue notwendig sind. Es sind in jeder Klasse die Raumsysteme mit gleicher Translationsgruppe zusammenzufassen. In den symmorphen Raumsystemen findet man hinsichtlich R die für die Translationsgruppe charakteristischen Merkmale. Ist gegenüber den entsprechenden symmorphen Gruppen in einem anderen Raumsystem bei bestimmten Indizes die Zahl der Zwischenebenen verdoppelt, so wird die Röntgenperiode die Hälfte jener sein usw. Eine spezielle Tabelle für das Braggsche Verfahren läßt sich so sofort herstellen. Da man bei kubischer Kristallisation stets in erster Linie die Röntgenperioden für (100), (110) und (111) bestimmen wird, so mag es hier genügen, die Verhältnisse anzugeben, in welchen diese Perioden in den einzelnen Raumsystemen stehen. Dadurch schränkt sich jeweilen die Zahl der möglichen Raumgruppen bereits bedeutend ein, weitere Unterscheidungen sind dann unter Berücksichtigung der in den Zonen der (hk0), (hhl) und (hkh)-Flächen auftretenden Gesetzmäßigkeiten möglich. Die Röntgenperiode (100) ist in dieser Tabelle XI gleich 1 gesetzt; wie sie sich zu der Elementarkantenlänge des Würfels a verhält, ist in der letzten Kolonne angegeben.

Haupttabelle XI. Röntgenperiodenverhältnisse in den kubischen Raumsystemen

Raumgruppe	$R_{100} : R_{110} : R_{111}$	$1 = \frac{a}{n}$	Raumgruppe	$R_{100} : R_{110} : R_{111}$	$1 = \frac{a}{n}$
$\mathfrak{T}^1$	$1 : \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = a$	$\mathfrak{O}^1$	$1 : \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = a$
$\mathfrak{T}^2$	$1 : \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{2}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$	$\mathfrak{O}^2$	$1 : \sqrt{2} : \frac{2}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$
$\mathfrak{T}^3$	$1 : \sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$	$\mathfrak{O}^3$	$1 : \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{2}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$
$\mathfrak{T}^4$	$1 : \sqrt{2} : \frac{2}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$	$\mathfrak{O}^4$	$1 : \sqrt{2} : \frac{4}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{4}$
$\mathfrak{T}^5$	$1 : \sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$	$\mathfrak{O}^5$	$1 : \sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$
			$\mathfrak{O}^6$	$1 : 2\sqrt{2} : \frac{4}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{4}$
$\mathfrak{T}_h^1$	$1 : \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = a$	$\mathfrak{O}^7$	$1 : 2\sqrt{2} : \frac{4}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{4}$
$\mathfrak{T}_h^2$	$1 : \sqrt{2} : \frac{2}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$	$\mathfrak{O}^8$	$1 : 2\sqrt{2} : \frac{2}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{4}$
$\mathfrak{T}_h^3$	$1 : \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{2}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$			
$\mathfrak{T}_h^4$	$1 : \sqrt{2} : \frac{4}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{4}$	$\mathfrak{O}_h^1$	$1 : \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = a$
$\mathfrak{T}_h^5$	$1 : \sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$	$\mathfrak{O}_h^2$	$1 : \sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$
$\mathfrak{T}_h^6$	$1 : \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{2}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$	$\mathfrak{O}_h^3$	$1 : \sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$
$\mathfrak{T}_h^7$	$1 : \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$	$\mathfrak{O}_h^4$	$1 : \sqrt{2} : \frac{2}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$
			$\mathfrak{O}_h^5$	$1 : \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{2}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$
$\mathfrak{T}_d^1$	$1 : \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = a$	$\mathfrak{O}_h^6$	$1 : \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$
$\mathfrak{T}_d^2$	$1 : \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{2}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$	$\mathfrak{O}_h^7$	$1 : \sqrt{2} : \frac{4}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{4}$
$\mathfrak{T}_d^3$	$1 : \sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$	$\mathfrak{O}_h^8$	$1 : \sqrt{2} : \frac{2}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{4}$
$\mathfrak{T}_d^4$	$1 : \sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$	$\mathfrak{O}_h^9$	$1 : \sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$
$\mathfrak{T}_d^5$	$1 : \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$	$\mathfrak{O}_h^{10}$	$1 : \sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{4}$
$\mathfrak{T}_d^6$	$1 : \sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{4}$			

Für die übrigen Raumsysteme ist eine ausführliche Bestimmungstabelle konstruiert worden (Tabelle XII). Darin ist d die für eine Ebenenserie aus den Elementargrößen a, b, c α, β, γ berechnete Periode, R die Röntgenperiode. Ist für Flächen ein- und derselben Symmetriezone R teils gleich d, teils gleich $\frac{d}{2}$, so sind im letzteren Falle die Belastungen stets relativ halb mal so groß wie im ersteren Falle. Berücksichtigung dieses Umstandes gestattet auch statistische Gesetzmäßigkeiten der Intensitätsverteilung in Symmetriezonen der Laue-Diagramme zur Bestimmung zu benutzen. In der Bestimmungstabelle XII sind im allgemeinen nur die unterscheidenden und zur Unterscheidung notwendigen Merkmale mitgeteilt. Um den allgemeinen Charakter eines Raumsystemes hinsichtlich der Massenverteilung zu konstruieren, wird man auf die analytisch-geometrische Untersuchung des III. Kapitels zurückgreifen. Da das Koordinatensystem gleichwertiger Punkte stets angeführt wurde, wird es den Lesern keine Mühe machen, die Art der Ebenenserien in anderen Richtungen selbst zu bestimmen.

Haupttabelle XII
zur Bestimmung nichtkubischer Raumsysteme bei Anwesenheit von Atomen in allgemeiner Lage.

Triklin hemiedrische Klasse. $\mathfrak{C}_1$.

Triklin holoedrische Klasse. $\mathfrak{C}_i$.

Monoklin hemiedrische Klasse (bezogen auf einfache Translationsgruppe (A) oder (B) innenzentriertes Elementarparallelepiped).

A. Domen durchwegs mit R = d und einfacher Belastung.
   1. Alle Pedien mit R = d und doppelter Belastung. $\mathfrak{C}_s^1$.
   2. Pedien teils mit R = d, teils mit R = $\frac{d}{2}$, das erstere je nach Koordinatenwahl, wenn ein Index oder die Summe[1]) = 2i. $\mathfrak{C}_s^2$.

B. Zweierlei Domen. Bei bestimmter Wahl von a und c derart, daß R = d auftritt, wenn die Indizessumme = 2i ist, sonst R = $\frac{d}{2}$.
   1. Zweierlei Pedien unter entsprechenden Bedingungen, die einen mit vierfacher, die anderen mit doppelter Belastung. $\left(R = d \text{ und } \frac{d}{2}\right)$. $\mathfrak{C}_s^3$.
   2. a und c sind eventuell so wählbar, daß alle Pedien bei doppelter Belastung R = $\frac{d}{2}$ besitzen $\mathfrak{C}_s^4$.

Monoklin hemimorphe Klasse. (Gleiches Bezugssystem wie oben.)

A. Sphenoide durchwegs mit R = d und einfacher Belastung.
   1. (010) mit R = b. $\mathfrak{C}_2^1$.
   2. (010) mit R = $\frac{b}{2}$. $\mathfrak{C}_2^2$.

B. Zweierlei Sphenoide. Bei bestimmter Wahl von a und c beispielsweise derart, daß R = d auftritt, wenn die Indizessumme = 2i ist; sonst R = $\frac{d}{2}$. $\mathfrak{C}_2^3$.

[1]) 2i bedeutet im folgenden immer irgend eine gerade (durch 2 teilbare) ganze Zahl.

Monoklin holoedrische Klasse. (Gleiches Bezugssystem wie oben.)

A. Prismen durchwegs mit $R = d$ und einfacher Belastung.

1. Seitliches (Symmetrie-)Pinakoid mit $R = b$ und doppelter Belastung.

α. Die übrigen Pinakoide ebenfalls mit normaler Röntgenperiode und doppelter Belastung. $\mathfrak{C}_{2h}^{1}$.

β. Die übrigen Pinakoide teils mit $R = d$, teils mit $R = \frac{d}{2}$; das erstere, wenn außer Null ein Index (oder die Summe) geradzählig ist. $\mathfrak{C}_{2h}^{4}$.

2. Seitliches Pinakoid mit $R = \frac{b}{2}$ und einfacher Belastung.

α. Die übrigen Pinakoide durchwegs mit $R = d$ und doppelter Belastung. $\mathfrak{C}_{2h}^{2}$.

β. Die übrigen Pinakoide teils mit $R = d$, teils mit $R = \frac{d}{2}$. $\mathfrak{C}_{2h}^{5}$.

B. Zweierlei Prismen, teils mit $R = d$ und doppelter Belastung, teils mit $R = \frac{d}{2}$ und einfacher Belastung.

α. Die R der Pinakoide gehorchen dem gleichen Gesetz wie die Prismen. $\mathfrak{C}_{2h}^{3}$.

β. Die R der Pinakoide gehorchen einem anderen Gesetz, das sich je nach Wahl von a und c verschieden ausdrücken läßt. $\mathfrak{C}_{2h}^{6}$.

Rhombisch hemimorphe Klasse. (Die Indizes h und k werden als Basisindizes bezeichnet).

A. Prismen und Pyramiden durchwegs mit normaler Röntgenperiode und einfacher Belastung.

1. Basis mit $R = c$ und vierfacher Belastung.

α. Alle Domen mit $R = d$ und doppelter Belastung. $\mathfrak{C}_{2v}^{1}$.

β. In einer domatischen Zone durchwegs $R = d$, in der anderen nur, wenn der Basisindex $= 2i$ ist. $\mathfrak{C}_{2v}^{4}$.

γ. In beiden domatischen Zonen R nur $= d$, wenn der Basisindex $= 2i$, sonst $R = \frac{d}{2}$. $\mathfrak{C}_{2v}^{8}$.

2. Basis mit $R = \frac{c}{2}$ und bloß doppelter Belastung.

α. In einer domatischen Zone durchwegs $R = d$, in der anderen teils $R = d$, teils $R = \frac{d}{2}$.

a. In der anormalen domatischen Zone $R = d$, wenn $l = 2i$. $\mathfrak{C}_{2v}^{2}$.

b. In der anormalen domatischen Zone $R = d$, wenn die Indizessumme $= 2i$. $\mathfrak{C}_{2v}^{7}$.

β. In beiden domatischen Zonen teils $R = d$, teils $R = \frac{d}{2}$.

a. In beiden Zonen tritt $R = d$ auf, wenn $l = 2i$. $\mathfrak{C}_{2v}^{3}$.

b. In beiden Zonen tritt $R = d$ auf, wenn die Indizessumme $= 2i$. $\mathfrak{C}_{2v}^{10}$.

c. In der einen Zone tritt $R = d$ auf, wenn $l = 2i$, in der anderen, wenn der Basisindex $= 2i$. $\mathfrak{C}_{2v}^{5}$.

d. In der einen Zone tritt $R = d$ auf, wenn $l = 2i$, in der anderen, wenn die Indizessumme $= 2i$. $\mathfrak{C}_{2v}^{6}$.

γ. In beiden domatischen Zonen durchwegs $R = \frac{d}{2}$ bei einfacher Belastung. $\mathfrak{C}_{2v}^{9}$.

B. Prismen und Pyramiden mit $R = d$ und doppelter Belastung, wenn die Summe der Basisindizes $= 2i$ ist, sonst $R = \frac{d}{2}$ und einfache Belastung.

1. Basis mit $R = c$ und achtfacher Belastung. $\mathfrak{C}_{2v}^{11}$.

2. Basis mit $R = \frac{c}{2}$ und vierfacher Belastung.

α. Eine domatische Zone mit $R = d$, wenn der Basisindex $= 2i$, sonst, sowie durchwegs in der anderen Zone, $R = \frac{d}{2}$ und bloß doppelte Belastung. $\mathfrak{C}_{2v}^{12}$.

β. In beiden domatischen Zonen nur Flächen mit $R = \frac{d}{2}$ und doppelter Belastung. $\mathfrak{C}_{2v}^{13}$.

C. Prismen und Pyramiden mit $R = d$ und doppelter Belastung, wenn die Summe von l mit einem bestimmten Basisindex $= 2i$ ist, sonst $R = \frac{d}{2}$ und einfache Belastung. Basis mit $R = \frac{c}{2}$ und vierfacher Belastung.

1. Beide domatischen Zonen teils mit $R = d$, teils mit $R = \frac{d}{2}$.
   In der, den bestimmten Basisindex als Zahl enthaltenden Zone $R = d$, wenn die Summe geradzahlig, in der anderen, wenn $l = 2i$. $\mathfrak{C}_{2v}$[14].
2. Eine domatische Zone teils mit $R = d$, teils mit $R = \frac{d}{2}$, die andere besitzt nur Flächen mit $R = \frac{d}{2}$.
   α. Die normale Röntgenperiode der ersten domatischen Zone tritt auf, wenn die Summe der Indizes $= 2i$ ist, die Zone liegt senkrecht auf der zentrierten Fläche. $\mathfrak{C}_{2v}$[16].
   β. Die normale Röntgenperiode der ersten domatischen tritt auf, wenn $l = 2i$ ist; die Zone enthält die zentrierte Seitenfläche des Elementarparallelepipeds. $\mathfrak{C}_{2v}$[15].
3. In beiden domatischen Zonen kommen nur Domen mit $R = \frac{d}{2}$ vor. $\mathfrak{C}_{2v}$[17].

D. Pyramiden mit $R = d$ und einfacher Belastung, wenn alle Indizes ungerade sind, sonst (sowie alle Prismen) mit $R = \frac{d}{2}$ und doppelter Belastung.

1. Basis mit $R = \frac{c}{2}$. $\mathfrak{C}_{2v}$[18].
2. Basis mit $R = \frac{c}{4}$. $\mathfrak{C}_{2v}$[19].

E. Pyramiden und Prismen mit $R = d$ und doppelter Belastung, sofern die Indizessumme $= 2i$ ist, ansonst $R = \frac{d}{2}$ und einfache Belastung. Basis mit $R = \frac{c}{2}$.

1. Beide domatischen Zonen, teils mit $R = d$ (Indizessumme $= 2i$) und vierfacher Belastung, teils mit $R = \frac{d}{2}$ und doppelter Belastung. $\mathfrak{C}_{2v}$[20].
2. Nur eine domatische Zone von dieser Art, die andere besitzt lauter Flächen mit $R = \frac{d}{2}$. $\mathfrak{C}_{2v}$[22].
3. In beiden domatischen Zonen gibt es nur Domen mit $R = \frac{d}{2}$ und doppelter Belastung. $\mathfrak{C}_{2v}$[21].

Rhombisch hemiedrische Klasse.

A. Prismen und Bisphenoide mit normaler Röntgenperiode und Aufeinanderfolge.

1. Alle drei Pinakoide mit normalem R und doppelter Belastung. $\mathfrak{V}^1$.
2. Zwei Pinakoide mit normalem R, eines mit $R = \frac{d}{2}$ und einfacher Belastung. $\mathfrak{V}^2$.
3. Ein Pinakoid mit normalem R, zwei mit $R = \frac{d}{2}$ und einfacher Belastung. $\mathfrak{V}^3$.
4. Alle drei Pinakoide mit $R = \frac{d}{2}$ und einfacher Belastung.

B. Prismen und Bisphenoide mit der Summe zweier bestimmter Indizes $= 2i$ besitzen normale Röntgenperiode und doppelte Belastung, die übrigen einfache Belastung und $R = \frac{d}{2}$.

1. Das Pinakoid der zentrierten Fläche mit normalem R und doppelter Belastung, die zwei übrigen besitzen einfache Belastung und $R = \frac{d}{2}$. $\mathfrak{V}^6$.
2. Alle Pinakoide mit $R = \frac{d}{2}$ und einfacher Belastung. $\mathfrak{V}^5$.

C. Bisphenoide mit lauter ungeraden Indizes besitzen normales R und vierfache Belastung, die übrigen sowie die Prismen $R = \frac{d}{2}$ und doppelte Belastung. $\mathfrak{V}^7$. (Die Pinakoide haben $R = \frac{d}{2}$, vierfache Belastung.)

D. Bisphenoide und Prismen mit der Summe aller Indizes $= 2i$ besitzen normales R und doppelte Belastung, die übrigen $R = \frac{d}{2}$ und einfache Belastung. Die Pinakoide: $\frac{d}{2}$ und doppelte Belastung. $\mathfrak{V}^8$ und $\mathfrak{V}^9$.

Rhombisch holoedrische Klasse.

A. Bipyramiden mit normaler Röntgenperiode und normaler Aufeinanderfolge.

1. Alle Pinakoide mit normalem R und vierfacher Belastung. (Prismen normales R und doppelte Belastung). $\mathfrak{B}_h^1$.

2. Zwei Pinakoide mit normalem R und vierfacher Belastung, eines mit $R = \frac{d}{2}$ und doppelter Belastung.
   a. In zwei Prismenzonen normales R und doppelte Belastung, in einer Prismenzone nur, wenn ein Index $= 2i$. $\mathfrak{B}_h^5$.
   b. In einer Prismenzone normales R und doppelte Belastung, in den beiden anderen nur, wenn der gemeinsame[1]) Index $= 2i$. $\mathfrak{B}_h^3$.

3. Ein Pinakoid besitzt normales R und vierfache Belastung. zwei kommen $R = \frac{d}{2}$ und doppelte Belastung zu.
   a. In zwei Prismenzonen normales R und doppelte Belastung, in einer nur, wenn Summe der Indizes $= 2i$. $\mathfrak{B}_h^{13}$.
   b. Durchwegs normale R und doppelte Belastung in nur einer Prismenzone, in den beiden anderen Zonen teils $R = d$, teils $R = \frac{d}{2}$.
      α. Das normale Pinakoid liegt in einer der anormalen Prismenzonen. In diesen anormalen Prismenzonen tritt normales R nur auf, wenn je einer der Indizes $= 2i$. $\mathfrak{B}_h^{11}$. In einer der anormalen Prismenzonen tritt normales R auf, wenn die Indizessumme $= 2i$, in der anderen (das normale Pinakoid enthaltenden), wenn ein Index $= 2i$. $\mathfrak{B}_h^7$.
      β. Das normale Pinakoid liegt in beiden anormalen Prismenzonen, deren Flächen weisen jeweilen normales R auf, wenn der nicht gemeinsame Index $= 2i$. $\mathfrak{B}_h^9$.
   c. In allen drei Prismenzonen teils $R = d$, teils $R = \frac{d}{2}$.
      α. In zwei Zonen $R = d$, wenn je ein Index $= 2i$, in der anderen, wenn die Summe der Indizes $= 2i$. $\mathfrak{B}_h^4$.
      β. In allen drei Zonen $R = d$, wenn je ein Index $= 2i$. $\mathfrak{B}_h^8$.

4. Alle drei Pinakoide besitzen $R = \frac{d}{2}$ und doppelte Belastung.
   a. In einer Prismenzone normales R und doppelte Belastung, in den beiden anderen teils $R = d$, teils $R = \frac{d}{2}$.
      α. Diejenigen Flächen der anormalen Prismenzonen besitzen normales R und doppelte Belastung, für welche die Indizessumme $= 2i$. $\mathfrak{B}_h^{12}$.
      β. Normales R und doppelte Belastung treten in einer der anormalen Prismenzone auf, wenn die Indizessumme $= 2i$; in der anderen, wenn der nicht gemeinsame Index $= 2i$. $\mathfrak{B}_h^{10}$.
   b. Alle drei Prismenzonen anormal, d. h. teils mit normalen R, teils mit $R = \frac{d}{2}$. (Doppelte und einfache Belastung.)
      α. Die normalen R treten in allen drei Zonen auf, wenn jeweilen die Indizessummen $= 2i$. $\mathfrak{B}_h^2$.
      β. Nur für zwei Prismenzonen gilt dies, während in der dritten Zone ein Index selbst $= 2i$ sein muß. $\mathfrak{B}_h^6$.
      γ. Die Summenbedingung gilt für normales R nur in einer Zone, in den beiden anderen Zonen müssen je ein Index $= 2i$ sein. $\mathfrak{B}_h^{14}$, wenn die $2i$-Indizes in den zwei Zonen verschiedenen, $\mathfrak{B}_h^{10}$, wenn sie dem gemeinsamen Index entsprechen.
      δ. In jeder Prismenzone muß je ein Index $= 2i$ sein, um normales R zu erhalten $\left(\text{sonst } R = \frac{d}{2}\right)$. Für jede Zone ist es ein anderer Index. $\mathfrak{B}_h^{15}$.

[1]) gemeinsam heißt in beiden Zonen von Null verschieden, also als Zahl vorhanden.

B. Bipyramiden mit der Summe zweier bestimmter Indizes = 2i besitzen normale Röntgenperiode und doppelte Belastung, die übrigen aber $R = \frac{d}{2}$ und einfache Belastung.

1. Zwei Pinakoide zeigen vierfache Belastung und $R = \frac{d}{2}$, das dritte achtfache Belastung und normales R.

α. Der auf die Bipyramiden bezügliche Satz gilt hinsichtlich R für alle drei Prismenzonen. $\mathfrak{B}_h^{19}$.

β. Dieser Satz gilt nur für zwei Prismenzonen, während in der Zone, in der die zwei bestimmten Indizes von Null verschieden sind, alle Flächen $R = \frac{d}{2}$ und doppelte Belastung besitzen. $\mathfrak{B}_h^{21}$.

2. Alle drei Pinakoide zeigen bei vierfacher Belastung eine nur halbprimitive Röntgenperiode.

α. In einer Prismenzone treten nur $R = \frac{d}{2}$ auf, in den beiden anderen auch R = d. (Nämlich gemäß dem Summensatz der beiden bestimmten Indizes.) $\mathfrak{B}_h^{17}$.

β. In zwei Prismenzonen treten für alle Flächen nur $R = \frac{d}{2}$ bei doppelter Belastung auf. Die Zone mit R = teils d, teils $= \frac{d}{2}$ enthält die bestimmten zwei Indizes mit von Null verschiedenen Werten. $\mathfrak{B}_h^{20}$. Die betreffende Zone enthält nur einen der zwei fixierten Indizes als Zahl, dieser muß dann gleich 2i sein, wenn R = d und die Belastung vierfach sein sollen. $\mathfrak{B}_h^{18}$.

γ. In allen drei Prismenzonen ist $R = \frac{d}{2}$. $\mathfrak{B}_h^{23}$.

C. Bipyramiden mit lauter ungeraden Indizes besitzen normales R und vierfache Belastung, die übrigen $R = \frac{d}{2}$ und doppelte Belastung.

1. Die Röntgenperioden der drei Pinakoide sind halbprimitiv (achtfach belastet). $\mathfrak{B}_h^{23}$.

2. Die Röntgenperiode der drei Pinakoide sind viertelprimitiv (vierfach belastet.) $\mathfrak{B}_h^{24}$. (Es gibt dann auch in jeder Prismenzone $R = \frac{d}{2}$ oder $\frac{d}{4}$-Werte, je nachdem, ob die Indizessumme gerade oder ungerade ist.)

D. Bipyramiden mit der Indizessumme = 2i besitzen normales R und doppelte Belastung, die übrigen ein R von $\frac{d}{2}$ mit einfacher Belastung. Alle Pinakoide besitzen halbelementare Röntgenperiode und vierfache Belastung.

1. In allen drei Prismenzonen treten normale R auf, wenn die Indizessumme gerade ist. $\mathfrak{B}_h^{25}$.

2. Das gilt nur für zwei Prismenzonen, während in der anderen Zone alle Flächen bei bloß doppelter Belastung $R = \frac{d}{2}$ haben. $\mathfrak{B}_h^{28}$.

3. Nur eine Prismenzone besitzt bei einer Indizessumme von 2i normale R, alle Flächen der beiden anderen Zonen haben halbelementare Röntgenperioden. $\mathfrak{B}_h^{26}$.

4. Alle drei Prismenzonen besitzen nur Flächen mit doppelter Belastung und $R = \frac{d}{2}$. $\mathfrak{B}_h^{27}$.

Rhomboedrisch tetartoedrische Klasse.

A. Ohne Rhomboederbedingung.

1. Basis mit normaler einfachprimitiver Röntgenperiode. $\mathfrak{C}_3^1$.

2. Basis mit $R = \frac{c}{3}$. $\mathfrak{C}_3^2$ und $\mathfrak{C}_3^3$.

B. Mit Rhomboederbedingung. $\mathfrak{C}_3^4$.

Rhomboedrisch paramorphe Klasse.

A. Ohne Rhomboederbedingung. $\mathfrak{C}_{31}^1$.

B. Mit Rhomboederbedingung. $\mathfrak{C}_{31}^2$.

Rhomboedrisch hemimorphe Klasse.

A. Ohne Rhomboederbedingung.

1. Basis mit normaler, einfachprimitiver Röntgenperiode. $\mathfrak{C}_{3v}^{1}$ und $\mathfrak{C}_{3v}^{2}$.
2. Basis mit $R = \frac{c}{2}$. $\mathfrak{C}_{3v}^{3}$ und $\mathfrak{C}_{3v}^{4}$.

B. Mit Rhomboederbedingung.

1. Basis mit auf Rhomboeder bezogener, einfachprimitiver Röntgenperiode. $\mathfrak{C}_{3v}^{5}$.
2. Basis mit $R = \frac{d}{2}$. Von den trigonalen Pyramiden besitzen nur die mit ganzzahliger Indizessumme einfachprimitive Röntgenperiode und doppelte Belastung. $\mathfrak{C}_{3v}^{6}$.

Rhomboedrisch trapezoedrische Klasse.

A. Ohne Rhomboederbedingung.

1. Basis mit $R = c$. $\mathfrak{D}_{3}^{1}$ und $\mathfrak{D}_{3}^{2}$.
2. Basis mit $R = \frac{c}{3}$. $\mathfrak{D}_{3}^{3}$, $\mathfrak{D}_{3}^{5}$ und $\mathfrak{D}_{3}^{4}$, $\mathfrak{D}_{3}^{6}$.

B. Mit Rhomboederbedingung. $\mathfrak{D}_{3}^{7}$.

Rhomboedrisch holoedrische Klasse.

A. Ohne Rhomboederbedingung.

1. Basis mit $R = c$. $\mathfrak{D}_{3d}^{1}$ und $\mathfrak{D}_{3d}^{3}$.
2. Basis mit $R = \frac{c}{3}$. $\mathfrak{D}_{3d}^{2}$ und $\mathfrak{D}_{3d}^{4}$.

B. Mit Rhomboederbedingung.

1. Basis auf Rhomboeder bezogen mit $R = d = \mathfrak{D}_{3d}^{5}$.
2. Basis mit $R = \frac{d}{2}$. Nur die Rhomboeder mit geradzähliger Indizessumme zeigen einfachprimitives R und doppelte Belastung, die anderen $R = \frac{d}{2}$ und einfache Belastung. $\mathfrak{D}_{3d}^{6}$.

Tetragonal tetartoedrische Klasse. I. Art (bezogen auf kürzeste Identitätsabstände als a-Achsen)[1].

A. Pyramiden und Prismen mit durchwegs einfachprimitiver normaler Röntgenperiode.

1. Basis mit $R = c$ und vierfacher Belastung. $\mathfrak{C}_{4}^{1}$.
2. Basis mit $R = \frac{c}{2}$ und doppelter Belastung. $\mathfrak{C}_{4}^{3}$.
3. Basis mit $R = \frac{c}{4}$ und einfacher Belastung. $\mathfrak{C}_{4}^{2}$ und $\mathfrak{C}_{4}^{4}$.

B. Pyramiden und Prismen mit einer geradzähligen Indizessumme besitzen $R = d$ und doppelte Belastung, die anderen $R = \frac{d}{2}$ und einfache Belastung.

1. Basis mit $R = \frac{c}{2}$ und vierfacher Belastung. $\mathfrak{C}_{4}^{5}$.
2. Basis mit $R = \frac{c}{4}$ und doppelter Belastung. $\mathfrak{C}_{4}^{6}$.

Tetragonal tetartoedrische Klasse. II. Art.

A. Basis mit $R = c$ und doppelter Belastung. $\mathfrak{S}_{4}^{1}$.

B. Basis mit $R = \frac{c}{2}$ und doppelter Belastung. $\mathfrak{S}_{4}^{2}$.

Tetragonal hemimorphe Klasse (bezogen auf kürzeste Identitätsabstände als a-Achsen).

A. Alle ditetragonalen Prismen und Pyramiden mit normalem R und normaler Aufeinanderfolge.

1. Basis mit $R = c$ und achtfacher Belastung.

---

[1]) Alle tetragonalen Raumsysteme (ausgenommen die der Klasse $\mathfrak{V}_{d}$) lassen sich jeweilen auf zwei verschiedene Elementarparallelepipede beziehen: die hier mit einfach primitivem Parallelepiped in Rechnung kommenden auch auf ein basisflächenzentriertes, die mit innenzentriertem Parallelepiped auch auf ein allseitig flächenzentriertes. Die a-Achsen sind nach unserer Wahl die kürzesten Identitätsabstände auf der Basis. Zum Vergleich mit der kristallographischen Aufstellung kann es daher oftmals nötig werden, eine Transformation auf die sogenannten Zwischenachsen vorzunehmen.

α. Auch die Zone der Deuteroprismen[1]) und Pyramiden mit R = d. (Doppelte Belastung). $\mathfrak{C}_{4v}^{1}$.

β. In der Deuterozone nur R = $\overline{d}$, wenn h = 2i. $\mathfrak{C}_{4v}^{2}$.

2. Basis mit R = $\frac{c}{2}$ und vierfacher Belastung.

α. Deuteroprisma mit R = a und doppelter Belastung.

a. Deuteropyramiden mit normalem R und doppelter Belastung. $\mathfrak{C}_{4v}^{7}$.

b. Deuteropyramiden mit R = d, wenn l = 2i, sonst nur R = $\frac{d}{2}$ und einfache Belastung. Protopyramiden normales R = $\mathfrak{C}_{4v}^{3}$, Protopyramiden nur normales R, wenn l = 2i. $\mathfrak{C}_{4v}^{5}$.

β. Deuteroprisma mit R = $\frac{a}{2}$ und bloß einfacher Belastung.

a. Deuteropyramiden mit R = d, wenn Indizessumme = 2i, im übrigen bloß mit R = $\frac{d}{2}$ und einfacher Belastung. Alle Protopyramiden mit normalem R. $\mathfrak{C}_{4v}^{4}$. Protopyramiden nur normales R, wenn l = 2i, sonst bei einfacher Belastung R = $\frac{d}{2}$. $\mathfrak{C}_{4v}^{6}$.

b. Deuteropyramiden mit R = d, wenn h = 2i, im übrigen R = $\frac{d}{2}$ und einfache Belastung. $\mathfrak{C}_{4v}^{8}$.

B. Alle ditetragonalen Prismen und Pyramiden mit einer Indizessumme von 2i besitzen normale R und doppelte Belastung, die übrigen R = $\frac{d}{2}$ und einfache Belastung.

1. Basis mit R = $\frac{c}{2}$ und achtfacher Belastung.

α. In der Deuterozone R = d bei vierfacher Belastung, wenn Indizessumme = 2i, sonst R = $\frac{d}{2}$ und doppelte Belastung. $\mathfrak{C}_{4v}^{9}$. (Protozone d oder $\frac{d}{2}$ je nachdem, ob l = 2i oder = 2i + 1).

β. Deuteroprismen und alle Deuteropyramiden besitzen R = $\frac{d}{2}$ bei doppelter Belastung. (Protozone wie vorhin.) $\mathfrak{C}_{4v}^{10}$.

2. Basis mit R = $\frac{c}{4}$ und vierfacher Belastung.

α. In der Deuterozone R = d bei vierfacher Belastung, wenn Indizessumme = 2i, sonst R = $\frac{d}{2}$ und doppelte Belastung. $\mathfrak{C}_{4v}^{11}$.

β. Alle Deuteropyramiden mit R = $\frac{d}{2}$ und bloß doppelter Belastung.

Tetragonal paramorphe Klasse (bezogen auf kürzeste Identitätsabstände als a-Achsen).

A. Alle tetragonalen Bipyramiden mit normalem R und einfacher Belastung.

1. Basis mit R = c und vierfacher Belastung.

α. Prismen mit R = d und doppelter Belastung. $\mathfrak{C}_{4h}^{1}$.

β. Prismen mit R = d nur, wenn Indizessumme = 2i; sonst R = $\frac{d}{2}$. $\mathfrak{C}_{4h}^{3}$.

2. Basis mit R = $\frac{c}{2}$ und doppelter Belastung.

α. Prismen mit R = d und doppelter Belastung. $\mathfrak{C}_{4h}^{2}$.

β. Prismen nur mit R = d und doppelter Belastung, wenn Indizessumme = 2i, sonst mit R = $\frac{d}{2}$ und einfacher Belastung. $\mathfrak{C}_{4h}^{4}$.

B. Tetragonale Bipyramiden mit einer Indizessumme von 2i besitzen normales R und doppelte Belastung, die übrigen R = $\frac{d}{2}$ und einfache Belastung.

1. Basis mit R = $\frac{c}{2}$ und vierfacher Belastung. Zweierlei Prismenflächen. $\mathfrak{C}_{4h}^{5}$.

2. Basis mit R = $\frac{c}{4}$ und doppelter Belastung. Einerlei Prismenflächen. $\mathfrak{C}_{4h}^{6}$.

---

[1]) Deuteroformen sind tetragonale Formen 2. Stellung: ⟨h0l⟩; ⟨100⟩. Protoformen sind tetragonale Formen 1. Stellung: ⟨hhl⟩; ⟨110⟩.

Tetragonal hemiedrische Klasse. II. Art.

A. Skalenoeder, ditetragonale Prismen und Deuteropyramiden mit durchwegs normalem R und einfacher Belastung.
   1. Basis mit $R = c$, alle Bisphenoide mit $R = d$.
      α. Deuteroprisma mit $R = a$ und doppelte Belastung wie die Bisphenoide. $\mathfrak{B}_d^1$.
      β. Deuteroprisma mit $R = \frac{a}{2}$ und einfacher Belastung. $\mathfrak{B}_d^3$.
   2. Basis mit $R = \frac{c}{2}$, die Bisphenoide nur normales R und doppelte Belastung, wenn $l = 2i$.
      α. Deuteroprisma mit $R = a$. $\mathfrak{B}_d^2$.
      β. Deuteroprisma mit $R = \frac{a}{2}$. $\mathfrak{B}_d^4$.

B. Skalenoeder, ditetragonale Prismen und Deuteropyramiden besitzen bloß normales R mit doppelter Belastung, wenn die Summe $h + k = 2i$, sonst $R = \frac{d}{2}$ und einfache Belastung.
   1. Basis mit $R = c$, Deuteroprisma mit $R = \frac{a}{2}$.
      α. Alle Bisphenoide mit $R = d$ und vierfacher Belastung. $\mathfrak{B}_d^5$.
      β. Bisphenoide teils mit $R = \frac{d}{2}$ und nur doppelter Belastung. $\mathfrak{B}_d^7$.
   2. Basis mit $R = \frac{c}{2}$, Deuteroprisma mit $R = \frac{a}{2}$.
      α. Bisphenoide mit $l = 2i$ besitzen $R = d$ und vierfache Belastung, die übrigen $R = \frac{d}{2}$ und doppelte Belastung. $\mathfrak{B}_d^6$.
      β. Nur Bisphenoide mit lauter ungeraden Indizes besitzen $R = d$ und vierfache Belastung. $\mathfrak{B}_d^8$.

C. Skalenoeder mit lauter ungeraden Indizes besitzen $R = d$ und vierfache Belastung, die übrigen sowie die ditetragonalen Prismen und die Deuteropyramiden $R = \frac{d}{2}$ und doppelte Belastung. Basis mit $R = \frac{c}{2}$, Deuteroprisma mit $R = \frac{a}{2}$. $\mathfrak{B}_d^9$ und $\mathfrak{B}_d^{10}$.

D. Skalenoeder, ditetragonale Prismen und Deuteropyramiden mit einer Indizessumme von $2i$ besitzen bei doppelter Belastung $R = d$, die übrigen $R = \frac{d}{2}$ und einfacher Belastung.
   1. Basis mit $R = \frac{c}{2}$, zweierlei Bisphenoide. $\mathfrak{B}_d^{11}$.
   2. Basis mit $R = \frac{c}{4}$. $\mathfrak{B}_d^{12}$.

Tetragonal trapezoedrische Klasse (bezogen auf kürzeste Identitätsabstände als a-Achsen).

A. Trapezoeder, ditetragonale Prismen und tetragonale Bipyramiden durchwegs mit normalem R und einfacher Belastung.
   1. Basis mit $R = c$ und vierfacher Belastung.
      α. Deuteroprisma mit $R = a$. $\mathfrak{D}_4^1$.
      β. Deuteroprisma mit $R = \frac{d}{2}$. $\mathfrak{D}_4^2$.
   2. Basis mit $R = \frac{c}{2}$ und doppelter Belastung.
      α. Deuteroprisma mit $R = a$. $\mathfrak{D}_4^5$.
      β. Deuteroprisma mit $R = \frac{d}{2}$. $\mathfrak{D}_4^6$.
   3. Basis mit $R = \frac{c}{4}$.
      α. Deuteroprisma mit $R = a$. $\mathfrak{D}_4^3$ und $\mathfrak{D}_4^7$.
      β. Deuteroprisma mit $R = \frac{a}{2}$. $\mathfrak{D}_4^4$ und $\mathfrak{D}_4^8$.

B. Trapezoeder, ditetragonale Prismen und Bipyramiden mit einer Indizessumme von $2i$ besitzen einfaches R und doppelte Belastung, die übrigen $R = \frac{d}{2}$ und einfache Belastung.
   1. Basis mit $R = \frac{c}{2}$. $\mathfrak{D}_4^9$.
   2. Basis mit $R = \frac{c}{4}$. $\mathfrak{D}_4^{10}$.

Tetragonal holoedrische Klasse (bezogen auf kürzeste Identitätsabstände als a-Achsen).

A. Alle ditetragonalen Bipyramiden mit normalem R, normaler Aufeinanderfolge und einfacher Belastung.

1. Basis mit R = c und achtfacher Belastung.

α. Ditetragonale Prismen durchwegs mit R = d und doppelter Belastung. $\left[a, \frac{a}{2}\sqrt{2}\right]$[1] $\mathfrak{D}_{4h}^{1}$ und $\left[\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\sqrt{2}\right]$ $\mathfrak{D}_{4h}^{5}$.

β. Ditetragonale Prismen nur mit R = d, wenn Indizessumme = 2i, sonst $R = \frac{d}{2}$ und einfache Belastung.

a. Deuteropyramiden mit R = d und doppelter Belastung, wenn h = 2i, sonst $R = \frac{d}{2}$ und einfache Belastung. $\mathfrak{D}_{4h}^{3}$. $\left[\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\sqrt{2}\right]$.

b. Alle tetragonalen Pyramiden mit R = d. $\mathfrak{D}_{4h}^{7}$. $\left[\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\sqrt{2}\right]$.

2. Basis mit $R = \frac{c}{2}$ und vierfacher Belastung, Deuteroprisma mit R = a und vierfacher Belastung.

α. Alle tetragonalen Protopyramiden mit R = d und doppelter Belastung. $\mathfrak{D}_{4h}^{10}$.

β. Nur wenn l = 2i, besitzen die tetragonalen Protopyramiden R = d.

a. Deuteropyramiden durchwegs R = d. $\mathfrak{D}_{4h}^{9}$.

b. Deuteropyramiden nur R = d, wenn l = 2i. $\mathfrak{D}_{4h}^{2}$.

3. Basis mit $R = \frac{c}{2}$ und vierfacher Belastung, Deuteroprisma mit $R = \frac{a}{2}$ und doppelter Belastung.

α. Ditetragonale Prismen durchwegs mit R = d und doppelter Belastung.

a. Protopyramiden durchwegs mit R = d und doppelter Belastung. $\mathfrak{D}_{4h}^{14}$.

b. Protopyramiden nur mit R = d und doppelter Belastung, wenn l = 2i, sonst $R = \frac{d}{2}$ und einfacher Belastung.

Deuteropyramiden nur mit R = d und doppelter Belastung, wenn Indizessumme = 2i, sonst $R = \frac{d}{2}$ und einfache Belastung. $\mathfrak{D}_{4h}^{6}$.

Deuteropyramiden nur mit R = d und doppelter Belastung, wenn h = 2i. $\mathfrak{D}_{4h}^{13}$.

β. Ditetragonale Prismen nur mit R = d und doppelter Belastung, wenn Indizessumme = 2i, sonst $R = \frac{d}{2}$ und einfache Belastung.

a. Deuteropyramiden durchwegs mit R = d und doppelter Belastung. $\mathfrak{D}_{4h}^{15}$.

b. Deuteropyramiden nur mit R = d und doppelter Belastung, wenn die Indizessumme = 2i, sonst $R = \frac{d}{2}$ und einfache Belastung.

Protopyramiden durchwegs R = d. $\mathfrak{D}_{4h}^{12}$.

Protopyramiden nur R = d, wenn l = 2i. $\mathfrak{D}_{4h}^{4}$.

c. Deuteropyramiden nur mit R = d und doppelter Belastung, wenn l = 2i.

Protopyramiden stets mit R = d und doppelter Belastung. $\mathfrak{D}_{4h}^{16}$.

Protopyramiden nur mit R = d und doppelter Belastung, wenn l = 2i. $\mathfrak{D}_{4h}^{8}$.

d. Deuteropyramiden nur mit R = d und doppelter Belastung, wenn h = 2i. $\mathfrak{D}_{4h}^{11}$.

---

[1]) In diesen Klammern sind die Röntgenperioden für die tetragonalen Prismen angegeben, vor dem Komma für das Deuteroprisma, nach dem Komma für das Protoprisma.

B. Die ditetragonalen Bipyramiden nur mit $R = d$ und doppelter Belastung, wenn die Indizessumme $= 2i$, sonst $R = \frac{d}{2}$ und einfache Belastung.

1. Basis mit $R = \frac{c}{2}$ und achtfacher Belastung, Deuteroprisma mit $R = \frac{a}{2}$ und vierfacher Belastung.

α. Deuteropyramiden mit $R = d$ und vierfacher Belastung, wenn Indizessumme $= 2i$, sonst mit $R = \frac{d}{2}$ und doppelter Belastung. $\mathfrak{D}_{4h}^{17}$.

β. Alle Deuteropyramiden mit $R = \frac{d}{2}$ und doppelte Belastung. $\mathfrak{D}_{4h}^{18}$.

2. Basis mit $R = \frac{c}{4}$ und vierfacher Belastung, Deuteroprisma mit $R = \frac{a}{2}$ und vierfacher Belastung.

α. Deuteropyramiden mit $R = d$ und vierfacher Belastung, wenn Indizessumme $= 2i$, sonst mit $R = \frac{d}{2}$ und doppelter Belastung. $\mathfrak{D}_{4h}^{19}$.

β. Deuteropyramiden durchwegs mit $R = \frac{d}{2}$ und doppelter Belastung. $\mathfrak{D}_{4h}^{20}$.

Trigonal hemiedrische Klasse. $\mathfrak{C}_{3h}^{1}$.

Trigonal holoedrische Klasse.

A. Basis mit $R = c$. $\mathfrak{D}_{3h}^{1}$ und $\mathfrak{D}_{3h}^{3}$.

B. Basis mit $R = \frac{c}{2}$. $\mathfrak{D}_{3h}^{2}$ und $\mathfrak{D}_{3h}^{4}$.

Hexagonal tetartoedrische Klasse.

A. Basis mit $R = c$. $\mathfrak{C}_{6}^{1}$.

B. Basis mit $R = \frac{c}{2}$. $\mathfrak{C}_{6}^{6}$.

C. Basis mit $R = \frac{c}{3}$. $\mathfrak{C}_{6}^{4}$ und $\mathfrak{C}_{6}^{5}$.

D. Basis mit $R = \frac{c}{6}$. $\mathfrak{C}_{6}^{2}$ und $\mathfrak{C}_{6}^{3}$.

Hexagonal hemimorphe Klasse.

A. Basis mit $R = c$. $\mathfrak{C}_{6v}^{1}$.

B. Basis mit $R = \frac{c}{2}$.

1. Orthohexagonal (h 0 l) mit $R = d$, wenn h gerade, sonst $R = \frac{d}{2}$ und doppelte Belastung. $\mathfrak{C}_{6v}^{4}$.

2. Orthohexagonal (h 0 l) mit R stets $= \frac{d}{2}$ und doppelte Belastung.

α. Orthohexagonal (0 k l) mit $R = d$, wenn $k = 2i$. $\mathfrak{C}_{6v}^{3}$.

β. Orthohexagonal (0 k l) stets mit $R = \frac{d}{2}$. $\mathfrak{C}_{6v}^{2}$.

Hexagonal paramorphe Klasse.

A. Basis mit $R = c$. $\mathfrak{C}_{6h}^{1}$.

B. Basis mit $R = \frac{c}{2}$. $\mathfrak{C}_{6h}^{2}$.

Hexagonal trapezoedrische Klasse.

A. Basis mit $R = c$. $\mathfrak{D}_{6}^{1}$.

B. Basis mit $R = \frac{c}{2}$. $\mathfrak{D}_{6}^{6}$.

C. Basis mit $R = \frac{c}{3}$. $\mathfrak{D}_{6}^{4}$ und $\mathfrak{D}_{6}^{5}$

D. Basis mit $R = \frac{c}{6}$. $\mathfrak{D}_{6}^{2}$ und $\mathfrak{D}_{6}^{3}$.

Hexagonal holoedrische Klasse.

A. Basis mit $R = c$. $\mathfrak{D}_{6h}^{1}$.

B. Basis mit $R = \frac{c}{2}$.

1. Orthohexagonal (h 0 l) mit $R = d$, wenn $h = 2i$, sonst $R = \frac{d}{2}$. $\mathfrak{D}_{6h}^{4}$.

2. Orthohexagonal (h 0 l) überall mit $R = \frac{d}{2}$.

α. Orthohexagonal (0 k l) ebenso. $\mathfrak{D}_{6h}^{3}$.

β. Orthohexagonal (0 k l) teils mit $R = d$ (wenn $k = 2i$), teils mit $R = \frac{d}{2}$. $\mathfrak{D}_{6h}^{2}$. (Unterscheidet sich nur in Stellung von $\mathfrak{D}_{6h}^{4}$).

Man wird bemerkt haben, daß es einige wenige, meist paarweise gleiche Röntgenperioden besitzende Raumsysteme gibt, für die eine Unterscheidung nach diesen hier zum ersten Male eingehend dargelegten Merkmalen nicht möglich ist. Meistens handelt es sich um so nahe verwandte Raumsysteme, daß dadurch das allgemeine Verfahren keine Beeinträchtigung erfährt. In den Punktlagenzusammengehörigkeiten und Zähligkeiten sind dann, wenn es sich nicht nur um enantiomorphe Raumsysteme handelt, Unterschiede vorhanden. Sie gehen aus Tabelle IV hervor. In den Bestimmungstabellen XII hat man sich von allen in der analytisch-geometrischen Darstellung eingeführten willkürlichen Stellungsannahmen so gut als möglich freigemacht. In dieser Hinsicht vermag sie, wie auch die Tabellen I und IV, das Wesen der einzelnen Raumsysteme besser zum Ausdruck zu bringen als die eingehende Darstellung das Kapitels 3, auf der sie natürlich fußt.

Abgesehen von den in der Natur der Sache liegenden, soeben erwähnten, Vieldeutigkeiten wird es nach den Prinzipien der Bestimmungstabellen stets möglich sein, das Raumsystem einer Kristallart zu bestimmen. Einzige Voraussetzung ist, daß Atome mit nicht zu vernachlässigendem Beugungsvermögen in allgemeinster Lage (drei Freiheitsgrade) vorhanden sind und daß nicht etwa für die 1. Ordnung der Spektren in den untersuchten Richtungen die Amplituden zufällig nahezu Null werden, denn im letzteren Falle würde man die Ordnungszahlen falsch bestimmen und damit auch die Röntgenperioden. Ob außerdem noch Atome in niedrigzähligen Lagen vorhanden sind, oder ob mehrere unabhängige Atomlagen allgemeinster Provenienz vorkommen, ist an und für sich gleichgültig. Nehmen aber die Atome nur ausgezeichnete Lagen auf Symmetrieelementen ein, so kann es sehr wohl möglich sein, daß der gesamte Gitterkomplex vieldeutig ist und mehreren Raumsystemen zugeordnet werden kann. Es sei auf die Diskussionen des dritten Abschnittes verwiesen. Dann wird man als Raumsystem natürlich jenes bestimmen, das die höchsten Symmetriebedingungen für die Punktlagen verlangt. Ob die Atomsymmetrien diese Bedingungen erfüllen, läßt sich bis jetzt röntgenometrisch nicht beurteilen.

d. L und δ in ihrer Abhängigkeit von der Punktlage

Aber auch dann, wenn die Atomschwerpunkte auf gewöhnlichen Symmetrieelementen liegen, gibt es hinsichtlich der Belastungen und Ebenenserien gewisse Gesetzmäßigkeiten, deren Berücksichtigung besonders für die Beurteilung der Interferenzmuster oder die Beurteilung der Flächenhäufigkeiten natürlicher Kristallbegrenzungen wichtig ist. Bevor wir daher das allgemeine Verfahren der röntgenometrischen Strukturbestimmung weiter verfolgen, mögen sie in Kürze erwähnt werden.

Gehen durch die Schwerpunkte gewisse Symmetrieelemente in der Form von Spiegelebenen, Drehspiegelachsen mit Drehspiegelebenen oder Drehungsachsen, so wird das Massenteilchen durch die entsprechenden Symmetrieoperationen in sich selbst übergeführt. Es tritt also nicht mehr in der Maximalzahl der elementar verschiedenen Lagen auf. Seine Zähligkeit erniedrigt sich nach Maßgabe der Eigensymmetrie. Dadurch erniedrigt sich auch die Zahl der verschiedenen Δ-Werte, das heißt die Zahl der nichtidentischen Zwischenebenen einer Periode (hkl). Zur Auffindung der Gesetzmäßigkeiten betrachten wir wieder das Beispiel $\mathfrak{O}_h^1$. Ein Punkt [[m n 0]] liegt auf einer Hauptsymmetrieebene (Spiegelebene).

Die Δ-Werte reduzieren sich auf 24, nämlich

0; 2nk; 2mh; 2mh+2nk; mh−mk+nk−nl; mh−mk+nk+nl; mh+mk+nk−nl; mh+mk+nk+nl; mh−ml+nk−nh; mh−ml+nh+nk; mh+ml−nh+nk; mh+ml+nh−nk; mh+mk+nk−nh; mh−mk+nh+nk; mh+mk−nh+nk; mh+mk+nh+nk; nk−nl; nk+nl; 2mh+nk−nl; 2mh+nk+nl; mh−ml; mh+2nk+ml; mh+ml; mh+2nk−ml.

(100) hat 5 Δ-Werte, nämlich 0, 2m, m, m−n, m+n.

(111) hat 4 Δ-Werte: 0, 2n, 2m, 2m + 2n.

(110) hat 8 Δ-Werte: 0, 2n, 2m, 2m+2n, n, 2m+n, m, m+2n.

Die Gesetzmäßigkeit ist nicht auf den ersten Blick erkennbar, die theoretische Überlegung läßt jedoch die Zahlen sofort deuten. Durch die Eigensymmetrie werde der Punkt N-mal in sich selbst übergeführt, wo N die Zahl gleichwertiger Flächen allgemeinster Lage einer Kristallklasse ist, der die gleichen Symmetrieverhältnisse zukommen wie dem Punkte. (Siehe Tabelle auf Seite 404 ff.) Dann wird für alle Flächenserien, die nicht senkrecht auf einem Symmetrieelement stehen, das durch den Punkt geht, die Zahl nichtidentischer Ebenen einer Serie N-mal kleiner. So gibt es im obigen Beispiel für (111) nur noch $\frac{8}{2} = 4$ Δ-Werte. Stehen die Flächen auf einem oder mehreren der gewöhnlichen Symmetrieelemente, die durch den Punkt gehen, senkrecht, so wird in den betreffenden Ebenen das Teilchen durch die Symmetrieelemente nicht in neue Lagen übergeführt. Die Belastung dieser Ebenen ist somit eine geringere, die Zahl der Zwischenebenen erhöht sich, gegenüber der Zahl $\frac{N_1}{N}$, wo N_1 die betreffende Serienzahl bei allgemeinster Punktlage des gleichen Raumsystemes ist. Man muß zunächst aufsuchen, welcher Bruchteil von Massenpunkten auf den senkrecht zu (hkl) stehenden Symmetrieelementen liegt. Aus der speziellen Lage ergibt sich, wie bei der Ableitung der Flächenformen, die Zahl der einem derartigen Ebenenelementarparallelogramm angehörigen Punkte, dadurch auch die Zahl der so belasteten Ebenen einer Elementarperiode. Die übrigen

Massenschwerpunkte bilden stärker belastete Ebenen, da für sie der Punkt allgemeinste Lage besitzt. Die Berechnung ergibt die Zahl dieser Zwischenebenen, und die Summe beider Zahlen bestimmt die Gesamtseriengröße.

Das oben hingeschriebene Beispiel wird den Gang der Berechnung erläutern. Der Ausgangspunkt liegt auf den Hauptsymmetrieebenen. Auf (100) stehen zwei der drei Hauptsymmetrieebenen senkrecht. In diesen Spiegelebenen liegen $\frac{2}{3}$ der Punkte $= 16$ Punkte. Jeder dieser Punkte tritt dann (Lage eines tetragonalen Prismas von C_{4v} der Flächensymmetrie) in einer Ebene 4mal auf. Also gibt es $\frac{16}{4} = 4$ Ebenen mit einer Belastung von 4 Massenteilchen pro Elementarparallelepiped. Die übrigen 8 Punkte besitzen gegenüber ihren Ebenen (100) allgemeinste Lage, treten also der Flächensymmetrie C_{4v} gemäß je 8fach auf. Das heißt, sie liegen alle in einer Ebene. Es gibt somit 4 nichtidentische Ebenen mit 4 Massenpunkten und eine Ebene mit je 8 Massenpunkten parallel (100), total also 5 Ebenen einer Elementarserie, wie oben rechnerisch gefunden. Auf (110) steht eine Hauptsymmetrieebene senkrecht, auf ihr liegt $\frac{1}{3}$ der Punkte $= 8$. Jeder dieser Punkte tritt auf einer Ebene (110) zweimal auf (Pinakoid in C_{2v}). Es gibt somit 4 Ebenen mit je zwei Punkten parallel (110). Die übrigen 16 Punkte besitzen hinsichtlich ihrer Ebenen (110) allgemeinste Lage, sie treten der Flächensymmetrie C_{2v} wegen je zu Vieren auf $= 4$ Ebenen mit je 4 Punkten. Total also $4 + 4$ Ebenen $= 8$ Ebenen der Serie (110).

Diese Beispiele zeigen, wie in jedem Einzelfall der Einfluß besonderer Symmetriebedingungen der Punktlagen auf die Ebenenbelastung der Ebenenserien berechenbar ist. Im allgemeinen treten Ebenen relativ geringer Belastung und von größerer Zahl in denjenigen Richtungen auf, welche senkrecht zu Symmetrieelementen stehen, die durch die Punktlage gehen. Wirksam sind in dieser Weise als Symmetrieelemente nur Drehungsachsen und Spiegelebenen.

Schließlich können [[mnp]] und (hkl) auch gegenseitig so beschaffen sein, daß für bestimmte (hkl)-Werte gleichwertige Punkte komplanar werden, ohne daß besondere Symmetriebedingungen der Lage erfüllt sein müssen. Im allgemeinen werden die Punkte dann Freiheitsgrade besitzen und die Komplanität braucht unter Umständen nur bei gewissen äußeren physikalischen Verhältnissen genau erfüllt zu sein. Sind mehrere verschiedenartige Punktkomplexe vorhanden, so erweitert sich die Aufgabe durch die Kombinationsmannigfaltigkeit außerordentlich. Es können dann verschiedenwertige Punkte infolge von Koordinatenbeziehungen für bestimmte (hkl) komplanar werden. Alle derartigen mehr oder weniger zufälligen Beziehungen werden sich bei der Raumsystems-

bestimmung störend geltend machen, in den wenigsten Fällen aber die richtige Deutung verunmöglichen. Denn diese Beziehungen sind immer an gewisse Zahlenwerte von (hkl) gebunden, gleichgültig ob die untersuchte Ebene einer Symmetriezone angehört oder nicht. Zu falschen Resultaten wird man daher nur gelangen, wenn zufällig eine solche Reduktion der Serienzahl auf Symmetrieeigenschaften zurückgeführt wird, und dies läßt sich durch Betrachtung anderer Ebenen meist vermeiden. Es wird daher gut sein, in Zweifelsfällen Überbestimmungen vorzunehmen, um sich von der richtigen Deutung zu vergewissern. Derartige Beziehungen sind nun aber gerade wichtig, wenn es sich darum handelt, die Koordinaten der einzelnen Massenschwerpunkte zu finden. Auch dafür gibt es einen allgemeinen systematischen Weg. Am sichersten und elegantesten führt er nach dem Braggschen Verfahren zum Ziel.

e. Allgemeine Hinweise zur Bestimmung der Koordinatenwerte der Massenschwerpunkte

(Beispiele für die Strukturbestimmungen)

Die Bestimmung der Translationsgruppe und des Raumsystemes muß der Koordinatenfestlegung vorausgehen. Sie erfolgt nach den erläuterten Prinzipien. Das Braggsche Verfahren liefert dann zugleich die absoluten Größen der Röntgenperioden in der Richtung der Kanten des Elementarparallelepipeds und damit auch der Elementarperioden a, b, c selbst. Diese werden, wie aus der Bestimmungstabelle hervorgeht, in den wenigsten Fällen den Röntgenperioden gleich sein, meistens sind sie ein Mehrfaches davon und die Raumsystemsbestimmung führt ja gerade dazu, diese Verhältnisse zu bestimmen. Es ist auch durchaus möglich, daß das Elementarperiodenverhältnis der Koordinatenachsen dem kristallographischen Achsenverhältnis nicht gleich ist. Das wird die Raumsystemsbestimmung oft etwas komplizieren, ohne sie in irgend einer Weise zu verunmöglichen. Das man in solchen Fällen zunächst Ebenen betrachten muß, die einer Achse parallel gehen, um die Wirkung der dritten Achse auszuschließen, ist selbstverständlich; eine nähere Beschreibung des dann weiter anzuwendenden Verfahrens scheint mir überflüssig zu sein.

Sobald man die absoluten Größen des Elementarparallelepipeds kennt, läßt sich daraus das Volumen berechnen. Anderseits ist es möglich, mittels der Dichte des Kristalles und der bekannten Zahl des Gewichtes eines Wasserstoffatomes das Volumen eines Moleküls der Kristallart zu bestimmen. Ein Vergleich der beiden Volumina zeigt, wie viel Moleküle in einem Elementarparallelepiped vorhanden sind. Naturgemäß muß es immer eine ganze Anzahl sein, und sind von ganzen Zahlen abweichende Bestimmungen auf die verschiedenen Fehlerquellen zurück-

zuführen. Ist M das Molekulargewicht, n die Anzahl der Molekeln im Elementarparallelepiped, V sein Volumen in ccm, s die Dichte des Kristalles, so lautet die Beziehung:

$$n = \frac{V \cdot s}{M \cdot 1{,}64 \cdot 10^{-24}}.$$

Die chemische Formel gibt nun sofort an, wie viele der Atome der gleichen Atomart vom Elementarparallelepiped absorbiert werden. Existieren für die zu untersuchende Verbindung plausible Konstitutionsformeln, so wird man auch meistens richtig beurteilen können, ob eine und dieselbe Atomart in verschiedener Bindung (entsprechend verschiedenen zusammengehörigen Punktkomplexen) auftreten wird. Jetzt muß die Tabelle IV zu Rate gezogen werden. Sie gibt ja über die verschiedenen Zähligkeiten der Punkte im Elementarparallelepiped Aufschluß. Öfters werden gewisse Atome in so geringer Zahl im Elementarparallelepiped vorhanden sein, daß für sie ausgezeichnete Punktlagen ohne oder mit einem oder zwei Freiheitsgraden in Anspruch genommen werden müssen. Für sie brauchen dann nur noch die den Freiheitsgraden entsprechenden Unbekannten bestimmt zu werden. Ein Punktkomplex allgemeinster Lage ist, da wir ja das Raumsystem und die Koordinatentripel gleichwertiger Punkte kennen, bestimmt durch irgend drei zusammengehörige Koordinaten eines seiner Punkte. Die $\frac{1}{t}$- bezw. Δ-Werte der Gleichung (56c) auf Seite 489 lassen sich nun, wie das früher (Seite 477 bis 479) gezeigt wurde, direkt in den noch unbekannten Koordinatenwerten ausdrücken [1]), so daß man Gleichungen für die Amplitudenwerte erhält, die alle zu bestimmenden Koordinaten von Schwerpunkten als Unbekannte enthalten. Es müssen nun so viele vergleichbare Amplitudenwerte experimentell bestimmt werden, als Unbekannte vorhanden sind, dann ist die Auflösung des Gleichungssystemes möglich. Ist die Lösung mehrdeutig, so haben wieder physikalisch-chemische Erwägungen zu entscheiden.

Ein einfaches Beispiel mag zur Erläuterung des allgemeinen Verfahrens, das übrigens in manchen Fällen vereinfacht werden kann, zweckdienlich sein. Es sei das Raumsystem $\mathfrak{C}_{2h}^1$ gefunden worden, im Elementarparallelepiped mögen sich 2 A-, 4 B- und 4 C-Atome befinden. Keinerlei Überlegungen sprechen für die Annahme verschiedener A-, B- oder C-Atomarten im Kristallgebäude, A würde dann eine zweizählige, B und C je eine vierzählige Punktlage einnehmen. Die Tab. IV zeigt, daß es in diesem Raumsystem zweizählige Punktlagen mit einem oder mit zwei Freiheitsgraden gibt,

[1]) Dabei soll stets berücksichtigt werden, ob die Röntgenperiode in der untersuchten Richtung der Elementarperiode gleich oder ob sie nur ein Teil davon ist. Im letzteren Fall wird man von Anbeginn an nur diesen Teil betrachten, muß dann aber die Δ-Werte mit der Teilzahl multiplizieren. Tut man das nicht von Anbeginn an, so wird die Amplitude 1. Ordnung automatisch gleich Null und die Ordnungszahlen verschieben sich.

währenddem der vierzähligen Punktlage drei Freiheitsgrade zukommen. In $\mathfrak{C}_{2h}^1$ lauten die Koordinatenwerte eines zusammenhängenden Komplexes:

$$[\![m\ n\ p]\!]\ [\![m\ \bar{n}\ p]\!]\ [\![m\ n\ \bar{p}]\!]\ [\![m\ \bar{n}\ \bar{p}]\!]$$

Der Nullpunkt kann stets so gewählt werden, daß einem zweizähligen Punkt mit einem Freiheitsgrad die Koordinaten $[\![0\ n_1\ 0]\!]\ [\![0\ \bar{n}_1\ 0]\!]$, einem zweizähligen Punkt mit zwei Freiheitsgraden die Koordinaten $[\![m_1\ 0\ p_1]\!]\ [\![\bar{m}_1\ 0\ \bar{p}_1]\!]$ zukommen. Die Koordinaten eines Schwerpunktes der B-Atome seien $[\![m_2\ n_2\ p_2]\!]$, die eines C-Atomes $[\![m_3\ n_3\ p_3]\!]$. Die Unbekannten sind dann in ersterem Falle n_1, $m_2\ n_2\ p_2$, $m_3\ n_3\ p_3$ im letzteren Falle $n_1\ p_1$, $m_2\ n_2\ p_2$, $m_3\ n_3\ p_3$. Auf den Nullpunkt bezogen werden für irgend eine Ebene (h k l) die $\frac{1}{t}$-Werte der Gleichung (56c) zu:

$+n_1 k;\ -n_1 k;\ m_2 h + n_2 k + p_2 l;\ m_2 h - n_2 k + p_2 l;\ u_2 k - m_2 h - m_2 p;\ -m_2 h - n_2 l - m_2 p;$
$m_3 h + n_3 k + p_3 l;\ m_3 h - n_3 k + p_3 l;\ n_3 k - m_3 h - p_3 l;\ -m_3 h - n_3 k - p_3 l;$
oder zu
$+m_1 h + p_1 l;\ -m_1 h - p_1 l;\ m_2 h + n_2 k + p_2 l;$ usw.

Infolge des Symmetriezentrums gehört zu jedem $+\frac{1}{t}$-Wert ein $-\frac{1}{t}$-Wert, da die $\frac{1}{t}$-Werte als $\frac{2\pi}{t}$ in den Kosinus eingehen, addieren sich diese zusammengehörigen Paare, so daß 5 verschiedene Kosinuswerte auftreten. Durch Einsetzen der so erhaltenen Werte in die Formel (56a) erhält man Gleichungen für A_n und die Verhältnisse verschiedener Amplituden mit den Koordinaten als Unbekannten. (L des Nullpunktes wäre in diesem Falle = Null.) Aus den gemessenen Intensitäten der Spektren verschiedener Ordnung ein- und derselben Ebene erhält man empirisch die Amplitudenverhältnisse.

Ein zweites Beispiel betrifft die Struktur des Kalialaunes, die neuerdings von L. Vegard und H. Schjelderup bestimmt wurde.

Vegard und Schjelderup fanden für die Alaune folgende Verhältnisse der den Spektren 1. Ordnung entsprechenden Abstände senkrecht zu (100), (110), (111)

$$d_{100} : d_{110} : d_{111} = 1 : \sqrt{2} : \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Die Röntgenperioden für die verschiedenen kubischen Raumgruppen für $d_{100} : d_{110} : d_{111}$ sind in Tabelle XI zusammengestellt.

Die Alaune kristallisieren dyakisdodekaedrisch (kubisch paramorph), müssen also Raumsystemen $\mathfrak{T}_h$ zugeordnet werden. Es gibt ein einziges Raumsystem dieser Klasse, das ein Verhältnis $d_{100} : d_{110} : d_{111} = 1 : \sqrt{2} : \frac{2}{\sqrt{3}}$ besitzt, nämlich $\mathfrak{T}_h^2$. Es muß nach den Untersuchungen von Vegard und Schjelderup das Raumsystem der Alaune sein.

Die Tabelle IV gibt über die Zähligkeiten, Freiheitsgrade und Symmetriebedingungen der in einem Elementarwürfel kubischer Raumsysteme vorhandenen Punktlagen Auskunft. (Die Symmetriebedingungen folgen in der Reihenfolge der Zähligkeiten aufeinander.)

In einem Elementarwürfel des Alauns sind vier Moleküle vorhanden. Kalialaun besitzt die Formel $[Al(H_4O_2)_6](SO_4)_2K$ beziehungsweise $[K(H_4O_2)_6](SO_4)_2Al$. Im Elementarwürfel befinden sich somit 4 Al-Atome, 24×2 Sauerstoffatome des Kristallwassers, 24×4 H-Atome, 8 Schwefelatome, 32 Sauerstoffatome des SO_4-Radikales, 4 K-Atome. Anderseits besitzt, wie die Tabelle IV zeigt, $\mathfrak{T}_h^2$ eine 2-zählige Punktlage mit der Symmetrie T, eine 6-zählige Punktlage mit einer Symmetrie V, zweierlei 4-zählige Punktlagen mit den Symmetriebedingungen der Klasse C_{3i}. Allen diesen Punktlagen kommt kein Freiheitsgrad zu, ihre Lage ist eine vollkommen bestimmte. Einen Freiheitsgrad (d. h. beliebige Lage auf einer Drehungsachse) besitzen die 8- und 12-zähligen Punktlagen. Die ersteren liegen auf Trigyren (C_3), die letzteren auf Digyren (C_2). Alle übrigen Punkte ohne nähere Lagenbeschränkung treten im Elementarwürfel 24mal auf. Daraus

können wir sofort schließen, daß im Kalialaun die Lage der K- und Al-Atome durch die zweierlei 4-zähligen Punkte gegeben ist, und daß die 8 Schwefelatome auf den Trigyren liegen müssen. Die 32 Sauerstoffatome des SO_4-Radikales können nicht alle gleichwertig sein. Am einfachsten setzen sie sich aus zweierlei Arten zusammen, die einer 8-zähligen Lage auf den Trigyren und einer beliebigen 24-zähligen Lage entsprechen. Die 48 Sauerstoffatome des Wassers müssen sich auf mindestens zwei 24-zählige Lagen verteilen.

Prüfen wir dieses Ergebnis vom Standpunkte des Chemikers. Die zwei wahrscheinlichsten Varianten der Strukturformeln sind bereits mitgeteilt. Werner nimmt die erstere an. Das Kristallwasser wird aller Wahrscheinlichkeit nach (sonst sind meistens die Sechshydrate die höchsten Formen) Doppelmolekeln bilden, die an Al oder K gebunden sind. Es müssen also zweierlei O-Atome vorhanden sein. Die Gruppierung kann gemäß den Symmetrieeigenschaften der 4-zähligen Punktlagen nur von der Art sein, daß die ursprünglich oktaedrische Lagerung als doppelttrigonalpyramidal (rhomboedrisch) anzusprechen ist.

SO_4 wird zunächst als in erster Linie an K oder Al gebunden erachtet. Da diese Bindung in irgendeiner Weise durch die O-Atome vermittelt werden wird, ist zu erwarten, daß ein ursprüngliches Sauerstofftetraeder in eine trigonale Pyramide verzerrt wird. Dann müssen zweierlei Sauerstoffatome vorhanden sein, deren Zahl sich wie 1 : 3, d. h. wie 8 : 24 verhält.

Wir wählen nun einen der 2-zähligen Punkte zum Koordinatennullpunkt und können sofort das System eines gleichwertigen Punktkomplexes aufstellen. Von jeder Atomart müssen wir die Koordinaten eines Punktes kennen, sie sind für Atome mit Freiheitsgraden die zu ermittelnden Unbekannten. Die beiden 4-zähligen Punktarten (K- und Al-Atomlagen) sind von vornherein durch die Koordinaten $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ bezw. $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ gegeben. Die nur auf den Trigyren liegenden Punkte besitzen Ausgangskoordinaten[1]) mit $x = y = z$. Zur Bestimmung der Örter der S-Atome und der acht besonderen Sauerstoffatome des SO_4-Radikales müssen daher je eine Unbekannte berechnet werden. Bezeichnen wir mit $[\![x_s\ y_s\ z_s]\!]$ die Koordinaten eines S-Atoms, mit $[\![x_1\ x_1\ x_1]\!]$ diejenigen eines der acht Sauerstoffatome, so sind x_s und x_1 die Unbekannten. Die übrigen dreierlei Sauerstoffatomarten (eine von SO_4, zwei von H_2O) entsprechen Punkten allgemeinster Lage. Für jede Art müssen wir daher die Koordinaten x, y, z irgendeines Punktes kennen. Bezeichnen wir sie mit $[\![x_2, y_2, z_2]\!]$ (zu SO_4 gehörig) und $[\![x_3\ y_3\ z_3]\!]$, $[\![x_4\ y_4\ z_4]\!]$ (zu H_2O gehörig), so sind dies zugleich die weiteren Unbekannten. Da die H-Atome wohl von keinem nennenswerten Einfluß auf die röntgenspektroskopischen Erscheinungen sind, so sind durch x_s, x_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, x_4, y_4, z_4 alle eruierbaren Unbekannten gegeben. Es sind deren 11. Aus den Seite 362 angegebenen Koordinatentripeln gleichwertiger Punkte sind, wie früher erläutert, die A_n für irgendeine Ebene als Funktion dieser Unbekannten darstellbar. Berücksichtigt man für den gegebenen Fall, daß die Ebenensätze parallel (100) und (110) symmetrisch in bezug auf die Nulllage erscheinen, diejenigen parallel (111) nur hinsichtlich der Lagen $d = \frac{1}{4}$ oder $\frac{3}{4}$ und daß in (100) die doppelten Koordinatenwerte eingehen, weil infolge von Gleitspiegelebenen schon $\frac{a}{2}$ die Röntgenperiode ist, so erhält man folgende Gleichungen für die Amplituden der reflektierten Wellen n^{ter} Ordnung.

[1]) x, y, z werden hier statt m, n, p geschrieben, um eine Verwechslung mit dem n der Spektrenordnung zu vermeiden: n ist im folgenden somit nur die Ordnungszahl des Spektrums.

Für (100)

$$A_n = 2(KAl)\cos n\pi + (4S)\cos n4\pi x_s + (4O)\,[\cos n4\pi x_1 + \cos n4\pi x_2 + \cos n4\pi y_2 + \cos n4\pi z_2 + \cos n4\pi x_3 + \cos n4\pi y_3 + \cos n4\pi z_3 + \cos n4\pi x_4 + \cos n4\pi y_4 + \cos n4\pi z_4].$$

Für (110)

$$A_n' = 2(KAlS_2O_8) + 2(KAl)\cos n\pi + (4S)\cos n4\pi x_s + (4O)\cos n4\pi x_1 + (4O)\,[\cos n2\pi(x_2+y_2) + \cos n2\pi(x_2-y_2) + \cos n2\pi(x_2+z_2) + \cos n2\pi(x_2-z_2) + \cos n2\pi(y_2+z_2) + \cos n2\pi(y_2-z_2) + \cos n2\pi(x_3+y_3) + \cos n2\pi(x_3-y_3) + \cos n2\pi(x_3+z_3) + \cos n2\pi(x_3-z_3) + \cos n2\pi(y_3+z_3) + \cos n2\pi(y_3-z_3) + \cos n2\pi(x_4+y_4) + \cos n2\pi(x_4-y_4) + \cos n2\pi(x_4+z_4) + \cos n2\pi(x_4-z_4) + \cos n2\pi(y_4+z_4) + \cos n2\pi(y_4-z_4)].$$

Für (111)

$$A_n'' = (4K) + (4Al)\cos n\pi + (6S)\cos n\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi x_s\right) + (2S)\cos n\left(\frac{\pi}{2} + 6\pi x_s\right) + (6O)\cos n\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi x_1\right) + (2O)\cos n\left(\frac{\pi}{2} + 6\pi x_1\right) + (6O)\Big[\cos n\left\langle\frac{\pi}{2} + 2\pi(x_2+y_2+z_2)\right\rangle + \cos n\left\langle\frac{\pi}{2} + 2\pi(x_2-y_2-z_2)\right\rangle + \cos n\left\langle\frac{\pi}{2} + 2\pi(y_2-x_2-z_2)\right\rangle + \cos n\left\langle\frac{\pi}{2} + 2\pi(z_2-x_2-y_2)\right\rangle + \cos n\left\langle\frac{\pi}{2} + 2\pi(x_3+y_3+z_3)\right\rangle + \ldots + \cos n\left\langle\frac{\pi}{2} + 2\pi(z_4-x_4-y_4)\right\rangle\Big].$$

Es sind zur Auflösung der Unbekannten elf Amplituden-Verhältnisse $\frac{A_{n_1}}{A_{n_2}}$ zu bilden. Durch Intensitätsmessungen sind elf solche Verhältnisse empirisch zu bestimmen. Aus den Beobachtungswerten von Vegard und Schjelderup erhält man folgende abgerundeten Zahlenwerte für die Amplituden der reflektierten Wellen in willkürlichen Einheiten, wenn $A_n = \sqrt{I_n} \cdot n$ gesetzt wird, wo I die Identität ist.

Tabelle IV.

	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7	n = 8
(100)	1,7	19	30	11	22	13		
(110)	3	20	19	22	0	38	0	36
(111)	6,5	8	30	11	18	28		

Da sich daraus innerhalb der gleichen Ebenen mehr als elf unabhängige Verhältnisse $\frac{A_{n_1}}{A_{n_2}}$ bilden lassen, muß das Gleichungssystem auflösbar sein. Es wird eine lohnende Aufgabe für Mathematiker sein, einen möglichst einfachen Weg zur Auflösung derartiger Gleichungen anzugeben, treten sie bei der Strukturbestimmung komplizierter Kristalle doch immer auf.

Da die gemachten physikalischen Annahmen ($A_n = \sqrt{I_n} \cdot n$) wohl nur in erster Annäherung Gültigkeit besitzen, mag es vorläufig ebenso zweckmäßig sein, durch Probieren angenäherte und, dem ganzen Strukturbild nach, wahrscheinliche Lösungen zu finden. Derart ist wohl Vegard vorgegangen. Vielleicht, daß in der gefundenen Lösung die Sauerstoffatome den Radikalen unrichtig zugeordnet worden sind.

Vegard und Schjelderup nehmen an, daß die Sauerstoffatome des SO_4-Radikales in den Ecken eines dem Elementargitter ähnlich orientierten Würfels mit dem Zentrum im K-Atom angeordnet seien. Einzige Unbekannte ist dann beispielsweise die Koordinate desjenigen Eckpunktes, der auf der trigonalen Achse liegt. Die Sauerstoffatome teilen

sie in „sechs Gruppen von je vier", die jeweilen Ecken von Tetraeder bilden, welche ihrerseits wieder kubisch um den Nullpunkt angeordnet sind. (Zwei Unbekannte.) Die Schwefelatome sind von vornherein richtig auf den trigonalen Achsen angenommen. (Eine Unbekannte.) Die Autoren reduzieren somit die 11 Unbekannten willkürlich auf vier. Gegen eine solche Reduktion ist zwecks eines ersten Überschlagsverfahrens an sich nichts einzuwenden, besonders dann nicht, wenn dafür chemische oder geometrische Anhaltspunkte vorhanden sind. Das ist nun bei der vorgeschlagenen Reduktion durchaus nicht der Fall und auch die rein geometrische Beschreibung des resultierenden Strukturbildes erweckt auf diese Weise ganz falsche Vorstellungen. Die Schwerpunktslage der K-Atome besitzt die Symmetrie der rhomboedrischen Kristallklasse. Wird somit die Punktverteilung richtig durchgeführt (und Vegard und Schjelderup nehmen genau die Symmetrie von $\mathfrak{T}_h^2$ für das gesamte Raumsystem an), so müssen schließlich sechs von den acht darum würfelförmig gruppierten Sauerstoffatomen ganz anders von den übrigen Atomen umgeben sein, als die zwei auf den trigonalen Achsen liegenden. Es ist dann 1. fraglich, ob sie dem gleichen Radikal angehören und 2. unwahrscheinlich, daß die beiderlei Arten genau gleichweit von den K-Atomen entfernt sind. Durch das Zentrum der Sauerstofftetraeder geht anderseits nur eine zweizählige Achse, je zwei der vier Atome werden daher ebenfalls ganz andere relative Lage besitzen als die übrigen zwei.

Sehr schön kommt nun das in der Ausrechnung, die Vegard und Schjelderup geben, zum Ausdruck und es fehlen in der angenähert wahrscheinlichen Lösung nur die unabwendbaren Schlußfolgerungen. Nach ihrer Deutung finden sie als wahrscheinliche Werte die folgenden:

$$x_5 = \tfrac{5}{8};\ [\![x_2, y_2, z_2]\!] = [\![\tfrac{5}{72}, \tfrac{5}{72}, \tfrac{31}{72}]\!]$$
$$x_1 = \tfrac{5}{72};\ [\![x_3, y_3, z_3]\!] = [\![\tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{11}{24}]\!] \qquad [\![x_4, y_4, z_4]\!] = [\![\tfrac{1}{8}, \tfrac{7}{8}, \tfrac{5}{24}]\!].$$

Die vorgenommene Reduktion der Unbekannten findet ihren Ausdruck in den strukturtheoretisch rein willkürlichen Beziehungen:

$$x_2 = x_1;\ y_2 = x_1;\ y_3 = \tfrac{1}{2} - x_1 \qquad x_3 = x_4;\ y_3 = 1 - y_4;\ z_3 = z_4 + \tfrac{1}{4}.$$

Die Übereinstimmung mit den Beobachtungsergebnissen ist eine ziemlich gute, nimmt man daher trotz des anfechtbaren Ausgangspunktes die Lösung als eine erste angenäherte an, so weiß man nun sofort, durch welche noch vorhandenen Freiheiten eine bessere Übereinstimmung zu erzielen ist. Ich möchte hier nur noch darauf aufmerksam machen, daß auch schon die Vegardsche Annahme zu einer Atomverteilung führt, die berechtigte Zweifel in die richtige Zuordnung der O-Atome zu einzelnen Radikalen aufkommen läßt. Konstruiert man nämlich nach den Angaben das Punktsystem, so erkennt man, daß an je sechs von den um K herumgruppierten Sauerstoffatomen des angeblichen SO_4-Komplexes sehr nahe O-Atome des H_2O liegen, während die übrigen O-Atome des Kristallwassers isoliert dem Al-Atom benachbart sind. So ist dem Sauerstoffatom $[\![\frac{5}{72}, \frac{5}{72}, \frac{31}{72}]\!]$ das Sauerstoffatom $[\![\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{11}{24}]\!]$ benachbart. Die Koordinatendifferenzen sind $\frac{1}{18}, \frac{1}{18}, \frac{1}{36}$. Das ist chemisch nicht sehr wahrscheinlich. Diese O-Atome liegen aber um das K-Atom gerade, wie es für die O-Atome der Wasserdoppelmolekeln um das K- oder Al-Atom erwartet werden muß. Die Sauerstoffatome des Komplexes $[\![\frac{5}{72}, \frac{5}{72}, \frac{31}{72}]\!]$ sind daher kaum als zum SO_4-Radikal gehörig zu betrachten, sie bilden mit $[\![\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{11}{24}]\!]$ die O-Atome der Doppelmoleküle des Kristallwassers. Den SO_4-Radikalen angehörig sind außer $[\![\frac{5}{72}, \frac{5}{72}, \frac{5}{72}]\!]$ die O-Atome von $[\![\frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \frac{5}{24}]\!]$, die mit den ersteren zusammen die Ecken einer trigonalen Pyramide

bilden, in deren Innern die Schwefelatome sitzen. Die schematischen Figuren 1 und 2b wären dann verwirklicht, die Trigyren würden Molekülachsen sein, was mit der bevorzugten Oktaederfläche des Wachstums in guter Übereinstimmung ist. Von großem Interesse für den Chemiker wäre die eindeutige Entscheidung, ob die Wasserdoppelmolekeln um das Al- oder K-Atom gruppiert sind. Nach der angedeuteten Vegardschen Lösung wären sie um das K-Atom gruppiert, es ist aber nicht ausgeschlossen, daß unter Benutzung aller Freiheitsgrade auch andere Zuordnungen möglich sind, um so mehr da nur parallel (111) Unterschiede bemerkbar sein können.

Es ist nicht das erste Mal, daß bei vom chemischen Standpunkte aus anfechtbarer Zuordnung von Atomen sich durch die Ausrechnung automatisch die richtige Verteilung einstellt (z. B. Spinell); ein Beweis, wenn ein solcher überhaupt nötig ist, daß zwischen Strukturchemie und Kristallstruktur enge Beziehungen herrschen, die man nicht vernachlässigen darf. Die Komplexstruktur in den Kristallen gibt uns direkt Auskunft über molekulare Aggregationen auch im flüssigen Zustand.

Die angeführten Beispiele mögen zur Erläuterung des allgemeinen Braggschen Verfahrens der Strukturbestimmung komplizierter Kristalle genügen, im übrigen muß auf die Bestimmungstabellen verwiesen werden.

Bei mehreren Unbekannten wird die Auflösung der Gleichungen Schwierigkeiten bereiten, man kann sich dann oft so helfen, daß man durch bewußtes Probieren zunächst annähernd wahrscheinliche Bauschallösungen aufsucht. Finden sich in Null stark belastete Massenebenen, so werden die Amplituden n^{ter} Ordnung relativ groß werden, wenn t von $\frac{1}{t}$ gleich n oder nahe gleich n ist. Gleichzeitig werden auch durch Interferenz die Amplituden von $n = 2t, 3t$ usw. verstärkt werden, währenddem eine Schwächung für die $\frac{t}{2}, \frac{3t}{2}, \frac{5t}{2} \ldots$ Ordnungen eintritt. Derartige mehr qualitative Überlegungen, die sich übrigens zahlentheoretisch auch in Formeln kleiden lassen, werden oft schon zu angenäherten Lösungen führen.

Auch aus einer genügenden Anzahl genau ausgemessener Interferenzmuster der Lauediagramme lassen sich die absoluten Größen des Elementarparallelepipeds bestimmen. Ermöglicht wird dies durch den bereits erwähnten, meist ganz scharfen Abbruch des Spektralbereiches von Röntgenröhren nach niederen Wellenlängen hin. Eine kleinste Wellenlänge tritt meistens in noch relativ großer Intensität auf, so daß eine ganze Anzahl von Flächen annähernd mit ihr in 1. Ordnung Interferenzbilder erzeugen. Es sind das die Flächenserien mit den kleinsten Röntgenperioden des in Frage kommenden Diagrammes. Durchstrahlt man in Richtung einer kristallographischen Achse, beziehungsweise in Richtung einer Kante des Elementarparallelepipeds, und sucht man diejenigen Flächen aus, für welche die Röntgenperiode elementar ist, so sind es für Interferenzmuster senkrecht zur a-Achse die Flächen mit $\frac{h}{\sin^2 \alpha}$ = Maximum. (α = Neigungswinkel des einfallenden Strahles zur

Ebene (hkl). Ist λ_p die kleinste Wellenlänge des benutzten Spektralbereiches, so erhält man für a einen unteren Grenzwert

$$a \sim \frac{\lambda_p \cdot h}{2 \sin^2 \alpha}$$

Ebenso erhält man für Interferenzmuster senkrecht zu b nach analoger Auswahl

$$b \sim \frac{\lambda_p \cdot k}{2 \sin^2 \alpha} \text{ usw.}$$

Die richtigen a-, b-, c-Werte werden nun die aus den Molekularvolumen berechneten nächstbenachbarten Zahlenwerte sein, welchen eine ganze Anzahl von Molekülen im Raume entspricht. Die weitere Bestimmung der Koordinaten der Massenschwerpunkte nach dem Laueverfahren ist etwas komplizierter. Da die Schwärzung der Interferenzpunkte auf der photographischen Platte nicht nur von den Amplituden der resultierenden Wellen abhängig ist, muß ein sogenanntes unabhängiges Verfahren ausgearbeitet werden, wobei nur Punkte berücksichtigt werden, für die man in erster Annäherung Proportionalität zwischen Intensität und Schwärzung annehmen kann und bei denen nur eine Interferenz von Wellen 1. Ordnung in Frage kommt. Der weitere Verlauf der Untersuchungen entspricht dann dem des Braggschen Verfahrens.

Bei wenig komplizierten Verbindungen vereinfacht sich der Weg natürlich erheblich. Bragg und Vegard und Debye bestimmten so, ohne Rücksichtnahme auf die bereits bekannten Eigenschaften der verschiedenen Raumsysteme, eine Reihe von Kristallstrukturen. Auf diese grundlegenden Arbeiten muß verwiesen werden. Hingegen möchte ich zum Schlusse dieser Ausführungen noch zeigen, wie oft schon aus den statistischen Gesetzmäßigkeiten der natürlichen Flächenbegrenzung Schlüsse auf die Art des Raumsystemes gezogen werden können. In neuerer Zeit sind in ganz unzureichender Weise für Calcit und Pyrit andere als die Braggschen Strukturen vorgeschlagen worden, und doch stehen gerade diese in außerordentlich guter Übereinstimmung mit den kristallographischen Daten, so daß sie sich bis zu einem gewissen Grade hätten voraussagen lassen.

Der paramorph-hemiedrische, kubisch-kristallisierende Pyrit ist dadurch ausgezeichnet, daß ⟨110⟩ als Flächenform fast ganz fehlt, ⟨210⟩ hingegen eine große Rolle spielt. Beide stehen auf den Hauptsymmetrieebenen senkrecht, müßten somit bei Anwesenheit von Spiegelebenen im Diskontinuum Ebenenserien mit gleichviel Zwischenebenen besitzen. Die Elementarabstände selbst verhalten sich wie $\frac{1}{\sqrt{2}}$ zu $\frac{1}{\sqrt{5}}$; ⟨110⟩ müßte daher bei größter Belastung bedeutend größere Δ-Werte besitzen. Wenn nun ⟨210⟩ geometrisch-kristallographisch bevorzugt ist, so läßt sich erwarten, daß als Vorbedingung für ein derartiges Verhalten

eine strukturelle Ungleichwertigkeit der beiden Ebenenserien vorhanden ist, die der normalen Folge entgegenwirkt. Der Grund könnte in einer besonderen Massenschwerpunktlage oder aber in einer Gleitoperation, oder in beiden gesucht werden. Über die auf den Symmetrieverhältnissen beruhenden Einflüsse gibt die Tabelle X Auskunft. Einzig das Raumsystem $\mathfrak{T}_h^6$ besitzt eine individuelle Reihenfolge der verlangten Art. In diesen Raumsystemen hat (210) wie (100) nur 12 Zwischenebenen, während (110) 24 hat. Jedes Elementarparallelogramm von (210) oder (100) absorbiert von einer gleichwertigen Punktart allgemeinster Lage 2 Punkte; (110) nur je einen Punkt. Nun ist aber in $\mathfrak{T}_h^6$ das Oktaeder bei allgemeinster Punktlage die absolut wichtigste Fläche (8 Zwischenebenen zu 3 Punkten). Das Oktaeder ist im Pyrit eine durchaus häufige Form, rangiert aber zweifellos hinter ⟨100⟩. Wir könnten daraus den Schluß ziehen, daß alle wesentlichen Massenteilchen auf trigonalen Drehungsachsen liegen, denn dadurch wird die Bedeutung von ⟨111⟩ relativ verringert. In der Tat schreibt Bragg (siehe Seite 461 und Fig. 180) Pyrit eine Struktur zu, die den Kristall in das Raumsystem $\mathfrak{T}_h^6$ bringt. Sowohl die Fe- als die S-Atomzentren liegen auf trigonalen Drehungsachsen. Betrachtet man die Reihenfolge der Ebenen hinsichtlich Belastung und Abstand, so findet man allerdings für (110) noch ganz ähnliche Werte wie für (201). Aber gerade der Umstand, daß (201) bezw. (210) der Fläche (110) nahe zu stehen kommt, ist notwendige Vorbedingung dafür, daß besondere Umstände ihre Wachstumsgeschwindigkeit noch kleiner gestalten können. Übrigens würde der Wert $x = \frac{1}{8}$ der Koordinatentripel der S-Schwerpunktslagen von Seite 473 den geometrischen Verhältnissen noch besser gerecht, als der dort angenommene Wert $\frac{1}{10}$. Man würde dann erhalten:

(110)
L: 1,41 (A + B) — 1,41 B — 1,41 (A + B) — 1,41 B — 1,41 (A + B)
δ: 0,18 0,18 0,18 0,18

(201)
L: 0,89 A — 1,78 B — 0,89 A — 1,78 B — 0,89 A
δ: 0,05 0,17 0,17 0,05

Die in ganz kleinen Abständen aufeinanderfolgenden Ebenen 1,78 B — 0,89 A — 1,78 B von (201) lassen sich gewissermaßen zu einer „Ebene" sehr starker Belastung zusammenfassen, auf die im relativ großen Abstand 0,17 eine Ebene 0,89 A folgt, währenddem für (110) eine derartige Komplexzusammenfassung nicht möglich ist.

Ein interessantes Beispiel ist ferner Calcit (siehe Tabelle Seite 515).

Der Kristallograph kann zunächst durch Wahl der Einheitsfläche das Achsenverhältnis bestimmen. Das Verhältnis der Elementarperioden wird bei einigermaßen zweckmäßiger Wahl diesem Verhältnis gleichkommen oder ein Vielfaches davon sein. Es lassen sich jetzt die Bravais'schen (hexagonalen) Indizes der wichtigsten Flächen bestimmen

	Wichtigste Kristallformen von Calcit (rhomboedr. holoedr.)				Strukturelle Berechnung		
	Gewöhnliche Aufstellung		c-Achse viermal so groß		Rhomboeder-bedingung	Quersumme der Millerschen Indizes	
	nach Miller	nach Bravais	nach Miller	nach Bravais	k + l − h	Gew. Aufstellung	c-Achse vierfach
Rhomboeder	100	$10\bar{1}1$	211	$10\bar{1}4$	3	1	4
	110	$01\bar{1}2$	332	$01\bar{1}8$	9	2	8
	$11\bar{1}$	$02\bar{2}1$	110	$01\bar{1}2$	3	1	2
	$3\bar{1}\bar{1}$	$40\bar{4}1$	100	$10\bar{1}1$	0	1	1
	$3\bar{2}\bar{2}$	$05\bar{5}1$	$14\cdot\bar{1}\cdot\bar{1}$	$05\bar{5}4$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	12
	$9\bar{4}\bar{4}$	$13\cdot0\cdot\bar{1}\bar{3}\cdot1$	$10\cdot\bar{3}\cdot\bar{3}$	$13\cdot0\cdot\bar{1}\bar{3}\cdot4$	− 9	1	4
Skalenoeder	$2\bar{1}\bar{1}$	$10\bar{1}0$	$2\bar{1}\bar{1}$	$10\bar{1}0$	$\bar{1}$	0	0
	$10\bar{1}$	$11\bar{2}0$	$10\bar{1}$	$11\bar{2}0$	0	0	0
	111	0001	111	0001	1	3	3
	$20\bar{1}$	$21\bar{3}1$	301	$21\bar{3}4$	3	1	4
	201	$2\bar{1}\bar{1}3$	534	$2\cdot\bar{1}\cdot\bar{1}\cdot12$	9	3	12
	301	$21\bar{3}4$	754	$2\cdot1\cdot\bar{3}\cdot16$	15	4	16
	$30\bar{2}$	$32\bar{5}1$	$41\bar{1}$	$32\bar{5}4$	3	1	4
	$30\bar{1}$	$31\bar{4}2$	521	$31\bar{4}8$	6	2	8
	401	$31\bar{4}5$	965	$3\cdot1\cdot4\cdot20$	18	5	20
	$21\bar{2}$	$13\bar{4}1$	$32\bar{1}$	$13\bar{4}4$	6	1	4

und prüfen, ob sie der Bedingung einer rhomboedrischen Translationsgruppe genügen ($k + l - h$ bezw. bei anderer Aufstellung $h + l - k =$ durch 3 ganzzahlig teilbar). Alle wichtigsten Flächen am Kalkspat genügen dieser Bedingung, wie Kolonne 5 (bezogen auf die neue Aufstellung) der Tabelle auf Seite 515 zeigt. Ein rhomboedrisches Gitter ist also zweifellos vorhanden. Rhomboedrische Raumsysteme der holoedrischen Klasse gibt es zwei. Das eine besitzt vertikale Spiegelebenen, das andere Gleitspiegelebenen. Beim ersteren folgen sich die Rhomboeder in normaler Reihenfolge, beim zweiten sind in bezug auf Ebenenbelastung und Ebenenserie diejenigen bevorzugt, welche in Bravaisschen Indizes l als gerade Zahl haben, beziehungsweise bei denen die Quersumme der Millerschen Indizes eine gerade Zahl ist. (Im ersteren Falle bezieht sich die Gleittranslation auf die z-Achse allein, im letzteren Falle in Form von Komponenten auf alle drei Koordinatenachsen). Betrachtet man die Indizes der Rhomboeder nach der gewöhnlichen Aufstellung (Spaltungsrhomboeder = (100)), so erkennt man merkwürdige Abweichungen. Die Millersche Indizesquersumme ist vorwiegend 1, in

merkwürdiger Abweichung dazu ist (110) eine der wichtigsten Flächen. l der Bravais'schen Koordinaten ist vorwiegend 1, trotzdem die auf a-Achsen bezüglichen Indizes relativ groß werden können. Da somit mit einer sehr wichtigen Ausnahme, die jetzt vollständig aus der Reihe fällt, ungerade Indizesbedingungen bevorzugt sind, was strukturell nicht erklärlich wäre, so ist naheliegend, daß das Elementarparallelepiped falsch gewählt ist und das Achsenverhältnis c : a 2 oder 4 mal so groß angenommen werden muß. Dann werden natürlich die l-Indizes der Bravais'schen Symbolisierung alle gerade und es ist nun eine gesetzmäßige und deutbare Folge vorhanden. Das nächste positive Rhomboeder ist (4041), man muß also c : a mit 4 multiplizieren. Dann erhält man als Quersumme der Millerschen Indizes die Zahlen der letzten Spalte unserer Tabelle. Sie sind für die Rhomboeder (ausgenommen das Einheitsrhomboeder) zunächst alle geradzählig, es muß somit wohl ein Raumsystem mit Gleitspiegelebenen, nämlich D_{3d}^6 vorliegen. Außerdem aber fehlen unter den wichtigsten Flächen die Quersummen 6 und 10, während 8 und 12 vorhanden sind.

Ferner ist das wichtigste Rhomboeder (Spaltungsrhomboeder) durch die kleinste durch 4 teilbare Quersummenzahl, nämlich 4 gekennzeichnet, und ein relativ kompliziertes Rhomboeder ($10 \cdot \bar{3} \cdot \bar{3}$), das kaum erwartet würde, besitzt ebenfalls diese Quersummenzahl. Betrachtet man die Skalenoederquersummen nach der neuen Aufstellung, so sieht man, daß die der wichtigsten Flächenformen alle durch 4 teilbare Indizesquersummen ergeben. Es muß sich somit hierbei um eine von den Symmetriebedingungen losgelöste Eigenschaft handeln, die allen Flächen zugute kommt. Sie kann nur auf einer Spezialisierung wichtiger Schwerpunktslagen beruhen. Solche wichtige Punkte müssen in $\frac{x}{4}, \frac{y}{4}, \frac{z}{4}$ des Elementarrhomboeders liegen, dann sind notwendigerweise alle die Flächen ausgezeichnet, für welche die Millersche Indizesquersumme nicht nur geradzahlig, sondern durch 4 teilbar ist. In der Tat ist das ein Kennzeichen der Struktur von Calcit, die Bragg aus ganz anderen Daten berechnet hat. Das Elementarrhomboeder ist nicht das Spaltungsrhomboeder, sondern darauf bezogen $(3\bar{1}\bar{1})$. Die Raumgruppe D_{3d}^6 ist verwirklicht und die Schwerpunkte von CO_3 liegen in $\frac{x}{4}\frac{y}{4}\frac{z}{4}, \frac{3x}{4}\frac{3y}{4}\frac{3z}{4}$, wenn die Ca-Schwerpunkte die Ecken und Mitten des Elementarrhomboeders einnehmen. Das Spaltungsrhomboeder ist dann die einfachste Form mit durch 4 teilbarer Indizesquersumme, deshalb auch die wichtigste. (332) = früher (110) fällt nun nicht mehr aus der Reihe, es ist die nächsteinfache Fläche, deren Indizesquersumme durch 4 teilbar ist. Die zwei einzigen häufigeren Rhomboeder mit nicht durch 4 teilbarer Quersumme besitzen in der neuen Aufstellung so einfache Indizes (110) und

(100), daß sie erwartet werden müssen. Es scheint mir daher außer Frage zu sein, daß die Strukturdeutung von Bragg im großen und ganzen richtig ist und für den genialen Blick des Forschers beredtes Zeugnis ablegt, sind doch alle diese Überlegungen bei der Aufstellung des Strukturschemas nicht berücksichtigt worden. (Eingehend diskutiert wurde die Struktur des Kalkspates von E. Schiebold in seiner Dissertationsarbeit an der Universität Leipzig, 1918).

f. Weitere analytisch-geometrische Beziehungen der Massenverteilung

Die Bestimmungen von L und δ sind aber nur ein kleiner Teil einer analytisch-geometrischen Untersuchung gegebener Massengruppen. Bei der Diskussion physikalischer und chemischer Fragen wird man vor alle möglichen Aufgaben der analytischen Geometrie des Raumes gestellt. Die am Anfang dieses Abschnittes zusammengestellten Substitutionsgleichungen gestatten die Verwendung von Formeln, wie sie sich in den mathematischen Lehrbüchern vorfinden. Manchmal ist auch auf das im ersten Kapitel besprochene Scharenproblem Rücksicht zu nehmen.

Es kann nicht der Zweck dieses Buches sein, rein analytisch-geometrische Formeln abzuleiten. Auch eine größere auf den besonderen Zweck zugeschnittene Formelsammlung halte ich für nicht wünschenswert. Man packt eine Aufgabe dieser Art am besten ganz frisch an und sucht die unter den Umständen einfachste Lösung auf. Meistens empfiehlt sich ein besonderes Verfahren, das dann rascher und eleganter zum Ziel führt als die Anwendung einer für alle Fälle gültigen Formel. So mögen denn einige Hinweise genügen:

Der Winkel zweier durch a, b, c, α, β, γ des Elementarparallelepipeds und $(h_1 k_1 l_1)$, $(h_2 k_2 l_2)$ gegebenen Ebenenscharen ergibt sich aus:

$$\cos\varepsilon = \frac{1}{J_{(h_1 k_1 l_1)} \cdot J_{(h_2 k_2 l_2)}} \left\{ \begin{array}{l} h_1 h_2 b^2 c^2 \sin^2\alpha + k_1 k_2 a^2 c^2 \sin^2\beta + \\ \quad l_1 l_2 a^2 b^2 \sin^2\gamma + \\ (k_1 h_2 + k_2 h_1)\, a b c^2 (\cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma) + \\ (h_1 l_2 + h_2 l_1)\, a b^2 c\, (\cos\gamma\cos\alpha - \cos\beta) + \\ (k_1 l_2 + k_2 l_1)\, a^2 b c\, (\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha) \end{array} \right\} \quad (57)$$

Für rhombische Elementarparallelepipede reduziert sich die Formel auf:

$$\cos\varepsilon = \frac{1}{J_{(h_1 k_1 l_1)} \cdot J_{(h_2 k_2 l_2)}} \left\{ h_1 h_2 b^2 c^2 + k_1 k_2 a^2 c^2 + l_1 l_2 a^2 b^2 \right\} \quad (58)$$

Rechnen wir die J nach den Formeln (50) auf Seite 464 aus, so erhalten wir für die tetragonale Abteilung:

$$\cos\varepsilon = \frac{c^2(h_1 h_2 + k_1 k_2) + a^2 l_1 l_2}{\sqrt{c^2(h_1^2 + k_1^2) + a^2 l_1^2}\ \sqrt{c^2(h_2^2 + k_2^2) + a^2 l_2^2}} \quad (59)$$

für die kubische Abteilung

$$\cos\varepsilon = \frac{h_1 h_2 + k_1 k_2 + l_1 l_2}{\sqrt{h_1^2 + k_1^2 + l_1^2}\ \sqrt{h_2^2 + k_2^2 + l_2^2}} \quad (60)$$

Bei orthohexagonalem Elementarparallelepiped mit $a = b\sqrt{3}$ wird

$$\cos\varepsilon = \frac{c^2(h_1h_2 + 3k_1k_2) + 3b^2l_1l_2}{\sqrt{c^2(h_1^2 + 3k_1^2) + 3b^2l_1^2}\ \sqrt{c^2(h_2^2 + 3k_2^2) + 3b^2l_2^2}} \quad (61)$$

Der auf die Kantentranslationen des Elementarparallelepipeds bezogene Parameter einer Geraden ist nach (19) auf Seite 19

$$T^2 = a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 + 2bcvw\cos\alpha + 2cawu\cos\beta + 2abuv\cos\gamma$$

Die „Reihendichte" beziehungsweise Geradenbelastung läßt sich in ganz analoger Weise bestimmen, wie die Ebenenbelastung. Es sind zunächst die Bedingungen aufzusuchen, denen ein auf einer gegebenen Geraden liegender Punkt genügen muß.

Zur Berechnung des Abstandes zweier paralleler Geraden $[uvw]^{B_1C_1}$ und $[uvw]^{B_2C_2}$ müssen wir einige Hilfsgrößen einführen.

Es seien:

$$F = b(B_2 - B_1)(abuv + acuw\cos\alpha + u^2a^2\cos\gamma) + c(C_2 - C_1)(acuw + abuv\cos\alpha + u^2a^2\cos\beta)$$

$$G = [c(C_2 - C_1)vb - b(B_2 - B_1)wc][wc + vb\cos\alpha + ua\cos\beta] - b(B_2 - B_1)(u^2a^2 + abuv\cos\gamma + acuw\cos\beta)$$

$$H = [b(B_2 - B_1)wc - c(C_1 - C_2)vb][vb + wc\cos\alpha + ua\cos\gamma] - c(C_2 - C_1)(u^2a^2 + abuv\cos\gamma + acuw\cos\beta)$$

Dann ist der Abstand P der beiden parallelen Geraden gegeben durch:

$$P = \frac{\sqrt{F^2 + G^2 + H^2 + 2FG\cos\gamma + 2FH\cos\beta + 2GH\cos\alpha}}{T^2_{(uvw)}} \quad (62)$$

Für rechtwinklige Elementarparallelepipede vereinfacht sich die Formel ganz erheblich.

Den Winkel zweier durch die Indizes gegebenen (auf ein bestimmtes Elementarparallelepiped bezogenen) Geradenscharen findet man aus:

$$\cos\varrho = \left| \frac{a^2u_1u_2 + b^2v_1v_2 + c^2w_1w_2 + bc(v_1w_2 + w_1v_2)\cos\alpha + ac(w_1u_2 + u_1w_2)\cos\beta + ab(u_1v_2 + v_1u_2)\cos\gamma}{T_{(u_1v_1w_1)} \cdot T_{(u_2v_2w_2)}} \right| \quad (63)$$

Die Bedingung, daß die zwei Scharen aufeinander senkrecht stehen, ist somit identisch mit der, daß der Zähler des obigen Bruches Null wird. Eine Geradenschar [uvw] ist gegen eine Ebenenschar unter einem Winkel δ geneigt. Man findet den Neigungswinkel aus:

$$\sin\delta = \frac{abc\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma}\,(uh + kv + wl)}{J_{(hkl)} \cdot T_{(uvw)}} \quad (64)$$

Der Neigungswinkel ist gleich Null, das heißt die Geradenschar ist der Ebene parallel, wenn $(uh + kv + wl) = 0$ ist.

$$\text{Ist } (uh + kv + wl = \frac{J_{(hkl)} \cdot T_{(uvw)}}{abc\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma}} \tag{65}$$

so ist $\sin\delta = 1$, d. h. $\delta = 90^0$. Diese Gleichung ist daher die Normalenbedingung.

Als besondere Fälle ergeben sich die Neigungswinkel der Geraden gegen die Koordinatenebenen.

Gegenüber (100) erhält man:

$$\sin\delta_1 = \frac{au}{\sin\alpha\, T_{(uvw)}}\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma} \tag{66}$$

Gegenüber (010):

$$\sin\delta_2 = \frac{bv}{\sin\beta\, T_{(uvw)}}\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma} \tag{67}$$

Gegenüber (001):

$$\sin\delta_3 = \frac{cw}{\sin\gamma\, T_{(uvw)}}\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma} \tag{68}$$

Die Normalengleichungen spielen eine große Rolle für die Bewertung der Zwillingsstrukturen und die Aufstellung der Zwillingsgesetze. Sie seien deshalb noch in einer für die Rechnung bequemeren Form abgeleitet.

Eine Geradenschar steht auf einer Ebene senkrecht, wenn sie auf zwei dieser Ebene parallelen Geraden senkrecht steht. Als die zwei die Ebene bestimmenden Geraden wählt man zweckmäßig die, welche den Schnittlinien mit (001) und (100) parallel gehen. Ihre Indizes sind respektive $\left[\frac{1}{h}, \frac{\bar{1}}{k}, 0\right]$ und $\left[0, \frac{\bar{1}}{k}, \frac{1}{l}\right]$.

Gleichung (63) liefert die Bedingungen für $\varrho = 90^0$ zwischen jeder von diesen beiden Geraden und [uvw].

Sie lauten:

$$\left.\begin{aligned} 1.\ &\frac{a^2}{h}u + \left(-\frac{b^2}{k}v\right) + \left(-\frac{bc}{k}w\cos\alpha\right) + \frac{ac}{h}w\cos\beta + \\ &+ \frac{ab}{h}v\cos\gamma + \left(-\frac{ab}{k}u\cos\gamma\right) = 0 \\ 2.\ &\left(-\frac{b^2}{k}v\right) + \frac{c^2}{l}w + \left(-\frac{bc}{k}w\cos\alpha\right) + \frac{bc}{l}v\cos\alpha + \\ &+ \frac{ac}{l}u\cos\beta + \left(-\frac{ab}{k}u\cos\gamma\right) = 0 \end{aligned}\right| \tag{69}$$

Beide Gleichungen müssen gleichzeitig erfüllt sein.

Für die monokline Abteilung spezialisieren sie sich zu:

$$\frac{a}{h}(au + cw\cos\beta) = +\frac{v}{k}b^2 = \frac{c}{l}(cw + au\cos\beta) \tag{70}$$

In der rhombischen Abteilung lauten die Bedingungen:

$$\frac{a^2}{h}u = +\frac{b^2}{k}v = \frac{c^2}{l}w \qquad (71)$$

Für rhomboedrische Kristalle bezogen auf Millersche Indizes und ein Elementarrhomboeder erhält man:

$$\frac{1}{h}u + \left(\frac{w+v}{h} - \frac{w+u}{k}\right)\cos\alpha = \frac{1}{k}v = \frac{1}{l}w + \left(\frac{u+v}{l} - \frac{w+u}{k}\right)\cos\alpha \qquad (72)$$

Man kann so zu einer gegebenen Ebene mit Leichtigkeit die (im allgemeinen nicht rationalen) Indizes der Normalen auffinden und ersieht daraus, ob Gittergeraden einfacher rationaler Indizeszahlen etwa quasinormal auf der Ebene stehen. Das letztere ist von Bedeutung für die Zwillingsbildung. Erfahrungsgemäß fungieren als Zwillingsebenen höherer Ordnung einfache Netz-Ebenen mit darauf quasinormal stehenden einfachen Gitterlinien oder als Zwillingsachsen Gitterlinien, die quasinormal auf einfachen Netzebenen stehen. Einige Beispiele der Berechnung seien angeführt. Gleichung (69) liefert folgende Bedingungen, die notwendigerweise zwischen den Indizes von Ebenen (0kl) und ihren Normalen [uvw] in der monoklinen Abteilung erfüllt sein müssen. b ist gleich 1 gesetzt, das Achsenverhältnis a : 1 : c somit in Rechnung gestellt.

$$au = -cw\cos\beta$$
$$vl = +c^2kw\sin^2\beta$$

Daraus ergibt sich $w = \dfrac{u}{-\frac{c}{a}\cos\beta} = \dfrac{vl}{kc^2\sin^2\beta}$

Sollen u, v, w einfache rationale Zahlen sein, wenn k, l solche sind, so müssen $\frac{c}{a}\cos\beta$ und $c^2\sin^2\beta$ in einfachen rationalen Zahlen (ganzen Zahlen oder einfachen Brüche) ausdrückbar sein. Ist das nicht streng aber nahezu der Fall, so besitzt jede Ebene der betreffenden Zone eine relativ einfache Gitterlinie als Quasinormale.

Jeder einfachen Netzebene der rhombischen Abteilung läßt sich eine einfache Gittergerade als Normale zuordnen, wenn a^2 und c^2 mit einfachen rationalen Zahlen interpretiert werden können. Auf einer Rhomboederfläche (hhl) steht eine Gittergerade [uuv] senkrecht, wenn

$$\cos\alpha = \frac{lv - kw}{(u+v)k - (w+u)l} = \frac{ul - hw}{2uh - ul - wl}$$

$\cos\alpha$ muß somit einem einfachen Bruche relativ nahe kommen, soll jedes einfache Rhomboeder einfache Quasinormalen besitzen. $\cos\alpha$ des Calcites, bezogen auf das primitive Rhomboeder der Braggschen Struktur, ist beispielsweise fast gleich $\frac{7}{10}$. Daraus berechnet sich die Quasinormale auf der Zwillingsebene (332) zu [22$\bar{1}$]. Die Quasinormale auf (211) bezw. (112) (dem Spaltungsrhomboeder, ebenfalls nachgewiesene Zwillingsfläche) ist [11$\bar{5}$].

Ist $\alpha = 90^0$, so besitzt jede Fläche genau eine Normale als einfache Gitterlinie. Das ist das Kennzeichen der kubischen Abteilung.

Für manche Zwecke ist es erwünscht, die Verteilung der Massenschwerpunkte auf einer beliebigen Ebene kennen zu lernen. Je nach den Umständen wird man verschieden vorgehen.

Zwei Geraden, die auf das Elementarparallelepiped bezogen ein elementares Paar in der Ebene bilden, also das Netz für alle mit ⟦000⟧ identischen Punkte zu zeichnen gestatten, findet man nach: (Siehe auch Gleichung 24 Seite 22).

$$v_1 w_2 - v_2 w_1 = h;\ w_1 u_2 - w_2 u_1 = k;\ u_1 v_2 - u_2 v_1 = l$$

Als eine der Geraden nimmt man zweckmäßig die Schnittlinie der Ebene mit (100). Ihre Indizes sind dann $[0\,l\,\bar{k}]$. Daraus findet man die Indizes der mit ihr ein elementares Paar bildenden Geraden nach: $l w_2 + v_2 k = h$; wenn $u_2 = -1$.

Aus $[0\,l\,\bar{k}]$ und $[u_2 v_2 w_2]$ findet man den einschließenden Winkel nach Gleichung (63) auf Seite 518 oder nach dem Ansatz:

$$J_{(hkl)} = T_{(0l\bar{k})} \cdot T_{(u_2 v_2 w_2)} \cdot \sin\varrho.$$

Jetzt läßt sich das elementare Netz auf der Ebene zeichnen. Weitere konstituierende Punkte, die auf die Ebene fallen, werden durch Koordinatenachsentransformation, manchmal auch in einfacherer Weise, an richtiger Stelle eingezeichnet.

Punkte, Ebenen und Gerade lassen sich hierbei nach folgenden allgemeinen Formeln auf ein neues Koordinatenachsensystem transformieren. ⟦m, n, p⟧ seien die Koordinaten eines Punktes, bezogen auf ein primitives oder elementares Tripel. $[u_1 v_1 w_1]$ $[u_2 v_2 w_2]$ $[u_3 v_3 w_3]$ bilden die Kanten eines dem primitiven oder elementaren inhaltsgleichen Parallelepipeds. Sie seien neue X-, Y-, Z-Achsen mit ihren primitiven bezw. elementaren Parametern als Einheitsmaßstäben. Sie bestimmen die neuen Achsenebenen (100) (010) (001). Wir erhalten ihre Indizes im alten Koordinatensystem nach Gleichung 18 auf Seite 17. $[u_2 v_2 w_2]$ $[u_3 v_3 w_3]$ bestimmen die alten Indizes $(h_1 k_1 l_1)$ der neuen (100)-Ebene, $[u_3 v_3 w_3]$ $[u_1 v_1 w_1]$ die alten Indizes $(h_2 k_2 l_2)$ der neuen (010)-Ebene, $[u_1 v_1 w_1]$ $[u_2 v_2 w_2]$, endlich die alten Indizes $(h_3 k_3 l_3)$ der neuen (001)-Ebene. Die Flächenindizes sollen noch nicht auf die primitivste Form gebracht sein, sondern die Determinantenwerte besitzen, welche sie nach der Berechnung (Gleichung 18 auf Seite 17) erhalten.

Dann sind die neuen Koordinaten $⟦m^x\ n^x\ p^x⟧$ des Punktes ⟦m n p⟧ gegeben durch:

$$\left.\begin{aligned} \pm m^x &= m h_1 + n k_1 + p l_1 \\ \pm n^x &= m h_2 + n k_2 + p l_2 \\ \pm p^x &= m h_3 + n k_3 + p l_3 \end{aligned}\right\} \quad (73)$$

+ oder —-Zeichen ergibt sich aus der gewählten Achsenrichtung.

Der Koordinatenanfangspunkt bleibt hierbei unverändert. Ist der Inhalt des Parallelepipeds $[u_1 v_1 w_1]$ $[u_2 v_2 w_2]$ $[u_3 v_3 w_3]$ z mal so groß wie der des primitiven oder elementaren Parallelepipeds, so müssen alle Summanden der rechten Seiten obiger Gleichung durch z dividiert werden.

Bei der Transformation auf ein neues primitives beziehungsweise elementares Tripel $[u_1 v_1 w_1]$ $[u_2 v_2 w_2]$ $[u_3 v_3 w_3]$ erhält eine Fläche (hkl) die neuen Indizes $(h^x k^x l^x)$, mit, wobei, abgesehen von gemeinsamem Teiler:

$$\left.\begin{aligned} h^x &= hu_1 + kv_1 + lw_1 \\ k^x &= hu_2 + kv_2 + lw_2 \\ l^x &= hu_3 + kv_3 + lw_3 \end{aligned}\right\} \quad (74)$$

Die neue Einheitsfläche ist durch die Parameter der neuen Koordinatenachsen bestimmt, ihre alten Indizes sind gegeben durch:

$$h_e = h_1 + h_2 + h_3;\ k_e = k_1 + k_2 + k_3;\ l_e = l_1 + l_2 + l_3$$

wo $h_1 \ldots$, $h_2 \ldots$, $h_3 \ldots$ die alten „Indizes" der neuen Achsenebenen sind und zwar in gleicher Bedeutung wie oben.

Die Formeln sind auch Transformationsformeln, wenn $[u_1 v_1 w_1]$, $[u_2 v_2 w_2]$ $[u_3 v_3 w_3]$ kein elementares oder primitives Tripel bilden, sie beziehen sich dann auf die durch die letzte Formel bezeichnete Einheitsebene, welche die Maßstäbe der neuen Achsen liefert. Die Transformationsformeln für Gerade sind denen der Punkte gleich, nur lassen sich dann [uvw] auf primitive ganze Zahlen abkürzen.

Häufig führen konstruktive Überlegungen rasch zum Ziel; beispielsweise, wenn es sich darum handelt, das Streubild zu zeichnen, das durch Massenschwerpunkte gehende Normalen auf einer Fläche erzeugen.

Im kubischen Kristallsystem sind die Hauptindizes der Flächennormalen den Flächenindizes gleich. Man berechnet nach den Formeln $B = n - \frac{v}{u} m$ und $C = p - \frac{w}{u} m$ die B und C der Geraden [uvw] durch die verschiedenen Atomschwerpunkte: zugleich ersieht man, ob eine derartige Gerade durch mehrere hinsichtlich der gewählten Grundtranslationen unabhängige Atomschwerpunkte geht. Zu berücksichtigen ist, daß die B und C durch Subtraktion oder Addition ganzer Zahlen immer auf die Rückwand des ersten positiven Würfels bezogen werden können. B und C sind zugleich Koordinaten der Durchstoßpunkte aller Gittergeraden [uvw] mit der yz-Ebene. Das Streubild der Gittergeraden [uvw] auf $(100)_0$ wird so direkt erhalten. Die Spur einer direkt durch den Punkt ⟦011⟧ gehenden Ebene (hkl), wo h = u, k = v, l = w ist, läßt sich leicht zeichnen; die Ebene hkl denkt man sich nach rechts hin in die Zeichenebene umgeklappt. Man erhält darauf das Streubild der dazu senkrechten Gitterlinien [uvw] aus dem Streubild auf der $(100)_0$-Ebene, indem man auf die Spur von (hkl) die Senkrechten von den Durchstoßpunkten der Geraden mit $(100)_0$ zieht. Von den Fußpunkten der Senkrechten zieht man nach links unter dem kristallographisch bekannten $\measuredangle$ (100)/(hkl) Gerade und fällt von den Durchstoßpunkten in $(100)_0$ die Lote darauf. (Fig. 187.) Dadurch erhält man den Abstand der Durchschnittspunkte mit der Ebene (hkl) von der Spur dieser Ebene gegen $(100)_0$. Das Streubild läßt sich sofort zeichnen.

In dieser Weise kann man ein Kristallgebäude mit Leichtigkeit nach allen Richtungen hin durchforschen und diejenigen Beziehungen

zwischen Kristallgittern und vektoriellen Eigenschaften auffinden, die bereits in der atomistischen Struktur zum Ausdruck kommen.

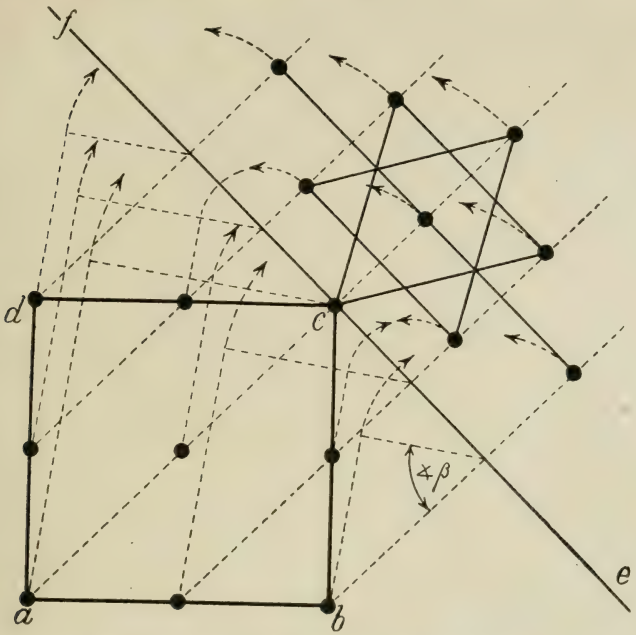


Fig. 187. Konstruktion des Streubildes der Gittergeraden [111] auf (111) im Typus NaCl.

a = ⟦000⟧; b = ⟦010⟧; c = ⟦011⟧; d = ⟦001⟧. abcd = Ebene $(100)_0$. Das Streubild der Gittergeraden [111] auf (100) ergibt sich durch Berechnung von B und C.

ef = Spur der Ebene (111) auf $(100)_0$ durch ⟦011⟧. $\measuredangle\, \beta$ = Winkel zwischen (111) und anliegender Würfelfläche = 54° 44′ 8″.

Die im Text beschriebene Konstruktion ergibt das Streubild der Gittergeraden [111] auf (111) rechts von ef. Die Verbindungslinien derjenigen Durchstoßpunkte der Gittergeraden, die durch Punkte in gleichen Ebenen (111) gehen, zeigen deutlich den trigonalen Charakter des Streubildes.

5. Deformationen der Struktur in sich

Die individuellen Größen a, b, c: α, β, γ eines homogenen Kristall-Diskontinuums sind, soweit Symmetriebedingungen das zulassen, von der Temperatur und dem Druck abhängig. So können sich in der triklinen Abteilung alle sechs Größen beliebig ändern. In der monoklinen Abteilung müssen α und γ, in der rhombischen Abteilung α, β und γ stets

rechte Winkel bleiben. Außerdem muß in der tetragonalen Abteilung a stets gleich b sein, in der hexagonalen und rhomboedrischen Abteilung bleibt, auf orthohexagonales Elementarparallelepiped bezogen, $a = b\sqrt{3}$, und in der kubischen Abteilung ist unveränderlich $a = b = c$ zu setzen. Dadurch bestimmen sich die möglichen Deformationen der Identitätsgitter oder Elementargitter in den einzelnen Abteilungen.

Alle Massenteilchen in Punkten ohne Freiheitsgrad behalten, so lange das Raumsystem erhalten bleibt, ihre relativen Lagen bei, ihnen kommt nur die dem Elementarparallelepiped eigene Deformation zu. Massenteilchen in Punkten mit einem, zwei oder drei Freiheitsgraden können sich außerdem längs Geraden, auf Ebenen oder in beliebiger Weise verschieben, ohne daß die Symmetrieverhältnisse gestört werden. Außer der Deformation der Elementargitter kann bei ihnen eine Verschiebung der Gitter gegeneinander stattfinden.

Akzent ist auf das Wörtchen „kann" zu legen. Mathematisches Vorhandensein von Freiheitsgraden ist nicht gleichbedeutend mit notwendig stattfindender Ausnutzung dieser Freiheitsgrade bei sich ändernden äußeren Bedingungen. Ein gutes Beispiel liefert die Atomanordnung des Graphites nach der Debye-Scherrerschen Deutung. Die Atomschwerpunktslagen besitzen (siehe Seite 461 Fig. 182) einen Freiheitsgrad der Lageänderung. Es ist aber nicht anzunehmen, daß die bindenden Valenzkräfte ein Loslösen einzelner Atome aus den Ebenen (111) gestatten. Anders verhält sich beispielsweise Pyrit, wenn man seiner Struktur das Braggsche Schema zugrunde legt (Fig. 180 auf Seite 461). Die Schwefelatome besitzen auf den trigonalen Drehungsachsen einen Freiheitsgrad. Es ist ziemlich gewiß, daß die Abstände (d. h. das x in den Punktsymbolen der Seite 473) auf diesen Achsen sich mit den äußeren Einflüssen ändern. Die Fe-Atome erleiden nur die dem Elementarwürfel zukommende Deformation (Veränderung der absoluten Größe a), die Schwefelatome erhalten außerdem, auf den neuen Elementarwürfel bezogen, neue Koordinatenwerte.

Wie es eine thermische Deformation gibt, so läßt sich auch eine Änderung der elementaren Abstände beim Ersatz von Atomen durch andere in Mischkristallen konstatieren. Man kann sie als Konzentrationsdeformation bezeichnen. Sie scheint, wie aus den wenigen genauer berechneten Mischkristallreihen hervorgeht, häufig nahezu additiven Charakter zu besitzen, so daß der hundertste Teil der Differenz der Elementarabstände der beiden Endglieder einer mittleren Dilatation pro 1 Mol.% gleichgesetzt werden kann. Wichtig ist das Verhältnis der beiden Deformationsgrößen zueinander. Nicht selten scheint der Größenordnung nach die Änderung pro $\frac{1}{10}$ % der Änderung pro 1^0 in gleichem oder entgegengesetztem Sinne zu entsprechen.

Über die absoluten Größen der Raumelemente, sowie der Deformationen, geben die beiden nachfolgenden Tabellen Auskunft. Die von Bragg vorgeschlagenen Strukturbilder (siehe auch Seite 461) sind als richtig angenommen. a ist die Kantenlänge des nach ihm elementaren Würfels. Die thermische Dilatation von Pyrit ist von Valentiner und Wallot neu bestimmt worden.

Raumgitterelemente der Alkalihalogenide und ihre mittlere Abhängigkeit von Temperatur und Konzentration

	KCl	KBr	NaCl
Spez. Gewicht	1,98	Raumgitterelemente berechnet nach dem Verhältnis der Raumgitterkonstanten 1 : 1,025	2,17
Mol.-Gewicht	74,56		58,46
a_{20}	$6{,}29 \times 10^{-8}$ cm	$6{,}45 \times 10^{-8}$ cm	$5{,}63 \times 10^{-8}$ cm
$\frac{\triangle a_{20}}{\triangle T}$ (pro 1°)	$2{,}3 \times 10^{-12}$ cm	$2{,}6 \times 10^{-12}$ cm	$2{,}2 \times 10^{-12}$ cm
Mittleres $\frac{\triangle a_{20}}{\triangle \text{Conc.}}$ pro 1% (molek.)	$1{,}6 \times 10^{-11}$ cm mittlere Deformationsgröße für Mischkristalle		
Abstand ungleicher Atome	$3{,}15 \times 10^{-8}$ cm	$3{,}22 \times 10^{-8}$ cm	$2{,}81 \times 10^{-8}$ cm
Abstand gleicher Atome auf den (111) Ebenen	$4{,}45 \times 10^{-8}$ cm	$4{,}55 \times 10^{-8}$ cm	$3{,}97 \times 10^{-8}$ cm

Vom Gesichtspunkte homogener Deformationen aus lassen sich auch die Elementarparallelepipede oder primitiven Gitter (Identitätsgitter) von in verschiedenen Abteilungen kristallisierenden Substanzen miteinander vergleichen. Nach Fedorows Untersuchungen können im weiteren Sinne die Kristallarten der triklinen, monoklinen und rhombischen Klassen meistens pseudotetragonal, pseudohexagonal oder pseudokubisch genannt werden. Eine derartige Einteilung ist, wie bereits im II. Kapitel dargetan wurde, sofern relativ einheitliche Kristallisationsgesetze wirksam sind, durchaus verständlich, da die Translationsgruppen sich in drei einfache Deformationsreihen ordnen lassen mit hexagonalem, oder tetragonalem, oder kubischem Elementarparallelepiped als den höchstsymmetrischen Formen. Es braucht aber gar nicht das primitive Gitter zu sein, das die Pseudosymmetrie besitzt, es kann auch irgend ein wichtiges übergeordnetes Gitter sein.

Funktionelle Abhängigkeit der Raumgitterelemente von Pyrit, Hauerit und Flußspat

	Pyrit	Hauerit	Flußspat
Spez. Gewicht	5,027	3,45	a berechnet aus dem Verhältnis der Gitterkonstanten
Mol.-Gewicht	119,98	119,07	—
Mol.-Volumen	23,867	34,51	—
a für 18,5°	$5{,}404 \times 10^{-8}_{cm}$	$6{,}111 \times 10^{-8}_{cm}$	$5{,}47 \times 10^{-8}_{cm}$
a für −25,2°	$5{,}402 \times 10^{-8}_{cm}$	—	—
a für −46,2°	$5{,}401 \times 10^{-8}_{cm}$	—	—
a für −61,5°	$5{,}406 \times 10^{-8}_{cm}$	—	—
$\frac{\triangle a_{20}{}^{0}}{\triangle T}$ pro 1°	$4{,}6 \times 10^{-13}_{cm}$	$5{,}7 \times 10^{-13}_{cm}$	$1{,}03 \times 10^{-12}_{cm}$
Entfernung der zwei Schwefelatome voneinander	$2{,}10 \times 10^{-8}_{cm}$	$2{,}11 \times 10^{-8}_{cm}$	Abstand eines F-Atoms von einem Ca-Atom = $2{,}37 \times 10^{-8}_{cm}$ bei 20°
Entfernung des Schwerpunkts des S_2-Komplexes vom Metallatom	$2{,}7 \times 10^{-8}_{cm}$	$3{,}06 \times 10^{-8}_{cm}$	—
Entfernung gleichartiger Baugruppen	$3{,}8 \times 10^{-8}_{cm}$	$4{,}3 \times 10^{-8}_{cm}$	—
—	—	—	Würfelkantenlänge der in flächenzentrierten Würfeln kristallisierenden Elemente: Al = $4{,}07 \times 10^{-8}_{cm}$ Pb = $4{,}91 \times 10^{-8}_{cm}$ Cu = $3{,}61 \times 10^{-8}_{cm}$ Au = $4{,}07 \times 10^{-8}_{cm}$ Ag = $4{,}06 \times 10^{-8}_{cm}$

Außerordentlich nahe verwandt sind die kubischen Raumsysteme und die rhomboedrischen Raumsysteme mit rhomboedrischer Translationsgruppe. Daß die rhomboedrische Translationsgruppe immer auch als innenzentriert oder flächenzentriert aufgefaßt werden kann, ist bereits erwähnt worden. (Siehe Fig. 60/61 und Seite 117). Ein Vergleich der

Punktlagen ohne Freiheitsgrad und mit einem Freiheitsgrad zweier sich entsprechender Raumsysteme $\mathfrak{O}_h^1$ und $\mathfrak{D}_{3d}^5$ wird zur Aufklärung der Beziehungen wesentlich beitragen. In beiden Raumsystemen gibt es zweierlei einzählige Punkte von gleicher relativer Lage. Es kommen ihnen die Symbole $[\![000]\!]$ und $[\![\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]\!]$ zu. Die Symmetriebedingung für $\mathfrak{O}_h^1$ ist O_h^1, für $\mathfrak{D}_{3d}^5 = D_{3d}^5$. Gleich zusammengehörig und in gleicher relativer Lage zueinander sind auch die den Flächenmitten einerseits, den Kantenmitten anderseits entsprechenden dreizähligen Punkte. Die respektiven Symmetriebedingungen sind D_{4h} und C_{2h}. Die auf den tetragonalen Achsen liegenden sechszähligen Punkte von $\mathfrak{O}_h^1$ mit der Symmetriebedingung C_{4v} blieben auch in $\mathfrak{D}_{3d}^5$ sechszählig, besitzen aber nun zwei Freiheitsgrade mit einer einfachen Symmetriebedingung C_s.

Punkte, die in $\mathfrak{O}_h^1$ auf den trigonalen Achsen liegen (Symmetriebedingung C_{3v}) und achtzählig sind, teilen sich in $\mathfrak{D}_{3d}^5$ in zweierlei voneinander unabhängige Punktarten auf. Die eine ist zweizählig gemäß der Symmetriebedingung C_{3v}, die andere ist sechszählig, besitzt zwei Freiheitsgrade und gehört den Symmetrieebenen allein an.

Ebenfalls aufgeteilt werden die zwölfzähligen Punkte von $\mathfrak{O}_h^1$ (Symmetriebedingung C_{2v}) und zwar in zweierlei sechszählige Punktarten, einerseits mit der Symmetriebedingung C_s, anderseits mit der Symmetriebedingung C_2. Stehen die Elementarparallelepipede in einfacher Deformationsbeziehung zueinander, so läßt sich das Schicksal dieser ausgezeichneten Punktlagen daher leicht verfolgen. In ähnlicher Weise ändern sich unter diesen Bedingungen die zusammengehörigen Flächenkomplexe. Auch sie teilen sich meistens in zwei, drei oder vier voneinander unabhängige Formen auf, wenn man von O_h zu D_{3d} übergeht. Es sei mir gestattet, eine von P. von Groth in seiner „Physikalischen Kristallographie" gegebene Tabelle [1]) zu reproduzieren und zu ergänzen. (Siehe die Tabelle Seite 528.)

Selbst im Achsenverhältnis der rhomboedrischen und sogar mancher hexagonalen Kristallarten finden sich noch Anklänge an die eindeutig bestimmten Verhältnisse in den kubischen Klassen. In Fig. 188 sei AC eine trigonale Achse eines Elementarwürfels von der Kantenlänge 1. AC also gleich $\sqrt{3}$. Die Spuren aller zu dieser Achse senkrechten Ebenen, die durch Flächenmitten, Kantenmitten oder $\frac{1}{4}$-Diagonalpunkte gehen, sind eingezeichnet.

[1]) Die durch die Zeichen $\langle\ \rangle$ gekennzeichneten Formen veranschaulichen Zusammengehörigkeiten, die in der 2. und 3. Kolonne durch die der rhomboedrisch-holoedrischen Symmetriegruppe eigenen Tripel gegeben sind. In der letzten Kolonne sind die Formen $\langle hkl \rangle$ als monoklin zu betrachten, zu (hkl) gehören $(h\bar{k}l)$, $(\bar{h}k\bar{l})$, $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$. Bei Anwendungen ist die oft entgegengesetzte Stellung des Elementarparallelepipeds zu berücksichtigen. Immer dann, wenn (100) Spiegelebene ist (bezw. [100] Symmetrieachse), ändert sich die Vorzeichenkombination der Formen in der letzten Kolonne.

Kubische Form	Rhomboedrisch-holoedrische Form (Grundrhomboeder = deform. Würfel)		
	Auf das Rhomboeder bezogen	Auf die hexagonale Säule bezogen (ϱ-Zusammengehörigkeit	Auf orthohexagonale Achsen bezogen $\langle h\,k\,l\rangle$ = monokline Vertauschung
$\langle 100\rangle$	$\langle 100\rangle$ Rhomboeder	$\langle 10\bar{1}1\rangle$	$\langle 201\rangle + \langle 11\bar{1}\rangle$
$\langle 110\rangle$	$\langle 110\rangle$ Rhomboeder	$\langle 01\bar{1}2\rangle$	$\langle 10\bar{1}\rangle + \langle 112\rangle$
	$\langle 10\bar{1}\rangle$ Hexag. Prisma	$\langle 11\bar{2}0\rangle$	$\langle 010\rangle + \langle 310\rangle$
$\langle 111\rangle$	$\langle 111\rangle$ Basis	$\langle 0001\rangle$	$\langle 001\rangle$
	$\langle 11\bar{1}\rangle$ Rhomboeder	$\langle 02\bar{2}1\rangle$	$\langle 40\bar{1}\rangle + \langle 221\rangle$
$\langle 201\rangle$	$\langle 20\bar{1}\rangle$ Hexag. Bipyramide	$\langle 11\bar{2}3\rangle$	$\langle 023\rangle + \langle 313\rangle + \langle 31\bar{3}\rangle$
	$\langle 20\bar{1}\rangle$ Skalenoeder	$\langle 21\bar{3}1\rangle$	$\langle 13\bar{1}\rangle + \langle 511\rangle + \langle 42\bar{1}\rangle$
$\langle 211\rangle$	$\langle 211\rangle$ Rhomboeder	$\langle 10\bar{1}4\rangle$	$\langle 102\rangle + \langle 11\bar{4}\rangle$
	$\langle 21\bar{1}\rangle$ Skalenoeder	$\langle 12\bar{3}2\rangle$	$\langle 13\bar{2}\rangle + \langle 211\rangle + \langle 51\bar{2}\rangle$
	$\langle 2\bar{1}1\rangle$ Hexag. Prisma	$\langle 10\bar{1}0\rangle$	$\langle 100\rangle + \langle 110\rangle$
$\langle 301\rangle$	$\langle 301\rangle$ Skalenoeder	$\langle 21\bar{3}4\rangle$	$\langle 13\bar{4}\rangle + \langle 514\rangle + \langle 21\bar{2}\rangle$
	$\langle 30\bar{1}\rangle$ Skalenoeder	$\langle 31\bar{4}2\rangle$	$\langle 12\bar{1}\rangle + \langle 712\rangle + \langle 53\bar{2}\rangle$
$\langle 311\rangle$	$\langle 311\rangle$ Rhomboeder	$\langle 20\bar{2}5\rangle$	$\langle 405\rangle + \langle 22\bar{5}\rangle$
	$\langle 31\bar{1}\rangle$ Hexag. Bipyramide	$\langle 22\bar{4}3\rangle$	$\langle 0\bar{4}3\rangle + \langle 623\rangle + \langle 62\bar{3}\rangle$
	$\langle 3\bar{1}1\rangle$ Rhomboeder	$\langle 40\bar{4}1\rangle$	$\langle 801\rangle + \langle 44\bar{1}\rangle$
$\langle 302\rangle$	$\langle 302\rangle$ Skalenoeder	$\langle 12\bar{3}5\rangle$	$\langle 135\rangle + \langle 425\rangle + \langle 51\bar{5}\rangle$
	$\langle 30\bar{2}\rangle$ Skalenoeder	$\langle 32\bar{5}1\rangle$	$\langle 15\bar{1}\rangle + \langle 821\rangle + \langle 73\bar{1}\rangle$
$\langle 221\rangle$	$\langle 221\rangle$ Rhomboeder	$\langle 01\bar{1}5\rangle$	$\langle 20\bar{5}\rangle + \langle 115\rangle$
	$\langle 22\bar{1}\rangle$ Rhomboeder	$\langle 01\bar{1}1\rangle$	$\langle 20\bar{1}\rangle + \langle 111\rangle$
	$\langle 2\bar{2}1\rangle$ Skalenoeder	$\langle 13\bar{4}1\rangle$	$\langle 24\bar{1}\rangle + \langle 531\rangle + \langle 71\bar{1}\rangle$
$\langle 401\rangle$	$\langle 401\rangle$ Skalenoeder	$\langle 31\bar{4}5\rangle$	$\langle 24\bar{5}\rangle + \langle 715\rangle + \langle 53\bar{5}\rangle$
	$\langle 40\bar{1}\rangle$ Skalenoeder	$\langle 41\bar{5}3\rangle$	$\langle 35\bar{3}\rangle + \langle 913\rangle + \langle 64\bar{3}\rangle$
$\langle 411\rangle$	$\langle 411\rangle$ Rhomboeder	$\langle 10\bar{1}2\rangle$	$\langle 101\rangle + \langle 11\bar{2}\rangle$
	$\langle 41\bar{1}\rangle$ Skalenoeder	$\langle 32\bar{5}4\rangle$	$\langle 15\bar{4}\rangle + \langle 412\rangle + \langle 73\bar{4}\rangle$
	$\langle 4\bar{1}1\rangle$ Rhomboeder	$\langle 50\bar{5}2\rangle$	$\langle 10\cdot 0\cdot 2\rangle + \langle 55\bar{2}\rangle$
$\langle 321\rangle$	$\langle 321\rangle$ Hexag. Bipyramide	$\langle 11\bar{2}6\rangle$	$\langle 013\rangle + \langle 316\rangle + \langle 31\bar{6}\rangle$
	$\langle 32\bar{1}\rangle$ Skalenoeder	$\langle 13\bar{4}4\rangle$	$\langle 1\bar{2}2\rangle + \langle 534\rangle + \langle 71\bar{4}\rangle$
	$\langle 3\bar{2}1\rangle$ Skalenoeder	$\langle 23\bar{5}2\rangle$	$\langle 1\bar{5}2\rangle + \langle 732\rangle + \langle 41\bar{1}\rangle$
	$\langle 3\bar{2}\bar{1}\rangle$ Dihexag. Prisma	$\langle 54\bar{1}0\rangle$	$\langle 910\rangle + \langle 3\bar{2}0\rangle + \langle 350\rangle$
$\langle 421\rangle$	$\langle 421\rangle$ Skalenoeder	$\langle 21\bar{3}7\rangle$	$\langle 13\bar{7}\rangle + \langle 517\rangle + \langle 42\bar{7}\rangle$
	$\langle 42\bar{1}\rangle$ Skalenoeder	$\langle 23\bar{5}5\rangle$	$\langle 1\bar{5}5\rangle + \langle 735\rangle + \langle 82\bar{5}\rangle$
	$\langle 4\bar{2}1\rangle$ Hexag. Bipyramide	$\langle 11\bar{2}1\rangle$	$\langle 0\bar{2}1\rangle + \langle 311\rangle + \langle 31\bar{1}\rangle$
	$\langle 4\bar{2}\bar{1}\rangle$ Skalenoeder	$\langle 51\bar{6}1\rangle$	$\langle 46\bar{1}\rangle + \langle 11\cdot 1\cdot 1\rangle + \langle 75\bar{1}\rangle$
$\langle 521\rangle$	$\langle 521\rangle$ Skalenoeder	$\langle 31\bar{4}8\rangle$	$\langle 12\bar{4}\rangle + \langle 718\rangle + \langle 53\bar{8}\rangle$
	$\langle 52\bar{1}\rangle$ Hexag. Bipyramide	$\langle 11\bar{2}2\rangle$	$\langle 0\bar{1}1\rangle + \langle 312\rangle + \langle 31\bar{2}\rangle$
	$\langle 5\bar{2}1\rangle$ Skalenoeder	$\langle 73\bar{4}4\rangle$	$\langle 52\bar{2}\rangle + \langle 11\cdot 3\cdot 4\rangle + \langle 17\bar{4}\rangle$
	$\langle 5\bar{2}\bar{1}\rangle$ Skalenoeder	$\langle 71\bar{6}2\rangle$	$\langle 43\bar{1}\rangle + \langle 13\cdot\bar{1}\cdot 2\rangle + \langle 57\bar{2}\rangle$

Die Ebenen (1) : (1) gehen durch die Gittereckpunkte und durch Flächenmittelpunkte angrenzender Würfel. Die Ebene (2) geht durch den Würfelmittelpunkt und zugleich durch Kantenmitten.

Die Ebenen (3) : (3′) gehen durch Gittereckpunkte und Flächenmittelpunkte. Die Ebenen (4) : (4′) gehen wieder durch Kantenmittenpunkte und durch Würfelmittelpunkte angrenzender Würfel.

In den Ebenen (5), (5′), (5″) ruht die eine Art von Teilchen, deren konstruktiver Punkt in $\frac{1}{4}$ der Würfeldiagonale liegt, in den Ebenen (6), (6′), (6″) die andere Art. Es sind die Abstände:

$$(1) : (1) = \sqrt{3}$$
$$(1) : (2) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$
$$(1) : (3) = (3) : (3') = (3') : (1) = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}$$
$$(2) : (3) = (2) : (3') = \tfrac{1}{6}\sqrt{3}$$
$$(4) : (1) = (4) : (3) = (4') : (1) = (4') : (3') = \tfrac{1}{6}\sqrt{3}$$
$$(5) : (3) = (5) : (4) = (5') : (2) = (5') : (3') = (5'') : (1) = \tfrac{1}{12}\sqrt{3}$$
$$(5) : (1) = (5') : (3) = (5'') : (3') = \tfrac{1}{4}\sqrt{3}$$
$$(6) : (1) = (6) : (4) = \text{usw.} = \tfrac{1}{12}\sqrt{3}.$$

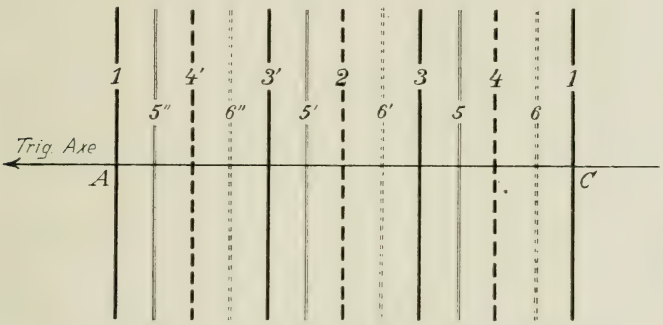


Fig. 188. Abstände wichtiger Strukturebenen (111) im Elementarwürfel.

Beim Typus NaCl kommen die Ebenen (1), (3), (3′); (4), (4′), (2) als Massenebenen vor. Von Atomen der gleichen Art sind besetzt einerseits die Ebenen (1), (3), (3′), anderseits (4), (2), (4′). Die Abstände zweier gleichatomiger Ebenen sind somit $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Die Entfernungen der Atome voneinander auf diesen Ebenen sind $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Das Verhältnis der Abstände zwischen den Atomen auf den (111) Ebenen zu den Abständen zweier benachbarter gleichatomiger Ebenen ist $\frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{1}{3}\sqrt{3} = 1 : 2\sqrt{\frac{1}{6}} = 1 : 0{,}816$. In zwei benachbarten gleichatomigen Ebenen besitzen die Atome nicht gleiche Lage zueinander. Die Sechsecke sind gegeneinander verschoben. (Siehe Fig. 193.) Erst die Ebenen (1) : (1), allgemein die Ebenen im Abstande $\sqrt{3}$, besitzen senkrecht übereinander entsprechende Teilchen.

Beim Typus Zinkblende (nach Bragg siehe Fig. 179 auf Seite 459) sind die Ebenen (1), (3), (3′) einerseits, (5), (5′), (5″) anderseits mit Massenteilchen besetzt. Die Entfernungen der Atome voneinander auf diesen Ebenen sind wiederum $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Die Abstände gleichatomiger Ebenen (111) ergeben sich zu $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, währenddem der Abstand zweier gleichatomiger Ebenen gleicher Atomlage $\sqrt{3}$ ist. Die Ebenen (111) der einen

Atomart (beispielsweise (5)) liegen nun aber so zwischen den Ebenen der anderen Atomart (z. B. (3) und (1)), daß der eine Abstand $\frac{1}{12}\sqrt{3}$, der andere $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ ist. Diese Abstände verhalten sich also wie 1 : 3.

Beim einfachen Deformationsübergang vom Würfel zum gewöhnlichen Rhomboeder werden allgemein gesprochen die Flächendiagonalen des Würfels zu a-Achsen, eine der Körperdiagonalen zur c-Achse des hexagonalen Elementarparallelepipeds. Das Verhältnis dieser im einfachen Würfel ist 1 : 1,225 . . . . . Anderseits ist ein wichtiges Verhältnis von Größen der beiden Richtungen in kubischen Raumsystemen durch das oben hingeschriebene Verhältnis 1 : 0,816 . . . . gegeben. Es ist nun interessant zu sehen, daß nicht nur im engeren Sinne rhomboedrische, sondern auch trigonale oder hexagonale Kristallarten einfacher chemischer Zusammensetzung sich mit Vorteil auf Achsenverhältnisse a : c beziehen lassen, die in naher Beziehung zu den ausgezeichneten, vom Würfel abgeleiteten, Werten stehen.

Nach Rinne lassen sich nämlich bei einfachen Verbindungen rhomboedrischer, trigonaler oder hexagonaler Kristallisation folgende verbreiteten Typen erkennen:

1. Magnesiumtypus a : c ungefähr 1 : 1,6 bezw. 1 : 0,8;
2. Arsentypus a : c ungefähr 1 : 1,3 Außenwinkel der Polkante des Grundrhomboeders etwas größer als 90°;
3. Quarztypus a : c ungefähr 1 : 1,1 Außenwinkel der Polkante des Grundrhomboeders etwas kleiner als 90°.

Das Achsenverhältnis des Typus 1 ist nahezu gleich (bezw. das Doppelte) von dem obengenannten von $1 : \frac{2}{\sqrt{6}} = 1 : 0{,}816 \ldots$ Die Achsenverhältnisse von Typus 2 und 3 kommen 1 : 1,225 . . . ziemlich nahe. Es finden sich Abweichungen einer bestimmten Größenordnung nach der einen oder anderen Seite vor.

Die Erscheinung, daß im übrigen in chemischer Beziehung wenig verwandte Verbindungen ähnliche Strukturgrößen besitzen, wurde von Rinne Isotypie genannt. Über die drei soeben erwähnten isotypen Reihen geben die folgenden Tabellen (nach Rinne) Aufschluß:

1. Magnesiumtypus

Magnesium	Mg	a : c = 1 : 1,6391	$\measuredangle(0001)/(10\bar{1}1) = 62°\ 9'$
Beryllium	Be	a : c = 1 : 1,5802	„ „ 61° 17′
Cadmium	Cd	a : c = 1 : 1,6554	„ „ 62° 23′
Iridosmium	(Ir, Os)	a : c = 1 : 1,6288	„ „ 62° 0′
Graphit	—	a : c = 1 : 1,63	„ „ 62° 0′
Zinkoxyd	ZnO	a : c = 1 : 1,6219	„ „ 61° 54′
Berylliumoxyd	BeO	a : c = 1 : 1,6305	„ „ 62° 2′
Wurtzit	ZnS	a : c = 1 : 1,6006	„ „ 61° 35′
Greenockit	CdS	a : c = 1 : 1,6218	„ „ 61° 54′
Magnetkies	FeS	a : c = 1 : 1,6502	„ „ 62° 19′

Covellin	CuS	a : c = 1 : 1,5888	∠(0001)/(10$\bar{1}$1) =	61° 24′
Arsennickel	NiAs	a : c = 1 : 1,6389	„ „	62° 9′
Antimonnickel	NiSb	a : c = 1 : 1,7220	„ „	63° 18′
Jodsilber	AgJ	a : c = 1 : 1,6392	„ „	62° 9′
Eis	H_2O	a : c = 1 : 1,617	„ „	61° 50′
Tridymit (ob. 130°)	SiO_2	a : c = 1 : 1,6530	„ „	62° 21′
Jodcadmium	CdJ_2	a : c = 1 : 1,5940	„ „	61° 29′
Bleijodid	PbJ_2	a : c = 1 : 1,6758	„ „	62° 40′
Karborund	CSi	a : c = 1 : 1,6324	„ „	62° 3′
Kupferglanz (pseudohex.)	Cu_2S	a : c = 1 : 1,6707	„ „	62° 36′
Chrysoberyll (pseudohex.)	$BeAl_2O_4$	a : c = 1 : 1,6231	„ „	61° 55′

2. Arsentypus

Arsen	As	a : c = 1 : 1,4025	∠(10$\bar{1}$1)/(01$\bar{1}$1) =	94° 5′
Antimon	Sb	a : c = 1 : 1,3236	„ „	92° 53′
Wismut	Bi	a : c = 1 : 1,3035	„ „	92° 20′
Tellur	Te	a : c = 1 : 1,3298	„ „	93° 3′
Selen	Se	ähnlich Tellur		
Zink	Zn	a : c = 1 : 1,3564	„ „	93° 46′
Millerit	NiS	a : c = 1 : 1,3108	„ „	92° 32′
Eisenglanz	Fe_2O_3	a : c = 1 : 1,3656	„ „	94° 0′
Korund	Al_2O_3	a : c = 1 : 1,3633	„ „	93° 56′
Chromoxyd	Cr_2O_3	a : c = 1 : 1,3688	„ „	94° 5′
Brucit	$Mg(OH)_2$	a : c = 1 : 1,5208	„ „	97° 38′
Pyrochroit	$Mn(OH)_2$	a : c = 1 : 1,3999	„ „	94° 52′
Kaliumbromat	$KBrO_3$	a : c = 1 : 1,357	„ „	93° 50′

3. Quarztypus

Quarz	SiO_2	a : c = 1 : 1,0999	∠(10$\bar{1}$1)/(01$\bar{1}$1) =	85° 45′
Zinnober	HgS	a : c = 1 : 1,1453	„ „	87° 23′

In der isomorphen Karbonatreihe mit typisch rhomboedrischer Translationsgruppe hat man die Zahlen:

$CaCO_3$	a : c = 1 : 0,8543	$CdCO_3$	a : c = 1 : 0,8063
$MgCO_3$	a : c = 1 : 0,8112	$ZnCO_3$	a : c = 1 : 0,8062
$MnCO_3$	a : c = 1 : 0,8259	$NaNO_3$	a : c = 1 : 0,8276
$FeCO_3$	a : c = 1 : 0,8241		

Das Achsenverhältnis schwankt hier deutlich um den Mittelwert 1 : 0,816. Es ist in allen diesen Fällen auf eine häufigste oder durch Spaltbarkeit ausgezeichnete Einheitsfläche bezogen, braucht aber nicht, da es makroskopisch abgeleitet wurde, dem Verhältnis der Elementarabstände zu entsprechen.

Es ist wohl möglich, daß in allen diesen Zahlen Verhältnisse von Wirkungsweiten mit der Art der Bindung zum Ausdrucke kommen und daß nach gesammelter Erfahrung sich auch hier Wege zur Strukturbestimmung und physikalisch-chemischen Interpretation öffnen.

Handelt es sich in den letztgenannten Fällen um rein theoretische Beziehungen zwischen den Strukturgrößen der einzelnen Kristallarten, so sind daneben auch solche bekannt, die einem tatsächlichen Übergang der einen Kristallart in die andere entsprechen. Es sind das die Beziehungen zwischen den Modifikationen ein und derselben chemischen Substanz.

Man kann zweierlei Modifikationsänderungen unterscheiden. Bei den einen bleibt während des Überganges die Kristallgestalt im allgemeinen ohne Zerfall erhalten. Die beiden Modifikationen unterscheiden sich in den Strukturgrößen wenig voneinander, besitzen aber einen verschiedenen Symmetriegrad, sei es, daß sie verschiedenen Klassen der gleichen Abteilung angehören, oder daß die eine Modifikation die Symmetrie der anderen nur angenähert als sogenannte Pseudosymmetrie (im engeren Sinne) besitzt. Meistens ist die höher symmetrische Form bei höheren Temperaturen beständig. Bei den Modifikationen der anderen Art sind zwischen den einzelnen Formen keine so nahen Beziehungen erkennbar, während der Umwandlung bleibt eine gegebene Kristallgestalt nicht einheitlich erhalten.

Mit den Modifikationsänderungen der ersten Art sind lediglich innerstrukturelle Veränderungen relativ geringfügiger Natur verknüpft. Die gesamte Strukturanordnung muß schon vor der Umwandlung angenähert die Symmetrie besessen haben, die sich nachher vollkommen einstellt. Ein Raumsystem wandelt sich in ein anderes um, ohne daß neue konstruktive Punktlagen hinzukommen. Aus chemischen, in der Atomkonstitution oder Komplexkonstitution liegenden Gründen stellt sich bei tieferen Temperaturen nicht die mit dem Bauplan verträgliche höchstsymmetrische Atomanordnung oder Wirkung der Atomanordnung ein. Es liegt nahe zu untersuchen, ob derartige Erscheinungen im besonderen Maße an bestimmte Atome gebunden sind.

Um mit den Beispielen an das bereits Bekannte anzuknüpfen, wählen wir folgenden Ausgangspunkt. Sylvin (KCl) besitzt bei gewöhnlicher Temperatur den gleichen Strukturtypus (Fig. 163 Seite 436) wie Kochsalz, zeigt hingegen Ätzfiguren vom kubisch-pentagonikositetraedrischen Habitus. Es bleibt beim Erhitzen kubisch; eine Umwandlung in eine höhersymmetrische Klasse ist aber, in Rücksicht auf die im System NaCl-KCl auftretende Entmischungskurve, nicht unwahrscheinlich. Die Symmetrie ist somit bei gewöhnlicher Temperatur niedriger als der ideale Atombauplan mit kleinstmöglicher Periode, und wie man sich auch die Abweichungen vorstellen mag (siehe Seite 438 bis 451), in den eigentlichen Kristallisationsgesetzen werden sie ihren Grund kaum haben. Wir können nun versuchen, die Abweichungen (zunächst rein formal) mit der Atomsymmetrie in Verbindung zu setzen und uns dann fragen, ob etwa in anderen einfachen Kaliumverbindungen ebenfalls Andeutungen für eine niedrige Eigensymmetrie der einen Atomart vorhanden sind. (Symmetrieerniedrigungen, die bei höherer Temperatur verschwinden können.)

Die Antwort darauf ist in ganz überraschender Weise bejahend. Zunächst sind auch KBr und KJ bei gewöhnlicher Temperatur und bei gleichem Bauplan pentagonikositetraedrisch. Das rhombisch-pseudo-

hexagonale KNO_3 wandelt unter Erhaltung des Kristallgebäudes sich bei zirka 130° in eine trigonale Modifikation um. Das rhombisch-pseudohexagonale K_2SO_4 wandelt sich bei zirka 600° in die normale hexagonale Modifikation um. Ebenso verhält sich K_2CrO_4 bei 666°. Infolge Mischkristallbildungen sehr wahrscheinlich sind derartige Umwandlungen für die Selenate, Manganate, Wolframate, die ebenfalls bei gewöhnlicher Temperatur sehr angenähert hexagonal (rhombisch-pseudohexagonal) kristallisieren. $KClO_3$ kristallisiert bei gewöhnlicher Temperatur monoklin, aber mit so großer Annäherung an die rhomboedrische Struktur, daß eine Umwandlung bei höheren Temperaturen nicht ausgeschlossen ist. Ebenso ist KJO_3 bei Zimmertemperatur monoklin pseudokubisch, $KBrO_3$ trigonal pseudokubisch. KH_2PO_4 und $KH_2As_2O_4$ kristallisieren tetragonal, aber nur tetragonal-skalenoedrisch. Trigonal-trapezoedrisch ist $K_2S_2O_6$. Pseudooktaedrische (ditrigonal-skalenoedrische) Kristallformen zeigen $K_2Sn(OH)_6$; $K_2Pt(OH)_6$; $K_2Pb(OH)_6$. Rhombisch-pseudohexagonal sind außer den erwähnten Sulfaten, Manganaten, Selenaten auch K_2TeO_4, K_2MoO_4, K_2UO_4, $K_2Cd(NO_2)_4$, $K_2Ba(NO_2)_4$, $KHSi_2O_5$ und vielleicht auch $K_2Si_2O_5$. Von K_2FeO_4 weiß man, daß die doppelbrechende Modifikation bei höherer Temperatur in eine einfachbrechende übergeht. KJO_4 ist tetragonal von nicht näher bestimmter Klasse. Die übrigen, genauer bekannten, einfacheren Kaliumsalze kristallisieren bei gewöhnlichen Temperaturen durchwegs in niederen Kristallklassen, wenn auch oft eine Annäherung an kubische oder hexagonale Symmetrie unverkennbar ist. So sind $KClO_4$, $KMnO_4$, $KAg(NO_3)_2$ KNCS rhombisch, $K_2S_4O_6$, KBO_2, $K_2Cr_3O_{10}$, $K_2Cr_4O_{13}$ und eine zweite Modifikation von K_2WO_4 monoklin, $K_2Cr_2O_7$, $K_2S_2O_8$ triklin, K_2CO_3 ist pseudorhomboedrisch, vielleicht aber monoklin bis triklin, Alles das stützt die Annahme wesentlich, daß bei den einfachen K-Verbindungen sich ein mit zunehmender Temperatur oft verschwindender, symmetrieherabsetzender Einfluß des K-Atomes bemerkbar macht.

Interessant ist, daß auch $KAlSi_2O_6$ (Leucit) bei zirka 700° aus einer pseudokubischen in die kubische Form übergeht. Ähnlich verhält sich $KFeSi_2O_6$. Katapleit ($K_2H_4ZrSi_3O_{11}$) wandelt sich bei Temperaturerhöhung, wie der ähnlich gebaute Natronkatapleit, aus der monoklin-pseudohexagonalen in die hexagonale Form um.

Daß sich Na-Rb-Cs-Salze überhaupt ganz ähnlich verhalten, ist zu erwarten, denn die Atombeschaffenheit hängt sicher mit der Stellung im periodischen System zusammen, und K, Na, Rb, Cs sind sehr nahe miteinander verwandt.

Nun macht man die Beobachtung, daß die Na-Salze schon bei viel tieferen Temperaturen die Umwandlung in die höhere Symmetrie zeigen als die entsprechenden K-Salze. Es scheint

auch ein gleichsinniger Einfluß der übrigen Atomkomplexe im Kristallgebäude auf die Umwandlungstemperatur vorhanden zu sein. Dadurch wird vielleicht verständlich, warum von $NaNO_3$ bereits bei Zimmertemperatur nur eine trigonale Form existieren kann. Darüber, ob NaCl bei gewöhnlicher Temperatur regulär holoedrisch oder hemiedrisch kristallisiert, sind die Meinungen geteilt; da wir die eventuelle Umwandlungstemperatur von KCl nicht kennen, läßt sich das Temperaturgebiet von diesen neuen Gesichtspunkten aus nicht fixieren. Allerdings ist von CsCl eine Umwandlung bekannt, deren Temperatur zwischen der seines Sulfates (um 660°) und seines Nitrates (um 145°) liegt. Man sieht, wie sich aus dieser Betrachtungsweise viele neue Problemstellungen ergeben, soweit die eine Gruppe der Modifikationsänderungen (Erhaltung des Kristallgebäudes) in Frage kommt. Hinsichtlich der Na-Verbindungen seien noch folgende bekannte Umwandlungen erster Art beigefügt: Analcim wird zwischen 180° und 500° vollständig kubisch. Kryolith AlF_6Na_3 ist monoklin bei gewöhnlicher Temperatur, zeigt aber meist würfelähnliche Kombinationen und wird zwischen 550° und 570° ohne Zerfall kubisch. Natronkatapleit wird von pseudo- wirklich -hexagonal bei 140°.

	Chlorid	Sulfat	Nitrat	Chromat
K	sicher über Zimmertemperatur, wenn vorhanden	595°	130°	666°
Na	?	240° oder 230°	sicher unter Zimmertemperatur, wenn vorhanden	413°

Bei der Prüfung anderer einfacher Metallsalze auf Modifikationsänderungen dieser Art macht man die Erfahrung, daß das vorhandene Material zur Diskussion meist zu gering ist. Ca-Salze zeigen wohl Umwandlungen, bei denen es nicht ausgeschlossen ist, daß die Kristallstruktur als Ganzes erhalten bleibt. Sie liegen aber bei so hoher Temperatur, daß die Deutung der Prozesse schwierig ist. Grahmann glaubte bei den Erdalkalisulfaten eher eine Symmetrieabnahme bei den Umwandlungen (Ca zum Beispiel 1150°) wahrgenommen zu haben. Hingegen zeigen wohl einfache Fe-Verbindungen ähnliche Erscheinungen wie die Alkalisalze. Schon Fe selbst soll bei kubischer Gesamtsymmetrie mehrere Umwandlungen erleiden. In FeS findet wieder eine Umwandlung vom rhombisch-pseudohexagonalen in den hexagonalen Charakter statt. Für Pyrit ist eine Symmetrieerhöhung aus der dyakisdodekaedrischen in die holoedrische Klasse des kubischen Kristallsystemes nicht

unwahrscheinlich. Auch Cu-Verbindungen zeigen ähnliche Tendenzen, so daß man allgemein sagen kann, daß bei höherer Temperatur sehr oft symmetrieherabsetzende Eigenschaften der Atome verschwinden.

Auf ein besonders ausgezeichnetes Beispiel sei noch hingewiesen. Es betrifft das die SiO_2-Modifikationen. Für die drei Gruppen der Cristobalite, Tridymite, Quarze sind wohl drei verschiedene Raumgitteranordnungen, die vielleicht auch chemisch verschiedenen Polymerisationsgraden entsprechen, wahrscheinlich. In jeder Gruppe zeigen sich aber außerdem energetisch geringfügige Umwandlungen von einer niedersymmetrischen in eine höhersymmetrische Form, wobei jeweilen die Kristallgestalt erhalten bleibt (Quarz rhomboedrisch-enantiomorph $\rightleftarrows$ hexagonal-enantiomorph bei 575°, Cristobalit pseudokubisch $\rightleftarrows$ kubisch zwischen 270°—198°, Tridymit pseudohexagonal $\rightleftarrows$ hexagonal bei zirka 163° vielleicht mit Zwischenstufe). Sie müssen wohl eine gemeinsame Ursache haben, die dem Si-Atom zugeschrieben werden kann, das dann bei tieferen Temperaturen nicht genau diejenige Symmetrie auszubilden gestatten würde, die mit dem jeweiligen Bauplan verträglich ist. Von besonderem Interesse ist der große Temperaturunterschied in den verschiedenen Gruppen; die Art der Bindung müßte von großem Einfluß auf die Änderung dieser Atombeschaffenheit sein.

Natürlich braucht es sich bei allen diesen Umwandlungen, die versuchsweise auf je ein Atom zurückgeführt wurden, nicht um dieselbe Symmetrieerhöhung im kristallographischen Sinne zu handeln. Das diskutierte Material weist nur mit größter Wahrscheinlichkeit darauf hin, daß bei einzelnen Atomen bei tiefen Temperaturen symmetrieherabsetzende Einflüsse sich geltend machen, die bei höherer Temperatur, in Abhängigkeit von der Art der Bindung und der Art der übrigen Atome im Kristallgebäude, verschwinden können. Dem Zusammentritt der Komplexe zum Kristallgebäude liegen allgemeine Kristallisationsgesetze zugrunde, so daß trotz dieser hemmenden Einflüsse schon bei niederer Temperatur in einfachen Verbindungen die dem Bauplan entsprechende höhere Symmetrie nahezu erreicht wird.

Vom strukturellen Standpunkte erlangen derartige Modifikationsänderungen besonderes Interesse, wenn mehrere teils zu Komplexen vereinigte Atomarten am Aufbau beteiligt sind, von denen einige bei der Umwandlung eine Erniedrigung der Freiheitsgrade erfahren. Nimmt mit steigender Temperatur der symmetrieherabsetzende Einfluß kontinuierlich ab, so werden sich derartige Atome immer mehr derjenigen höhersymmetrischen, ausgezeichneten Stellung nähern, die im letzten Momente beim Umwandlungspunkt vielleicht sprungweise erreicht wird. Die Umwandlungspunkte erster Art sind dann nichts anderes als ausgezeichnete Punkte der Deformationskurven, die einem

Einschnappen der Massenschwerpunkte in neue Gleichgewichtslagen entsprechen.

Zur Demonstration derartiger Erscheinungen sei noch einmal die Pyritstruktur nach Bragg ins Auge gefaßt (Fig. 180 Seite 461). Nehmen wir einmal an, die Schwefelatome entfernen sich mit steigender Temperatur voneinander. Da sie sich auf den trigonalen Drehungsachsen bewegen müssen, nähern sie sich immer mehr den Zentren der kleinen Würfelchen von $\frac{1}{8}$ Volumen des Elementarwürfels. Es wird die über das Symmetriezentrum wirksame Kraft, die zwei Schwefelatome zusammenkoppelt, immer geringer, während die Unterschiede der von den Eisenatomen ausgehenden Bindungskräfte weniger groß werden. Vom mechanischen Standpunkte aus ließe sich erwarten, daß nach Erreichung eines gewissen Abstandes sprungweise (beziehungsweise mit sehr großer Beschleunigung) die S-Atome die Lage der $[\![\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}]\!]$ und $[\![\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]\!]$ Punkte einnehmen. Von dem Momente an hat die Baugruppe S_2 aufgehört zu existieren. Jedes Schwefelatom ist jetzt in gleicher Weise von 4 Fe-Atomen umgeben, wie das hinsichtlich der F-Atome des Flußspates nach der Braggschen Deutung (Fig. 181 auf Seite 461) der Fall ist. Die Symmetrie der Fe-Atomlagen in Hinsicht auf die Lagerung der übrigen Atome hätte sich erhöht. Die totale Atomanordnung zeigt nun nicht mehr paramorph hemiedrischen, sondern kubisch holoedrischen Charakter. Steht dem in der speziellen Atomsymmetrie, die ja in der Lage nicht zum Ausdruck kommt, nichts entgegen, so würde aus einer paramorph hemiedrischen Modifikation eine holoedrische unter Erhaltung der allgemeinen Kristallgestalt entstanden sein. Chemisch wäre ein solcher Vorgang als Dissoziation aufzufassen: aus der Verbindung Fe-S_2 hätte sich die Verbindung S-Fe-S gebildet.

Beruht, wie hier angenommen wurde, der schließlich die Modifikationsumwandlung bedingende Effekt auf einer bei Temperaturerhöhung zunächst kontinuierlich wirksamen Änderung, so muß sich mit Annäherung an die Umwandlungstemperatur das physikalische Verhalten ebenfalls demjenigen nähern, das für die zweite Modifikation bestimmend ist. Man würde also beispielsweise bei angenähert höhersymmetrischen Substanzen, die bei gewissen Temperaturen und Drucken in die wirklich höhersymmetrischen Modifikationen übergehen, eine Annäherung im äußeren Habitus, den Achsenverhältnissen, Winkelwerten usw. an die bei höherer Temperatur stabilen Modifikationen beim Erhitzen zu erwarten haben. Diese Folgerung ist glänzend bestätigt worden. Zuerst wurde sie für Quarz (α-β-Umwandlung) von verschiedenen Forschern hinsichtlich verschiedener Funktionen, wie Doppelbrechung, Winkelwerte, Dichte, Achsenverhältnisse festgestellt. Neuerdings hat R. Großmann (Diss., Leipzig 1917) Boracit und Leucit daraufhin geprüft.

Ganz deutlich zeigte sich, wie in allen Winkelwerten mit höherer Temperatur (zum Teil im Gegensatz zu dem Änderungssinne bei tiefen Temperaturen) in steigendem Maße ein Einfluß im Sinne der schließlichen Modifikationsänderung bemerkbar wird.

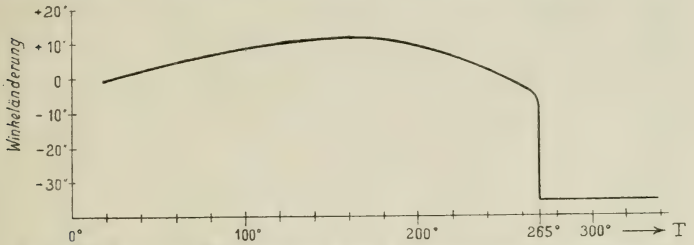


Fig. 189. Kurve der Winkeländerung zweier Pseudowürfelflächen des Boracites (nach Großmann).

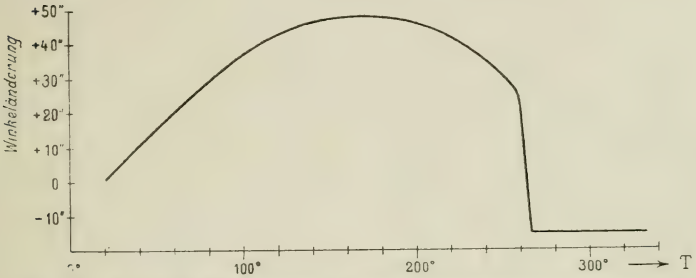


Fig. 190. Kurve der Winkeländerung zweier Pseudorhombendodekaederflächen des Boracites (nach Großmann).

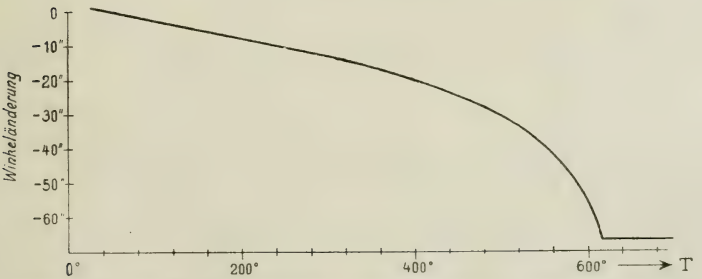


Fig. 191. Kurve der Winkeländerung zweier Pseudowürfelflächen des Leucites (nach Großmann).

Boracit wandelt sich bei 265° von einem pseudokubischen ins kubische Kristallsystem um. Unterhalb 265° ist der Winkel der Pseudowürfelflächen nicht konstant, oberhalb 265° muß er von der Temperatur unabhängig sein. Aus Fig. 189 ist ersichtlich, daß

nach anfänglicher Zunahme des Winkels mit steigender Temperatur eine Abnahme einsetzt, entsprechend dem niedrigeren Werte von 90° für die kubische Modifikation. Die Abnahme vom Maximum bis zur sehr beschleunigten bezw. sprungweisen Änderung beträgt natürlich nur wenige Sekunden. Noch ausgesprochener sind diese Erscheinungen bei der Winkeländerung (101) (011) des Boracites zu erkennen (Fig. 190). Beim Leucit, der oberhalb 600° wirklich kubisch wird, erfolgt die Änderung bis zum Modifikationsumschlag fast kontinuierlich, wie die schematische Figur 191 zeigt[1]).

Sind für eine kristallisierte Substanz derartige Modifikationsänderungen unter Erhaltung des allgemeinen Kristallgebäudes bekannt, so lassen sich die notwendig vorhanden sein müssenden Beziehungen zwischen den 2 Raumsystemsklassen zur Strukturbestimmung verwerten. Allerdings ist die Sachlage nicht so, daß dadurch eine eindeutige Strukturbestimmung ermöglicht würde; die Beziehungen zwischen den einzelnen Raumsystemen sind so mannigfaltiger Art, daß weitere einschränkende Voraussetzungen immer noch notwendig sind. Indem man einzelne mögliche Fälle diskutiert, übersieht man oft die vielen anderen, nicht weniger wahrscheinlichen Lösungen. Immerhin soll ein fingiertes Beispiel besprochen werden. Es handle sich um eine Verbindung mit einem Komplex MN_4, die aus einer rhombisch holoedrischen, pseudotrigonalen, in eine rhomboedrisch holoedrische Modifikation unter Erhaltung der Kristallgestalt übergeht. In beiden Fällen komme der Komplex in einem rechtwinkligen (orthohexagonalen) Elementarparallelepiped zweimal vor. M ist somit elementar zwei-, N elementar achtzählig. Rhombisch holoedrische Gruppen mit zwei- und achtzähligen Punkten gibt es 10, die Struktur ist in dieser Hinsicht also ganz unbestimmt. Rhomboedrisch holoedrische Raumsysteme mit derartiger Zähligkeit gibt es aber nur eines D_{3d}^1. Die zweizähligen Punkte sind Eckpunkte und Basiszentrum des Elementarparallelepipeds, sie besitzen die Symmetrie D_{3d}. Die achtzähligen Punkte müssen auf den übrigen trigonalen Achsen liegen (Symmetriebedingung C_3), und zwar liegt je einer gleichviel unterhalb der Grundfläche wie der andere auf der gleichen Achse oberhalb der Grundfläche. (Siehe Figur 192_I). Von einem Komplex MN_4 läßt sich dann nicht mehr sprechen. Jedes N-Atom ist genau gleichweit von drei M-Atomen entfernt. Es hat eine vollständige Aufteilung stattgefunden. Die zwei M-Atome sind einander identisch, d. h. parallel gestellt. Das sind sie auch in dem rhombisch holoedrischen Raumsystem $\mathfrak{B}_h^{19}$, dem ebenfalls achtzählige Punkte eigen sind. Soll ein kontinuierlicher Übergang in die Anordnung D_{3d}^1 möglich sein, so müssen die N-Atome auf der Spiegelebene (010) liegen. (Längere Achse diesmal mit a bezeichnet.) Je vier können jetzt aber näher einem M-Atom sein und einen Komplex MN_4 bilden. Haben die N-Atome bei Temperaturerhöhung eine relative Verschiebungstendenz in der Pfeilrichtung der Fig. 192_{II}, so wird ver-

[1]) Über gleichzeitig auftretende Zwillingsbildung usw. siehe die Originalarbeit.

ständlich, daß diese verschwindet, sobald eine gleiche Entfernung von drei M-Atomen erreicht ist. Grundbedingung dafür ist natürlich das zunächst nahezu und dann ganz erfüllte orthohexagonale Verhältnis a : b. Es ist nicht unwahrscheinlich, daß in K_2SO_4 hinsichtlich des Komplexes SO_4, der Prozeß der Modifikationsänderung in diesem Sinne verläuft.

Bei den Modifikationsänderungen der zweiten Art treten größere Umstellungen im Kristallgebäude auf. Die einfachsten ent-

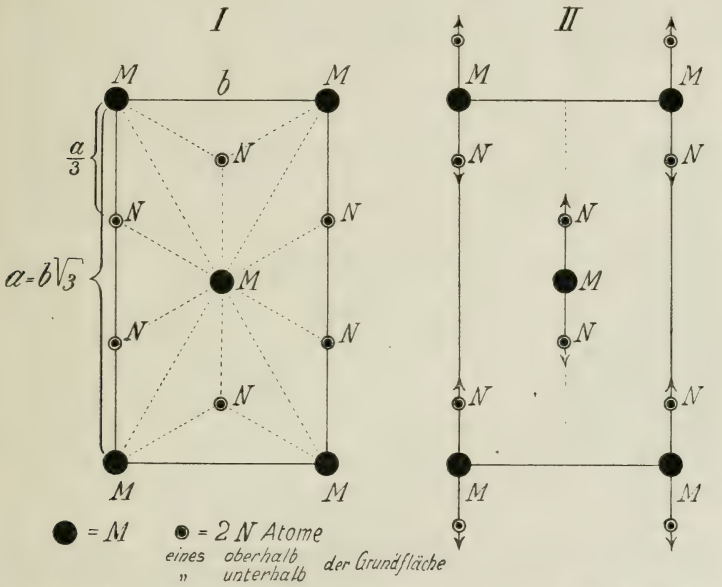


Fig. 192. Trigonale und pseudotrigonale Struktur eines Komplexes MN_4 auf (001).

sprechenden Deformationen, die man auch sonst bei verschiedenen Kristallarten wahrnehmen kann, sind diejenigen, welche man als mechanische Translationen und einfache Kristallschiebungen bezeichnet hat. Sie mögen vom strukturgeometrischen Standpunkte aus kurz besprochen werden.

Manche Kristallarten lassen sich mechanisch parallel bestimmten Ebenen und in bestimmter Richtung innerlich verschieben. Außer der Parallelverschiebung treten hierbei keinerlei Umstellungen oder Deformationen auf. Mügge hat derartige Gleitverschiebungen als mechanische Translationen bezeichnet. Die Gleitfläche wird Trans-

lationsfläche (T), die Gleitrichtung Translationsrichtung (t) genannt. Die gitterförmige Anordnung der Massenteilchen im Diskontinuum läßt diese Erscheinungen ohne weiteres verstehen. Doch müssen praedestinierte Gleitflächen offenbar eine ganz besondere strukturelle Bedeutung besitzen, damit eine leichte Verschiebbarkeit der Teilchen gegeneinander eintreten kann. Die Lage der Translationsflächen wird daher in irgend einer, bis jetzt noch nicht näher bekannten Beziehung zur Kristallstruktur stehen.

Nach einer tabellarischen Zusammenstellung von Johnsen zeigen folgende Mineralien die Erscheinungen der mechanischen Translation:

Name, Zusammensetzung	Kristallklasse	T	t
Au Gold	kubisch holoedrisch	(111)	? [101]
PbS Bleiglanz	„ „	(100)	[110], [010]
NaCl Kochsalz	„ „	(110)	$[1\bar{1}0]$
KCl Sylvin	kub. enantiom.	(110)	$[1\bar{1}0]$
H_2O Eis	hexag. hemim.	(0001)	?
$MgCO_3$ Magnesit	rhomboedr. hol.	(0001)	$(0001:10\bar{1}1)$
$MgCa(CO_3)$ Dolomit	rhomboedr. tetart.	(0001)	„
$PbCl_2 \cdot PbCO_3$ Phosgenit	tetragonal hol.	(110)	[001]
$CaSO_4$ Anhydrit	rhombisch hol.	(001)	[010]
SbS_3 Antimonit	„ „	(010)	[001]
$CaSO_4 \cdot 2H_2O$ Gips	monokl. hol.	(010)	[001] und ?
$Fe_3(PO_4)_2 \cdot 8H_2O$ Vivianit	„ „	(010)	[001]
$TlAsS_2$ Lorandit	„ „	$(10\bar{1})$	[010]
$HK_2Al_2O_4 \cdot 2SiO_2$ Muskowit	„ „	(001)	?
$PbSO_4 \cdot Pb(OH)_2 \cdot 2PbCO_3$ Leadhillit	„ „	(001)	?
Al_2SiO_5 Disthen	triklin hol.	(100)	[001]

Mit dem nicht sehr gut gewählten Ausdruck einfache Schiebung bezeichnet man durch Druck hervorgerufene Translationen in Kristallen, die den einheitlich deformierten Teil in Zwillingsstellung zum undeformierten bringen. Von Reusch, Baumhauer, Mügge, Liebisch, Wallerant und neuerdings besonders Johnsen sind die außerordentlich interessanten und übersichtlichen Erscheinungen eingehend studiert worden. Sie können als homogene, wenn auch nicht rein homogene, Deformationen beschrieben werden. Bei jeder einfachen Kristallschiebung lassen sich folgende wichtige Elemente erkennen.

1. Das Deformationsellipsoid, das aus einer Kugel mit dem Radius 1 durch Deformation hervorgegangen ist. Die größte und kleinste Achse des Ellipsoides heißen Hauptachsen der Schiebung.

2. Die Kreisschnittebenen K_1 und K_2 des Deformationsellipsoides mit den Indizes $(h_1 k_1 l_1)$ bezw. $(h_2 k_2 l_2)$. Das sind die einzigen Ebenen,

die keine Verzerrung erleiden. K_1 ist die Gleitfläche, sie erfährt auch keine Lagenänderung.

3. Die auf K_1 und K_2 senkrecht stehende Ebene der Schiebung $(h_3 k_3 l_3) = S$.

4. Die Schnittlinien dieser Ebene der Schiebung mit den Kreisschnittebenen K_1 und K_2. Die erstere wird mit τ_1 als Schiebungsrichtung $[u_1 v_1 w_1]$ bezeichnet, die letztere mit τ_2 als Grundzone $[u_2 v_2 w_2]$.

Durch zwei der 5 Elemente K_1, K_2, S, τ_1, τ_2 sind die übrigen bestimmt, sie lassen sich leicht analytisch auffinden, wenn man die zwischen ihnen herrschenden allgemeinen Beziehungen formelgemäß darstellt.

Da erfahrungsgemäß durch die einfache Kristallschiebung Ebenen mit kleinen rationalen Indizes in neue Ebenen mit ebenfalls relativ kleinen ganzzahligen Indizes übergeführt werden, so muß von den zwei Elementarpaaren $K_1\,\tau_2$ und $K_2\,\tau_2$ mindestens eines relativ kleine rationale Indizes besitzen. Darnach lassen sich zwei Hauptfälle unterscheiden (Mügge):

α. $K_1 = (h_1 k_1 l_1) =$ rationale erste Kreisschnittebene, zugleich Gleitfläche und Zwillingsebene. Sie enthält die im allgemeinen irrationale Schiebungsrichtung $[u_1 v_1 w_1]$.

$K_2 = (h_2 k_2 l_2) =$ im allgemeinen irrationale zweite Kreisschnittebene (ohne Verzerrung, aber mit größter Lageänderung). Sie enthält die rationale Grundzone $[u_2 v_2 w_2]$. Die Zwillingsachse normal zu $(h_1 k_1 l_1)$ besitzt im allgemeinen irrationale Indizes.

β. $K_1 = (h_1 k_1 l_1) =$ im allgemeinen irrationale Kreisschnittebene, zugleich Gleitfläche ohne Lageänderung und Verzerrung. Sie enthält die rationale Schiebungsrichtung $[u_1 v_1 w_1] = \tau_1$. die zugleich Zwillingsachse ist.

$K_2 = (h_2 k_2 l_2) =$ die zweite Kreisschnittebene ist rational. Sie enthält die irrationale Grundzone. Die auf $[u_1 v_1 w_1]$ senkrecht stehende sogenannte Zwillingsebene ist im allgemeinen irrational.

Man wird somit einfache Schiebungen vom Typus *α* im allgemeinen definieren durch die Gleitfläche (Zwillingsebene) und die Grundzone. Schiebungen vom Typus *β* durch die Schiebungsrichtung (Zwillingsachse) und die zweite verzerrungsfreie Kreisschnittebene.

Geht durch eine Kristallschiebung ein Gitter in sich selbst über, so spricht man nach Johnsen von einer Gitterschiebung. Die Gitterpunkte erfahren dann reine Schiebungen im mechanischen Sinne, also lediglich geradlinige Bewegungen, die dem Abstand von der Gleitfläche proportional sind. Es ist durchaus nicht notwendig, daß die Massenteilchen eines Kristallgebäudes derartige schiebungsfähige Gitter

bilden oder etwa das primitive Gitter einer Kristallart einfache Schiebungen erleiden muß. Auch dann, wenn die Schwerpunkte der Massenteilchen oder Komplexe in einem schiebungsfähigen Gitter angeordnet sind, müssen bei der Schiebung die Massenteilchen oder Komplexe Deformationen erleiden, sofern sie nicht in bezug auf die Zwillingselemente von vornherein symmetrisch gebaut sind. Betrachten wir zunächst einfache Schiebungen vom Typus α. Alle Elemente werden auf das Elementarparallelepiped bezogen. Die Gleitfläche $(h_1 k_1 l_1)$ ist Zwillingsebene.

Wenn das Elementargitter in sich durch die Schiebung deformiert werden soll, so muß nach der Schiebung jeder Gitterpunkt des deformierten Teiles in bezug auf die Gleitfläche spiegelbildlich zu einem nicht deformierten Gitterpunkt stehen. Das ist (wir folgen den einfachen und klaren Ausführungen von Wallerant) nur dann möglich, wenn sich vor der Schiebung im Elementargitter je zwei Gitterpunkte durch eine zur Grundzone parallele Gerade verbinden lassen und jede dieser Strecken durch die Gleitfläche (spätere Zwillingsebene) halbiert wird. Analytisch drücken sich, wenn [m n p] und [m′ n′ p′] zwei derartige Gitterpunkte darstellen, diese Bedingungen folgendermaßen aus:

$$(m' - m) : (n' - n) : (p' - p) = u_2 : v_2 : w_2$$
$$h_1 (m' + m) + k_1 (n' + n) + l_1 (p' + p) = 0$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach m, n, p ergibt:

$$m = m' - 2\,u_2 \frac{h_1 m' + k_1 n' + l_1 p'}{h_1 u_2 + k_1 v_2 + l_1 w_2}$$
$$n = n' - 2\,v_2 \frac{h_1 m' + k_1 n' + l_1 p'}{h_1 u_2 + k_1 v_2 + l_1 w_2}$$
$$p = p' - 2 w_2 \frac{h_1 m' + k_1 n' + l_1 p'}{h_1 u_2 + k_1 v_2 + l_1 w_2}$$

m, n, p, m′, n′, p′ müssen als Gitterpunkte ein- und desselben, einfachprimitiven Elementargitters, mit dem Nullpunkt in einem Eckpunkt, immer ganze Zahlen sein. Da sie im übrigen unendlichfach variabel sind und $u_2 v_2 w_2$ relativ prim erscheinen, ergibt sich als notwendige Bedingung

$$h_1 u_2 + k_1 v_2 + l_1 w_2 = \pm 1 \text{ oder } \pm 2$$

Ist diese Bedingung zwischen den Indizes der Gleitfläche und Grundzone erfüllt, so ist das Elementargitter schiebungsfähig, sofern es einfach primitiv ist.

Ist das Elementargitter flächenzentriert oder innenzentriert, so enthält es auch Punkte mit Halben als Koordinaten. Wir können nun nach den obigen Gleichungen berechnen, wie h, k, l und u, v, w beschaffen sein müssen, damit zu einem jeden derartigen Punkt auch einer in entsprechender Lage gehört. Bei bekannten Werten der Schiebungselemente

ist auf diese Weise überhaupt die Beschaffenheit von schiebungsfähigen Gitterkomplexen auffindbar. Es läßt sich für den speziellen Fall flächenzentrierter oder innenzentrierter Elementargitter aber auch ein anderer Weg einschlagen. Man stellt ein für alle Male die Transformationsformeln für die neu entstehenden Primitivgitter auf. Darauf bezogen muß dann die Produktensumme der analogen Indizes von $K_1 \tau_2$ wieder ± 1 oder 2 sein. Drückt man diese Indizes in den alten Indizes aus, so erhält man die diesbezüglichen Bedingungen.

1. Ist das Elementargitter innenzentriert, so werden: $[111] \rightarrow [100]$; $[\bar{1}11] \rightarrow [010]$; $[00\bar{1}] \rightarrow [001]$; $(10\bar{1}) \rightarrow (111)$; $(\bar{1}10) \rightarrow (100)$: $(1\bar{1}0) \rightarrow (010)$; $(\bar{1}01) \rightarrow (001)$.

Daraus findet man[1]) im extremsten Falle der Nichtprimitivität der berechneten neuen Indizeswerte:

$$\frac{h_1 - k_1 + l_1}{2} \cdot \frac{u_2 - v_2}{2} + \frac{h_1 + k_1 + l_1}{2} \cdot \frac{u_2 + v_2}{2} + l_1 \frac{w_2 - u_2}{2} = \pm 1 \text{ oder } \pm 2.$$

Auflösen ergibt:

$$\tfrac{1}{2} h_1 u_2 + \tfrac{1}{2} k_1 v_2 + \tfrac{1}{2} l_1 w_2 = \pm 1 \text{ oder } \pm 2.$$

Nennt man $(h_1 u_2 + k_1 v_2 + l_1 w_2) = z$, so erhält man die Sätze:

Ist $z = 1$, so ist das innenzentrierte Elementarparallelepiped stets schiebungsfähig; ist $z = 2$ und die Summe $h_1 + k_1 + l_1 =$ gerade, ebenfalls; ist $z = 2$ und die Summe $h_1 + k_1 + l_1$ ungerade, so müssen $u_2 v_2 w_2$ ungerade sein; ist $z = 4$, so ist das innenzentrierte Gitter nur schiebungsfähig, wenn die Summe $h_1 + k_1 + l_1$ gerade und alle Indizes $u_2 v_2 w_2$ ungerade sind.

---

[1]) Am ersten Beispiel sei die Ableitung der Sätze erläutert. Bei der Transformation auf $[111]$ und $[\bar{1}11]$ als neue $[010]$- und $[100]$-Achsen werden die neuen Flächenindizes von k_1 nach Gleichung 74 Seite 522 zu $(h_1 - k_1 + l_1) : (h_1 + k_1 + l_1) : l_1$ beziehen sich aber dann auf (001) als 8 neue Einheitsflächen. Bezogen auf $(10\bar{1})$ als Einheitsfläche lauten sie daher, je nachdem, ob die Summe $(h_1 + k_1 + l_1)$ gerade oder ungerade:

$$\left(\frac{h_1 - k_1 + l_1}{2}, \frac{h_1 + k_1 + l_1}{2}, l_1\right) \text{ oder } (h_1 - k_1 + l_1,\ h_1 + k_1 + l_1,\ 2l_1).$$

Ebenso liefert Gleichung 73 Seite 521 in Rücksicht auf die neue Einheitsebene als Indizes von τ_2:

$$\left[\frac{u_2 - v_2}{2}, \frac{u_2 + v_2}{2}, \frac{w_2 - u_2}{2}\right],$$

oder wenn die Zähler nicht zwei als gemeinsamen Teiler haben:

$$[u_2 - v_2,\ u_2 + v_2,\ w_2 - u_2].$$

Setzt man diese Werte in die Wallerantsche Gleichung ein, so ergeben sich je nachdem, ob durch 2 zu dividieren ist oder nicht:

$$2z = \pm 1 \text{ oder } \pm 2 \qquad z = \pm 1 \text{ oder } \pm 2 \qquad \tfrac{1}{2} z = \pm 2.$$

Die mitgeteilten Sätze formulieren die Einzelbedingungen.

Man kann aber auch direkt die Seite 542 mitgeteilten Bedingungen benutzen und daraus die Beziehungen dafür ableiten, daß zu jedem Punkt $\left[\frac{n}{2}, \frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right]$ ein analoger Punkt gehört. (n, n_1, n_2 entweder alle ungerade oder gerade ganze Zahlen.)

2. Ist das Elementarparallelepiped basisflächenzentriert, so werden: $[110] \rightarrow [100]$; $[1\bar{1}0] \rightarrow [010]$; $[001] \rightarrow [001]$; $(201) \rightarrow (111)$; $(110) \rightarrow (100)$; $(1\bar{1}0) \rightarrow (010)$; $(001) \rightarrow (001)$; und man erhält die Sätze:

Ist $z = 1$, so ist das basisflächenzentrierte Elementarparallelepiped stets schiebungsfähig, ist $z = 2$ und die Summe $h_1 + k_1 =$ gerade, ebenfalls: ist $z = 2$ und die Summe $h_1 + k_1$ ungerade, so müssen w_2 gerade, u_2 und v_2 ungerade sein; mit $z = 4$ ist das basisflächenzentrierte Gitter nur schiebungsfähig, wenn die Summe $h_1 + k_1$ gerade und w_2 gerade, $u_1 v_2$ aber ungerade sind.

Analoge Sätze gelten für seitenflächenzentrierte Elementarparallelepipede.

3. Ist das Elementarparallelepiped allseitig flächenzentriert, so werden: $[110] \rightarrow [100]$; $[011] \rightarrow [010]$; $[101] \rightarrow [001]$; $(111) \rightarrow (111)$; $(11\bar{1}) \rightarrow (100)$; $(\bar{1}11) \rightarrow (010)$; $(1\bar{1}1) \rightarrow (001)$;

Man erhält die Sätze:

Ist $z = 1$, so ist das allseitig flächenzentrierte Elementarparallelepiped stets schiebungsfähig; ist $z = 2$ und sind alle Indizes $h_1 k_1 l_1$ ungerade oder die Summe $u_2 + v_2 + w_2$ gerade, ebenfalls; mit $z = 4$ entsteht nur ein schiebungsfähiges Primitivgitter, wenn alle Indizes $h_1 k_1 l_1$ ungerade sind und gleichzeitig die Summe $u_2 + v_2 + w_2$ gerade ist.

Mit diesen Sätzen läßt sich sofort erkennen, ob ein primitives Gitter schiebungsfähig ist, sofern $h_1 k_1 l_1$ oder $u_2 v_2 w_2$ auf ein wirklich elementares Gitter bezogen werden.

Die Zahl z gibt an, wievielmal elementar der Inhalt eines Parallelepipedes wird, dessen eine Kante die Grundzone ist, dessen zwei andere Kanten ein elementares Paar in der Gleitfläche bilden. Dieses Parallelepiped, das wir der Einfachheit halber bei gleichzeitiger rationaler Schiebungsrichtung so konstruieren, daß die Schiebungsrichtung eine der zwei in K_1 liegenden Geraden ist, nennen wir Schiebungsparallelepiped, die Zahl z aber Elementarzahl der Schiebung.

In der nachstehenden Tabelle sind einige Kristallarten des Typus α mit ihren Schiebungselementen und den Elementarzahlen der Schiebung zusammengestellt. (Angaben der ersteren zum Teil nach Johnsen[1]).

[1]) A. Johnsen transformiert die allgemeinen, noch nicht auf spezielle Achsenverhältnisse bezogenen Indizes der Schiebungselemente auf die einzelnen primitiven Tripel der verschiedenen Raumgitterarten. Die Transformationsgleichungen und allgemeinen Symbole bedingen, daß eventuell die einzusetzenden Indizes noch nicht relativ prim erscheinen. Es sind nun aber von Johnsen neun Gleichungen abgeleitet worden, die unter allen Umständen ganzzahlige und relativ prime Werte $z_1, z_2, \ldots z_9$ ergeben müssen, soll die in Betracht gezogene Gitterart schiebungsfähig sein. Sie lauten, wenn

Mineralname, Kristallklasse	K_1	T_2	Elementarzahl der Schiebung	Bemerkungen über die einfachsten schiebungsfähigen Gitter.
Eisen (regulär holoedrisch)	(112)	[111]	4	Nur d. innenzentrierte Gitter.
Rutil (tetrag. holoedrisch)	(101)?	[103]?	4	Kein einfaches tetragonales Gitter! (Das seitenflächenzentrierte müßte zugleich allseitig zentriert sein.)
Wismut, Kalkspat, Natronsalpeter } rhomboedr. holoedrisch	(011)	[011]	2	Das einfachprimitive, das flächenzentrierte und das innenzentrierte.
Millerit rhomboedr. holoedr.	(011)	[111]	2	Das einfachprimitive und innenzentrierte.
Eisenglanz, Korund } rhomboedr. holoedrisch	(111)	[211]	4	Das flächenzentrierte Elementargitter.
Aragonit, Karnallit, Kalisalpeter } rhomboedr. holoedrisch	(110)	[310]	4	Das basisflächenzentrierte Elementarparallelepiped.
Diopsid monokl. holoedr.	(001)	[001]	1	Alle einfachen Elementargitter.
Albit? triklin holoedrisch	(010)	[010]	1	Desgl.

In allen denjenigen Kristallklassen, bei denen die Achsenverhältnisse variabel oder gar die Achsenrichtungen beliebig wählbar sind, ist keinerlei Bürgschaft vorhanden, daß das makroskopisch bestimmte Zahlen- und Richtungsverhältnis der Koordinatenachsen strukturell als elementar zu bezeichnen ist. In solchen Fällen hat es daher einen Sinn, zu fragen, ob etwa ein dem vorläufig als elementar angesehenen hypothetischen Gitter übergeordnetes Teilgitter ebenfalls schiebungsfähig ist. Mit anderen Worten, es ist zu untersuchen, ob bei Transformation von K_1 und τ_2 auf ein neues, möglicherweise elementares Koordinatenachsensystem sich schiebungsfähige neue Elementar- oder Primitivgitter einstellen.

---

die auf primitive Tripel bezogenen Indizes (hkl) und [uvw] wohl ganzzahlig, aber nicht notwendigerweise prim sind:

$$z_1 = \frac{hu - kv - lw}{hu + kv + lw};\quad z_2 = \frac{2ku}{hu + kv + lw};\quad z_3 = \frac{2lu}{hu + kv + lw};$$

$$z_4 = \frac{kv - lw - hu}{hu + kv + lw};\quad z_5 = \frac{2lv}{hu + kv + lw};\quad z_6 = \frac{2hv}{hu + kv + lw};$$

$$z_7 = \frac{lw - hu - kv}{hu + kv + lw};\quad z_8 = \frac{2hw}{hu + kv + lw};\quad z_9 = \frac{2kw}{hu + kv + lw}.$$

Substitution der allgemeinen Indizes und Auflösen der 9 Gleichungen ergibt, ob und welche speziellen Werte die neuen Gleichungen befriedigen.

Bei rhombischen Kristallen können wir uns das Achsenverhältnis bei gleichbleibender Achsenlage als Elementarverhältnis vervielfacht denken. Ist (z. B. Aragonit) $(110) = K_1$ und $[310] = \tau_2$, so wird von Einfluß nur eine Änderung des Verhältnisses $a : b$ sein. Wäre das strukturell richtige Verhältnis von $\frac{a}{b}$ n mal größer als das makroskopisch angenommene Achsenverhältnis, so würden die Indizes von $K_2 = (n10)$, die von $\tau_2 = [3n0]$. Es ist leicht ersichtlich, daß ein Wert ≤ 4 (exklusive 3) sich nur einstellt, wenn $n = 3$ ist, so daß, auf einfache Zahlenwerte gebracht, $\tau_2 = [110]$ wird. Bei einem solchen Elementarverhältnis würden die primitiven Gitter bei Basiszentrierung ebenfalls schiebungsfähig werden.

Die Kreisschnittebene K_1 von Diopsid ist, so lange die Struktur als Unbekannte angesehen werden muß, nur als Ebene (h0l) bestimmt. Fixieren wir die Grundzone, indem wir ihr das Symbol [001] geben, so können wir (h0l) irgend ein Symbol $(h0\overset{\pm}{1})$ oder $(h0\overset{\pm}{2})$ zuordnen, stets werden die dadurch bestimmten Elementargitter und primitiven Gitter bei Zentrierungen schiebungsfähig sein. Wir können aber bei gegebenem (h0l) auch der Grundzone noch verschiedene Symbole [u0w] verleihen und die Mannigfaltigkeit dadurch erhöhen. Alle diese Transformationen verlieren ihre Bedeutung, sobald das Strukturgitternetz bekannt ist. Dann wird dasjenige Gitter in Betracht zu ziehen sein, dem die Vollzahl von Massenschwerpunkten zukommt oder das die wichtigsten Komplexschwerpunkte beherbergt.

Sind $(h_1k_1l_1)$ und $[u_2v_2w_2]$ sowie die Atomanordnungen bekannt, so läßt sich nach den Formeln auf S. 542 sofort bestimmen, ob die Atomschwerpunkte geradlinige Wege zurücklegen können. Die Formeln sind hinreichend bei Vorhandensein eines Symmetriezentrums, anderenfalls müssen eventuell auf die Zwillingsachse als Drehungsachse bezügliche Formeln abgeleitet werden. Bei mehratomigen Verbindungen werden die Bedingungen für alle Atome gleichzeitig nur in Ausnahmefällen erfüllt sein, die geradlinige Bewegung der Atome bei der Schiebung ist ein seltener Vorgang. Hingegen ist es, wie Johnsen zeigte, nicht selten, daß Komplexschwerpunkte in schiebungsfähigen Gittern angeordnet sind. Die zwischen den Einzelbestandteilen des Komplexes auftretenden Valenzkräfte sind dann so groß, daß bei der Schiebung die Komplexe unter Drehung und oft zykloidischer Bewegung der Einzelatome zusammenbleiben. Die einfachen Schiebungen von Kalkspat, Wismut, Korund, Eisenglanz sind ein schöner Beweis für stark innermolekulare Bindungen in Kristallen. Sie zeigen, daß gewisse Atome notwendigerweise zu Komplexen, Baugruppen, zusammengefaßt werden müssen. Daß derartige Baugruppen für sich schwingungsfähige Gebilde darstellen, ist von Schäfer und anderen gezeigt worden.

Vor und nach einer Schiebung vom Typus α kommen der Gleitfläche und der rationalen Grundzone die gleiche Bedeutung zu. Bezogen auf das Schiebungsparallelepiped behalten daher alle Flächen und Geraden ihre Indizes bei, lediglich der auf $[u_2v_2w_2]$ als z-Achse bezogene Index wird negatives Vorzeichen erhalten.

Die derartigen Indizes einer Fläche sollen (qrs) genannt worden, dann geht die Fläche (qrs) infolge der Schiebung in (qrs) über. Daraus ergibt sich sofort, daß ganz unveränderte Bedeutung nur denjenigen rationalen Ebenen zukommt, für welche $s = 0$ oder $p = r = 0$ sind. Das sind Ebenen, die der Zone $[u_2 v_2 w_2]$ angehören oder der Gleitfläche parallel gehen.

Sind $[u'v'w']$ $u''v''w'']$ $[u_2 v_2 w_2]$ die Kanten des Schiebungsparallelepipeds, bezogen auf das Elementarparallelepiped (wobei die ersten zwei in der Ebene $(h_1 k_1 l_1)$ ein primitives Paar bilden), so erhält man nach Seite 522 sofort die auf eine bestimmte Einheitsfläche ansprechenden Transformationsgleichungen:

$$\begin{aligned} q &= hu' + kv' + lw' & q &= h^x u' + k^x v' + l^x w' \\ r &= hu'' + kv'' + lw'' & r &= h^x u'' + k^x v'' + l^x w'' \\ s &= hu_2 + kv_2 + lw_2 & s &= h^x u_2 + k^x v_2 + l^x w_2 \end{aligned}$$

worin (hkl) die auf das Elementarparallelepiped bezogenen Flächenindizes vor der Schiebung sind, die durch die Schiebung in $(h^x k^x l^x)$ übergehen. Die Gleichungen gestatten $(h^x k^x l^x)$ in (hkl) $[u_2 v_2 w_2]$, $[u'v'w']$ $[u''v''w'']$ oder $(h_1 k_1 l_1)$ auszudrücken [1]).

Sie ergeben durch entsprechende Umformung:

$$\begin{aligned} (h - h^x) : h_1 = (k - k^x) : k_1 = (l - l^x) : l_1 = \\ = 2(u_2 h + v_2 k + w_2 l) : (u_2 h_1 + v_2 k_1 + w_2 l_1). \end{aligned}$$

Daraus lassen sich $h^x k^x l^x$ berechnen, die als Indizes auf eine ganzzahlige Form ohne gemeinsamen Teiler gebracht werden müssen.

Auf ähnliche Weise erhält man zwischen den Indizes $[u\,v\,w]$ vor der Schiebung und $[u^x v^x w^x]$ nach der Schiebung folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} (u - u^x) : u_2 = (v - v^x) : v^2 = (w - w^x) : w = \\ = 2(h_1 u + k_1 v + l_1 w) : (u_2 h_1 + v_2 k_1 + w_2 l_1). \end{aligned}$$

Das Schiebungsparallelepiped bei einfachen Schiebungen vom Typus β wird so konstruiert, daß $[u_1 v_1 w_1]$ z-Kante wird und die beiden anderen Kanten ein elementares Periodenpaar der zweiten Kreisschnittebene darstellen $(K_2 = (h_2 k_2 l_2))$. Besitzt eine Ebene in bezug auf dieses Parallelepiped die Indizes (qrs), so erhält sie nach der Deformation die Indizes $(\bar{q}\,\bar{r}\,s)$. Bezogen auf das Elementarparallelepiped werden die Formeln analog denen des Typus α, an Stelle von $[u_2 v_2 w_2]$ ist nur $[u_1 v_1 w_1]$, an Stelle von $(h_1 k_1 l_1)$ aber $(h_2 k_2 l_2)$ zu setzen. Ein näheres Eingehen erweist sich daher als überflüssig.

Manche Modifikationsänderungen von Substanzen, bei denen die Kristallgestalt als Ganzes nicht erhalten bleibt, die Verwandtschaft zwischen beiden Strukturen aber doch augenfällig ist, stehen, wie

[1]) Die Determinaten von $[u'v'w']$ $[u''v''w'']$ können durch $h_1 k_1 l_1$ ersetzt werden, da die beiden Geraden in dieser Ebene liegen.

bereits bemerkt, mit mechanischen Translationen oder einfachen Kristallschiebungen in Beziehung.

So lassen sich beispielsweise hexagonale und kubische Raumsysteme mittels Translationsschiebungen auseinander ableiten. Denken wir uns einen Typus wie ZnS als Sphalerit (Zinkblende siehe Seite 461) derartig deformiert, daß senkrecht zu einer der ursprünglich trigonalen Achsen die Atome aller Massenebenen (111) senkrecht übereinander zu liegen kommen, so ist die neue Anordnung hexagonal hemimorph-hemiedrisch. Verschiebungen (Translationen) von der Größe $a\sqrt{\frac{2}{3}}$ (siehe Fig. 193) der respektiven Massenebenen gegeneinander genügen zu diesem Zwecke. Es entstünde hierbei auch im chemischen Sinne eine neue Konstellation. War vorher jedes Zn-Atom in gleicher Weise von 4 S-Atomen umgeben und umgekehrt, so würden sich jetzt Komplexe ZnS herausheben mit Atomabständen im Komplex von nur $\frac{1}{4}$ Größe der Komplexschwerpunktsabstände. Vielleicht besitzt Wurtzit einen derartigen Bauplan. Die chemischen Unterschiede innerhalb der Struktur müßten dann mit den Entstehungsbedingungen der Modifikationen und dem Verhalten gegenüber verschiedenen Lösungen in Beziehung gebracht werden können.

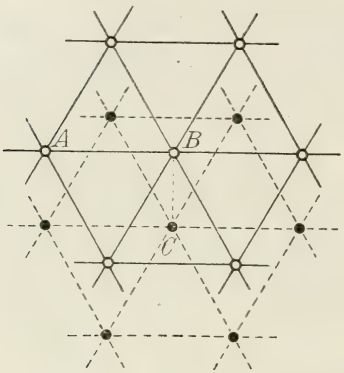


Fig. 193. Atomverteilung auf zwei nächsten (110)-Massenebenen im Typus Zinkblende.

Finden gesetzmäßig nach periodisch voneinander entfernten Ebenen einfache Schiebungen statt, so werden (bei Schiebungen vom Typus α) diese Ebenen Symmetrieebenen für die Struktur. Es ist daher möglich, daß in verschiedenen Klassen kristallisierende Modifikationen auch durch derartige homogene Deformationen ineinander übergeführt werden können.

6. Die Zusammenfassung der Raumsysteme und der Kristallklassen hinsichtlich besonderer physikalischer Vorgänge

Nicht durch jeden physikalischen Vorgang lassen sich alle Raumsysteme oder phänomenologisch alle Kristallklassen voneinander unterscheiden. Der physikalische Vorgang besitzt selbst eine gewisse Symmetrie, welche die Möglichkeit der Unterscheidung und des Auftretens bestimmt. Sind für die Art des Vorganges lediglich die Formen der Translationsgruppen maßgebend, so reduzieren sich, wie bereits im

II. Kapitel dargetan wurde, die Raumsysteme auf 14 Typen. Es sind das die Bravaisschen Gittertypen, die sich in der Form und den Symmetriebeziehungen der Identitätsabstände voneinander unterscheiden.

Die trikline Abteilung besitzt nur eine Translationsgruppe, die monokline 2, die rhombische 4 (Hemimorphie 5), die trigonale und hexagonale 2, die tetragonale 2, die kubische 3. Die Haupttabelle I, Seite 125—131 gibt über die Zuordnung der einzelnen Raumsysteme Auskunft.

Azentrische Vorgänge können nur in Raumsystemen auftreten, die keine Symmetriezentren besitzen. Es sind das die Raumsysteme der Klassen: C_1, C_2, C_s, V, C_{2v}, C_3, C_{3v}, D_3, C_{3h}, D_{3h}, C_6, C_{6v}, D_6, C_4, S_4, C_{4v}, V_d, D_4, T, T_d, O. Es sind 21 Klassen. Die unterstrichenen besitzen einzigartige Richtungen vom Charakter eines polaren Vektors. Sie kommen also beispielsweise für vektorielle Pyroelektrizität in Frage. (10 Klassen.)

Keine Symmetrieebenen enthalten die Raumsysteme der Klassen C_1, C_2, V, C_3, D_3, C_4, D_4, C_6, D_6, T, O. Es sind das die 11 enantiomorphen Klassen. Außer in diesen Klassen können noch in C_s, C_{2v}, S_4, V_d die Erscheinungen der Zirkularpolarisation wahrnehmbar sein. Der Ausdruck für das Drehungsvermögen kann phänomenologisch 9 verschiedene Formen annehmen. Er ist jeweilen gleich für die Klassen C_3, D_3, C_4, D_4, C_6, D_6 einerseits und T, O anderseits.

Ist ein Vorgang an sich von zentrosymmetrischem Charakter, so lassen sich phänomenologisch höchstens 11 Klassengruppen unterscheiden. Es sind die folgenden:

1. C_1, C_i = Trikline Abteilung.
2. C_2, C_s, C_{2h} = Monokline Abteilung.
3. V, C_{2v}, V_h = Rhombische Abteilung.
4. C_3, C_{3i} = Rhomboedrische Abteilung; paramorphe oder trigonale Untergruppe.
5. C_{3v}, D_3, D_{3d} = Rhomboedrische Abteilung; holoedrische oder ditrigonale Untergruppe.
6. C_6, C_{6h}, C_{3h} = Hexagonale Abteilung; paramorphe oder hexagonale Untergruppe.
7. D_{3h}, C_{6v}, D_6, D_{6h} = Hexagonale Abteilung; holoedrische oder dihexagonale Untergruppe.
8. C_4, S_4, C_{4h} = Tetragonale Abteilung; paramorphe oder tetragonale Untergruppe.
9. V_d, C_{4v}, D_4, D_{4h} = Tetragonale Abteilung; holoedrische oder ditetragonale Untergruppe.
10. T, T_h = Kubische Abteilung; paramorphe oder digonale Untergruppe.

11. T_d, O, O_h = Kubische Abteilung: holoedrische oder tetragonale Untergruppe.

(Für mechanisch-elastische und elastooptische Vorgänge fallen 6 und 7 einerseits, 10 und 11 anderseits zusammen, es sind 9 Gruppen unterscheidbar.)

Es tritt also an sich zu den Symmetrieverhältnissen ein Symmetriezentrum hinzu. Auf die Raumsysteme läßt sich diese einfache Deutung nicht ohne weiteres übertragen, man muß den Charakter des Vorganges genau kennen. Denn hier entstehen neue Raumsysteme nur bei ganz bestimmter Lage der Symmetriezentren, und es können aus einem Raumsystem verschiedene neue entstehen, wenn diese Lage wechselt. Ein Beispiel möge genügen. Die monoklin holoedrischen Raumsysteme besitzen folgende Untergruppen: $\mathfrak{C}_{2h}{}^1 = \mathfrak{C}_s{}^1\mathfrak{C}_2{}^1$; $\mathfrak{C}_{2h}{}^2 = \mathfrak{C}_s{}^1\mathfrak{C}_2{}^2$; $\mathfrak{C}_{2h}{}^3 = \mathfrak{C}_s{}^3\mathfrak{C}_2{}^3$; $\mathfrak{C}_{2h}{}^4 = \mathfrak{C}_s{}^2\mathfrak{C}_2{}^1$, $\mathfrak{C}_{2h}{}^5 = \mathfrak{C}_s{}^2\mathfrak{C}_2{}^2$; $\mathfrak{C}_{2h}{}^6 = \mathfrak{C}_s{}^4\mathfrak{C}_2{}^3$. Es können also aus jedem Achsensystem je nach der Lage der Symmetriezentren zwei holoedrische Raumsysteme entstehen.

Meistens wird es aber für die Deutung der Vorgänge genügen, wenn man die Spezialisierung der Gesetze phänomenologisch, das heißt auf die Kristallklassen bezogen, kennt. In diesem Sinne mögen noch einige Zusammenfassungen besprochen werden.

Ist der physikalische Vorgang durch ein gewöhnliches Tensortripel bestimmt (Dilatation, optisches Verhalten mit Ausschluß des Drehvermögens usw.), so reduzieren sich die 32 Kristallklassen auf 5 Gruppen:

1. C_1, C_i. Unbestimmte Lage des Tripels zu den Koordinatenachsen, dreiachsig (drei ungleiche Achsen).
2. C_2, C_s, C_{2h}. Ein Tensor mit der b-Achse parallel, dreiachsig.
3. C_{2v}, V, V_h. Das Tensortripel parallel den Koordinatenachsen, dreiachsig.
4. Alle trigonalen, hexagonalen und tetragonalen Klassen. Lage bestimmt. Hauptachse ∥ c. Zweiachsig.
5. Alle kubischen Klassen. Alle drei Tensoren gleichwertig. Kugel.

Ist das Tensortripel von axialem Charakter, so kann der zugehörige physikalische Vorgang nur in Klassen ohne Symmetriezentrum und ohne mehrere gleichwertige Symmetrieebenen (bei einer Hauptachse) bemerkbar sein. (Außerdem fällt noch C_{3h} aus, siehe besonders die Untersuchungen von W. Voigt z. B. im Lehrbuch der Kristallphysik, Leipzig 1910.) Die Ausdrücke spezialisieren sich in 7 verschiedenen Formen: 1. C_1. 2. C_2. 3. C_s. 4. C_{2v}. 5. D_4, C_4, D_3, C_3, D_6, C_6. 6. V_d, S_4. 7. T, T_d, O.

Ein physikalischer Vorgang vom Charakter eines axialen Vektors setzt einzigartige Richtungen voraus, die wohl senkrecht zu diesen Richtungen Symmetrieebenen, aber keine digonalen Achsen besitzen

dürfen. Durch die ausgezeichnete Richtung dürfen keinenfalls Symmetrieebenen gehen. (Pyromagnetische Vorgänge.) In C_1 und C_i ist jede Richtung von diesem Charakter. In C_s, C_2, C_{2h}, C_3, C_{3i}, C_{3h}, S_4, C_4, C_{4h}, C_6, C_{6h} den übrigen möglichen Klassen ist die Richtung des axialen Vektors durch die Symmetrieachse bestimmt.

Eine Reihe physikalischer Vorgänge stellt Kombinationen von Vektor- und Tensorgrößen dar. Die Spezialisierung der Ausdrücke läßt sich aus dem bereits Mitgeteilten leicht ableiten. Kombiniert sich beispielsweise ein axialer Vektor mit einem polaren gewöhnlichen Tensortripel (zentrischer Vorgang), so trennt sich die 4. Gruppe der Tensorgruppen in 2, da die einen Klassen gleichzeitig Größen besitzen, die sich auf den axialen Vektor beziehen. Es entstehen 6 Gruppen.

Ist ein analoger Vorgang azentrisch (polarer Vektor, axiales Tensortripel), so entstehen 11 verschiedene Gruppen, nämlich:

1. C_1. 2. C_2. 3. C_s. 4. C_{2v}. 5. V. 6. D_3, D_4, D_6. 7. C_{3v}, C_{4v}, C_{6v}. 8. C_3, C_4, C_6. 9. S_4. 10. V_d. 11. T, O.

Die piezoelektrischen Parameter (polares Trivektorsystem, axiales Tensortripel und polarer Vektor) erhalten (wie immer nach W. Voigt) von Null verschiedene Werte in den Klassen:

1. C_1. 2. C_2. 3. C_s. 4. V. 5. C_{2v}. 6. C_3. 7. D_3. 8. C_{3v}. 9. C_4, C_6. 10. D_4, D_6. 11. C_{4v}, C_{6v}. 12. S_4. 13. V_d. 14. D_{3h}. 15. C_{3h}. 16. T_d, T.

Diesem Schema folgen beispielsweise die elektrooptischen Erscheinungen.

Hinsichtlich der piezomagnetischen Konstanten (zentrischer Vorgang) tritt eine Zusammenfassung in folgende Gruppen in Erscheinung:

1. C_1, C_i. 2. C_2, C_s, C_{2h}. 3. C_{2v}, V, V_h. 4. C_{3v}, D_3, D_{3d}. 5. C_3, C_{3h}. 6. V_d, C_{4v}, D_4, D_{4h}, D_{3h}, C_{6v}, D_6, D_{6h}. 7. C_4, S_4, C_{4h}, D_{3h}, C_6, C_{6h}. 8. T, T_h. 9. T_d, O, O_h = alle Konstanten = Null.

7. Die sogenannte Pseudohomogenität und die Zwillingsbildung

Die Bestimmung der Klassensymmetrie einer Kristallart ist nach den gewöhnlichen Methoden nicht immer einwandfrei möglich. Das Ätzverfahren hat wohl schon gute Dienste geleistet, so lange aber über die Mechanik des Lösungsprozesses in Beziehung auf die Struktur unsere Vorstellungen nicht mehr gefestigt sind, dürfen alle diesbezüglichen Deutungen nur mit größter Vorsicht verwendet werden. Überhaupt wird es das nächstliegende Ziel einer rationellen Kristallographie sein müssen, die Grenzen der verschiedenen Bestimmungsmethoden und die gegenseitigen Beziehungen festzulegen. Insbesondere müssen wir wissen, welche Strukturverschiedenheiten sich nach jeder Beobachtungsmethode noch erkennen lassen; in welchem Verhältnis beispielsweise die Symmetrie der Massenschwerpunktsanordnung zu der auf irgendeinem Wege

bestimmbaren äußeren Symmetrie steht. Man darf nicht ohne weiteres etwas einander gleichsetzen, von dem man die engeren Beziehungen noch gar nicht kennt. Eine mehr physikalische Denkweise ist unbedingt nötig.

So ist es denn auch durchaus nicht ausgeschlossen, daß wir im groben makroskopischen, vielleicht sogar im bis jetzt feinsten Verfahren Symmetrieverhältnisse konstatieren, die in Wirklichkeit vom Diskontinuum nur ungefähr erfüllt sind oder bloß durch gegenseitigen Ausgleich als solche erscheinen. Derartige Pseudosymmetrien sind ja oft ihrer Natur nach noch zu erkennen, die Grenze der Unterscheidungsmöglichkeit hängt aber natürlich von den Beobachtungsmethoden und ihren meist bis jetzt nicht bestimmten Eindringungstiefen ab. Kristalle werden auch selten oder vielleicht nie als Diskontina völlig homogen sein, es ist sogar sehr wahrscheinlich, daß gerade eine „Pathologie der Kristalle" später wichtige Aufklärungen über die Vorgänge der Kristallisation und der Bewegungen im festen Zustande geben wird. Durch derartige Erwägungen wird naturgemäß am prinzipiellen Standpunkte nichts geändert, nur die spezielle Vergleichung von Strukturen mit bestimmten Kristalltypen wird durch sie getroffen.

Von allen derartigen Pseudosymmetrien und Pseudohomogenitäten besitzen die durch gesetzmäßige Zwillingsbildung hervorgerufenen das größte Interesse der Kristallographen. Wir betrachteten bis jetzt nur Strukturen, denen eine einzige überall gleich orientierte Translationsgruppe zugrunde liegt. Es kann aber auch sein, daß in regelmäßigen oder unregelmäßigen Abständen Homogenitätsgrenzen vorhanden sind, denen gegenüber die Translationsgruppe gesetzmäßig verschieden orientiert ist.

Es gibt Kristallographen, welche die meisten Einzelindividuen der Kristalle als derart pseudohomogen ansehen, und die Natur bietet nicht wenige Beispiele für recht innige Zwillings- bezw. Vielfingsbildung. Auf Einzelheiten brauche ich umso weniger einzugehen, als von gleichem Verlage, in dem dieses Buch erscheint, von J. Beckenkamp ein Werk über „Statische und kinetische Kristalltheorien" herausgegeben wurde, das sich im wesentlichen auf einen derartigen Standpunkt stellt. Eine rationelle Darstellungsart wird auch hier die Symmetrie der Einzelraumsysteme, das Zwillingsgesetz und die Größe der Homogenitätsperiode berücksichtigen müssen. So wenig durch die makroskopische Zwillingsbildung die Zweckmäßigkeit der Einteilung der Kristalle in 32 Klassen in Frage gestellt wird, so wenig wird durch eine derartige Strukturbewertung die Klassifikation der allein möglichen 230 homogenen Raumsysteme geändert. Besondere Rücksicht ist aber darauf zu nehmen, daß regelmäßige Viellingsbildung dieser Art nicht nur angenähert eine höhere Symmetrie erzeugen kann, son-

dern daß in Tat und Wahrheit oft Raumsysteme höherer Klassen (lediglich mit größeren Perioden) entstehen.

Ein Beispiel möge genügen. In Fig. 194 sind monokline Elementarparallelepipede derartig in gesetzmäßiger Vielfachbildung kombiniert, daß (100) Zwillingsebene ist und die Homogenitätsperiode in der a-Koordinatenachsenrichtung mit dem Identitätsabstand übereinstimmt. Die Eckpunkte sind allein mit Massenteilchen von Kugelsymmetrie besetzt. Das ganze Punktsystem besitzt jetzt die Symmetrie des Raumsystemes $\mathfrak{B}_h^5$, es sind nämlich an Symmetrieelementen die Scharen $\mathfrak{C}_2^1\ \mathfrak{C}_2^1\ \mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{C}_s^1\ \mathfrak{C}_s^2\ \mathfrak{C}_s^1$, $\mathfrak{C}_i$ vorhanden. Die Perioden der Identitätsabstände des neuen Systemes sind in der b- und c-Richtung gleich denjenigen des alten Systemes, a' steht nun senkrecht auf ihnen und überspannt 2 frühere Elementarparallelepipede. Die Massenteilchen gehören einer konstruktiven zweizähligen Punktlage an, deren Symmetriebedingung C_{2v} ist. Fig. 195

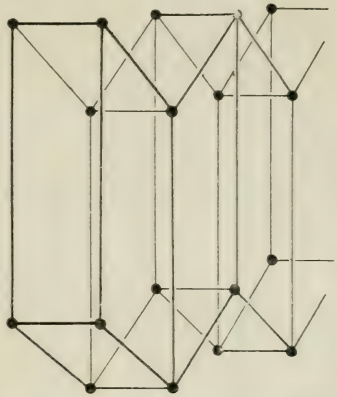


Fig. 194. Polysynthetische regelmäßige Vielfachbildung monokliner Elementarparallelepipede.

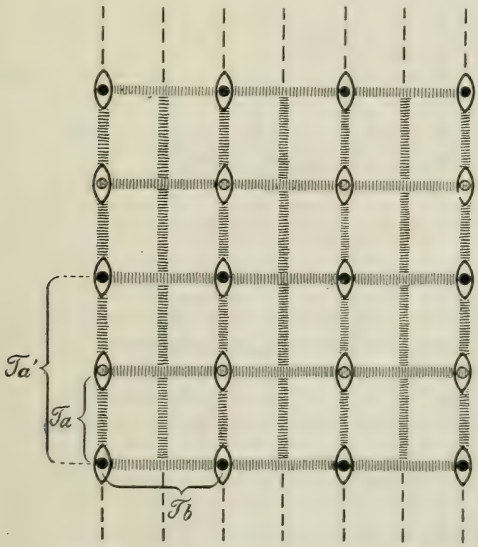


Fig. 195. Aufsicht auf eine (001)-Ebene nach rhombischer Auffassung.

zeigt die Aufsicht auf (001). Die tiefer gelegenen Punkte sind nur schraffiert gezeichnet. Die Spiegelebenen sind in gewöhnlicher Weise symbolisiert, ebenso die digonalen Drehungsachsen [001]. Die allgemeine Richtung der Schraubenachsen [100] ist am Rande angegeben. Fig. 196 zeigt eine Ebene (010) mit den Spuren der Spiegelebenen und Gleitspiegelebenen, die senkrecht darauf stehen, sowie den digonalen Drehungsachsen [010] und den in der Ebene gelegenen digonalen Schraubenachsen [100]. Schließlich stellt Fig. 197 ein Elementarparallelepiped des neuen Raumsystemes dar, mit dem Nullpunkt in der konstruktiven Punktlage.

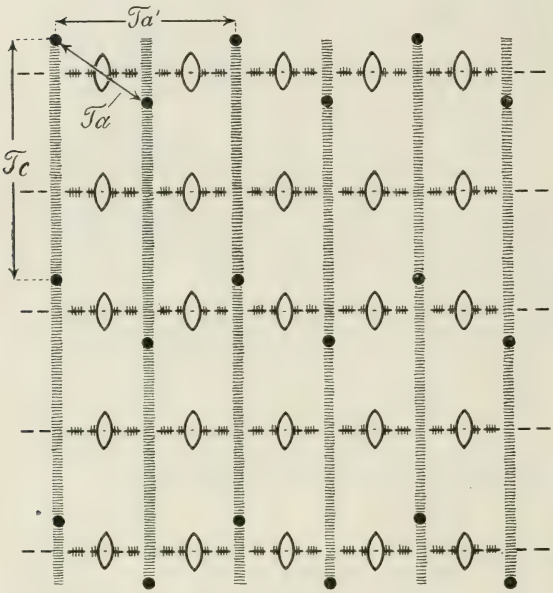


Fig. 196. (010)-Ebene des resultierenden Raumsystemes.

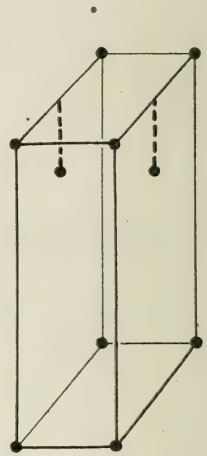


Fig. 197. Das resultierende rhombische Elementarparallelepiped mit den darin enthaltenen Atomschwerpunktslagen.

Die Frage, ob mit allen Untersuchungsmethoden homogen erscheinende Kristalle in Wirklichkeit feinsten Viellingsbau aufweisen, ist in derartigen Fällen vollkommen müßig. Wenn, wie im Beispiel der Fig. 195—197, die Zwillingsperiode selbst konstant ist, so ist theoretisch eine Unterscheidung zwischen polysynthetischen Zwillingsbildungen und Aufbau nach lediglich größer zu veranschlagenden einheitlichen Perioden oft undurchführbar. Praktischer Wert kommt derartigen Deutungen nur dann zu, wenn es sich herausstellt, daß einmal eine kleinere Raumperiode elementarer Baustein eines homogenen Gebäudes, ein andermal eine größere Periode derartiger Baustein sein können. Das Elementarparallelepiped ist dann in ersterem Falle nur ein Teil des Elementar-

parallelepipedes des zweiten Falles, ohne daß innerhalb dieses Teiles die Anordnung der Massenpunkte geändert wäre. Die symmetrische Ergänzung ist weggefallen. So ließe sich beispielsweise beim Calcit des Braggschen Modelles ein homogener Aufbau aus einem Teilsystem denken, mit eindeutiger Lage der Sauerstoffatome in den CO_3-Ebenen. Die Sauerstoffatome würden in aufeinanderfolgenden Ebenen nicht um 60^0 gegeneinander verdreht sein, die horizontalen digonalen Achsen wären mitsamt den Gleitspiegelebenen weggefallen, das Kristallgebäude würde nur mehr trigonal pyramidale Symmetrie aufweisen. Es ist nicht ausgeschlossen, daß manche meroedrisch erscheinenden Ausbildungsweisen von Kristallarten bestimmter Entstehungsbedingungen auf derartige Teilentwicklungen zurückzuführen sind. Man könnte diese Erscheinung als architektonischen Polymorphismus oder als architektonische Meroedrie bezeichnen. Von Groth nannte sie Polysymmetrie. Dichteunterschiede würden keine wahrnehmbar sein, Umwandlungspunkte würden fehlen, doch wäre beim Erhitzen eines mikroskopischen-polysynthetischen Aggregates etwa eine Homogenisierung bis unter die Sichtbarkeitsgrenze zu erwarten. Orthoklas und Mikroklin, vielleicht auch Klinoenstatit und Enstatit dürften Repräsentanten dieser Art sein.

Speziell mit den Beziehungen zwischen Zwillingsbildung und Raumgitterstruktur haben sich Mallard und Friedel beschäftigt. Leider scheint bei uns das Standardwerk von G. Friedel (1904) „Etudes sur les groupements cristallins“ wenig bekannt zu sein. Nach Friedel gibt es auch bei den Zwillingen mindestens eine relativ einfache räumliche Periode, die streng oder angenähert beiden in Zwillingsstellung zueinander stehenden Kristallteilen gemeinsam ist. Ausnahmen von dieser Regel sind selten (Hydrargillit, Eudidymit). Viererlei Hauptzwillingsarten können unterschieden werden:

1. Meroedrische Ergänzungszwillinge 1. Ordnung

Das Elementargitternetz besitzt hier an sich eine höhere Symmetrie als der Massenteilchenhaufen. Es hat ja stets holoedrische Symmetrie, die Hemiedrie oder Tetartoedrie wird durch die Punktverteilung bestimmt. Die Zwillinge sind nur charakterisiert durch über die Zwillingsgrenze hinaus konstant bleibendes elementares oder primitives Gitternetz. Die dem Einzelkristall zukommende Meroedrie (Hemiedrie oder Tetartoedrie) liegt, wie bemerkt, in der Konfiguration und gegenseitigen Lage der Massenteilchen (dem Motiv). Dieses Motiv steht in den Elementarparallelepipeden beider Kristalle in Zwillingsstellung zueinander. Einem Elementarparallelepiped mit meroedrischer Symmetrie der Massenteilchenanordnung kann man stets durch Drehungen oder Spiegelungen verschiedene Stellungen (bei gleicher absoluter Richtung gleichwertiger

isomorpher Parallelscharen der Symmetrieelemente) geben. Durch gesetzmäßigen Wechsel derartiger stellungsisomerer Elementarparallelepipede erreicht der Gesamtkomplex, als solcher betrachtet, höhere, beispielsweise holoedrische Symmetrie. Der gesetzmäßige Wechsel kann nur zu Beginn der Kristallisation, im hochdispersen Zustand, einmalig erfolgt und jeder Kern für sich weitergewachsen sein (einfache Zwillinge), oder er kann mehrfach aufgetreten sein, so daß die Zwillingsgrenzen unregelmäßige Konturen darstellen oder das Gesamtindividuum aus einer Reihe von Einzelindividuen besteht.

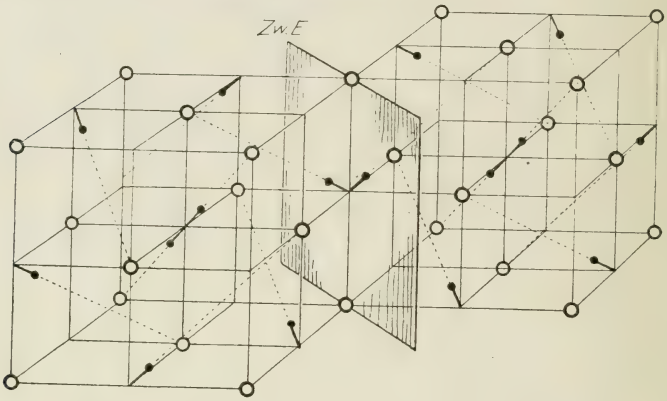


Fig. 198. Zwei Elementarwürfel des Pyrites in Zwillingstellung nach einer Fläche (110).

Ein typisches Beispiel finden wir im „eisernen Kreuz" des Pyrites. Zwillingsebene ist eine Rhombendodekaederfläche. Die einfachprimitive Elementarwürfeleinteilung setzt sich über die Zwillingsgrenze fort. Legen wir dem Pyrit die von Bragg bestimmte Struktur zugrunde, so ergibt sich das in Fig. 198 dargestellte Bild der gegenseitigen Stellung zweier Strukturwürfel eines Zwillings. Man erkennt, daß die Punktlage der Eisenatome über die Zwillingsgrenze hinaus homogen bleibt, die der Schwefelatome eine spiegelbildliche zu $(1\bar{1}0)$ ist. Derartige Zwillinge sind außerordentlich häufig. Die Quarzzwillinge mit paralleler Hauptachse gehören ebenfalls unter diese Gruppe.

2. Pseudomeroedrische Zwillinge 1. Ordnung

Das Elementargitternetz ist nahezu höhersymmetrisch, beispielsweise in Wirklichkeit triklin, aber nahezu monoklin (α und β nahezu 90°). Es besitzt also mehrere Orientierungen, die nahezu gleichwertig sind

(beispielsweise im angezogenen Falle links wie rechts einer Ebene (010)). Dann können sich diese, gerade wie im vorhergehenden Fall, assoziieren. In Wirklichkeit bleibt somit hier das Elementargitternetz über die Zwillingsgrenze hinaus nicht homogen, aber nahezu homogen. Es werden die Pseudosymmetrieelemente (Pseudosymmetrieebenen, Pseudosymmetrieachsen) zu Zwillingsebenen oder Zwillingsachsen. Beiden Individuen ist entweder eine Netzebene (Zwillingsebene) oder eine Punktreihe (Zwillingsachse) gemeinsam. Meistens weicht die auf der Pseudosymmetrieebene pseudonormal stehende Punktreihe um nicht mehr als höchstens 3—4° von der 90°-Richtung ab. Eine wirkliche Symmetrieebene müßte eine genau senkrecht darauf stehende einfache Punktreihe besitzen. (Siehe Seite 519).

Im allgemeinen werden jeweilen zweierlei korrespondierende Zwillinge möglich sein. Entweder wird die Pseudosymmetrieebene Zwillingsebene oder die Pseudonormale wird Zwillingsachse. Im ersteren Falle wird die Zwillingsebene meist zur Verwachsungsfläche, im letzteren Fall tritt als Verwachsungsebene oft eine Fläche auf, welche die Zwillingsachse und eine Normale darauf in der Pseudosymmetrieebene enthält. Albit- und Periklingesetz können als mutmaßliche Beispiele erwähnt werden.

3. Meroedrische Zwillinge höherer Ordnung (Netzmeroedrie nach Friedel)

Weder das Fundamental- noch das einfachste Elementargitternetz bleiben über die Zwillingsgrenze hinaus erhalten, wohl aber ein mehrfach primitives Netz, beziehungsweise ein Vielfaches des Elementarparallelepipedes[1]). Dieses durchgängige Gitternetz höherer Ordnung enthält eine bestimmte Zahl (n) identischer Punkte, der Zwilling heißt dann meroedrischer Zwilling n^{ter} Ordnung. Ist das gemeinsame pseudosymmetrische Gitternetz flächenzentriert oder innenzentriert, so wird nach Friedel die Ordnung mit $\frac{n}{2}$ bezw. $\frac{n}{4}$ angegeben. ($\frac{n}{2}$, wenn einfach flächenzentriert oder innenzentriert: $\frac{n}{4}$, wenn allseitig flächenzentriert). Typische Beispiele derartiger Zwillinge findet man im rhomboedrischen und kubischen Kristallsystem. Das primitive Netz ist hier nie hexagonal, ein dreifach primitives Parallelepiped von einfach hexagonalem äußeren Charakter ($\delta = 120°$ $\alpha = \beta = 90°$) läßt sich aber stets konstruieren. Die Zwillinge nach dem Spinellgesetz oder nach der Basis in der rhomboedrischen Abteilung sind nur dadurch ausgezeichnet, daß dieses multiple Elementarparallelepiped als Gitternetz beiden Individuen gemeinsam ist. Es sind das meroedrische Zwillinge

[1]) Unter Vernachlässigung der in diesem Teilnetz nicht Ecken bildenden Punkte.

dritter Ordnung. Fig. 199 veranschaulicht die Verhältnisse. Von den identischen Punkten mit maximaler Symmetrie besitzt nur $\frac{1}{3}$ gleiche Punktlage, $\frac{2}{3}$ stehen in spiegelbildlicher Stellung zueinander. Folgendes sind nach Friedel die Bedingungen für das Auftreten derartiger Zwillinge: Es muß eine Netzebene existieren, die genau senkrecht auf einer Punktreihe steht, wobei beiden nicht zu hohe Indizes zukommen dürfen. Die Ebene darf nicht Symmetrieebene des Einzelindividuums oder des primitiven Netzes sein. Im ersteren Fall entsteht ein einfaches Individuum, im zweiten Fall bilden sich meroedrische Ergänzungszwillinge erster Ordnung. Zwillinge fünfter Ordnung in der kubischen Abteilung sind bereits selten.

4. Pseudomeroedrische Zwillinge höherer Ordnung (Pseudonetzmeroedrie nach Friedel)

Diese Zwillinge stehen zu denen unter 3 im gleichen Verhältnis wie die von 2 zu denen von 1. Ein mehrfach primitives Translationsparallelepiped ist angenähert höhersymmetrisch, indem es eine auf einer Kante nahezu normal stehende Seitenfläche besitzt. Dann können die Kante Zwillingsachse oder die Fläche Zwillingsebene werden. Die Ordnung bestimmt sich wieder durch den n-fach primitiven Inhalt des nahezu höhersymmetrischen Parallelepipeds unter Berücksichtigung allfälliger Zentrierungen. Interessant und über viele Erscheinungen Aufschluß gebend sind die Wahrscheinlichkeitsberechnungen von Friedel in seinem bereits zitierten Buche S. 264ff. Es ergibt sich unter Annahme beliebiger Elementarperiodenverhältnisse zwischen 1 : 1 und 1 : 4 eine große Wahrscheinlichkeit, daß beispielsweise in rhombischen Raumsystemen eine Ebene mit einfachen Indizes quasinormal ($\pm$ 2° Abweichung) auf einer relativ einfachen Punktreihe steht. Am häufigsten sind nach dieser Berechnung Zwillingsebenen zu erwarten, die nahezu Winkel von 45°, 60° oder 54°44′ mit einer Elementarfläche bilden. Das wird dann als Pseudohexagonalität, Pseudotetragonalität oder Pseudokubität gedeutet, braucht sich aber durchaus nicht in der Elementarperiode zu kennzeichnen.

Als Beispiel betrachte man Fig. 200. Ein Elementarnetz auf (010) eines monoklinen Kristalles ist gezeichnet. AD steht quasinormal auf AB und somit auf (100). Es kann nun AD Zwillingsachse oder (100) Zwillingsebene werden. Das doppeltprimitive Parallelogramm ABCD würde sich dann nicht genau, aber angenähert über die Zwillingsgrenze hinaus fortsetzen. Der Zwilling wäre, abgesehen von der Flächenzentrierung, pseudomeroedrisch 2. Ordnung.

Wie bereits eingangs betont, fallen fast alle bis jetzt bekannten Zwillingsgesetze unter eine von diesen 4 Rubriken; ob es sich um Zwillinge 1. oder höherer Ordnung handelt, kann nur bei eingehender

Kenntnis der Elementarnetze entschieden werden. Vom Bravais'schen Standpunkte der Netzdichte aus hat Friedel für eine Großzahl von Kristallen die Diskussion durchgeführt. Die Ausnahmen (Zwillinge, die sich nur nach dem Kantennormalengesetz oder Mediangesetz erläutern lassen: Hydrargillit, Eudidymit) bestätigen durchaus die Regel. Bei diesen symmetrischen Verwachsungen weicht die als Zwillingsachse ausgesprochene Gerade nur um Minuten von einer einfachen Netzgeraden ab, indem zwei nahezu gleichwertige Flächen oder Kanten koinzidieren.

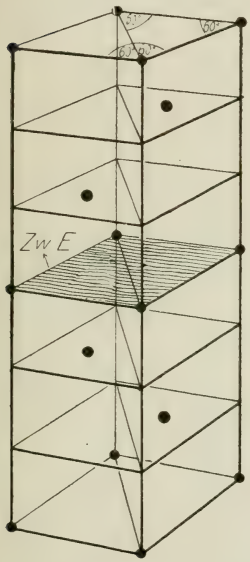


Fig. 199. Pseudomeroedrische Zwillinge nach der Basis bei rhomboedrischer Translationsgruppe.

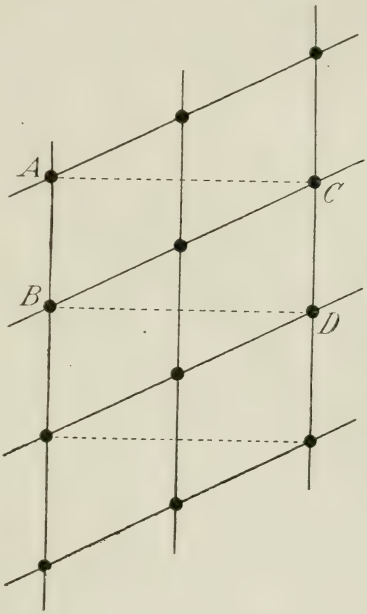


Fig. 200. Monoklines Elementarnetz auf (010) mit einer Pseudonormalen AC.

Die Zwillingsbildungen erhalten daher vom Standpunkt der Kristallographie des Diskontinuums eine außerordentlich einfache und plausible Erläuterung.

Maßgebend für die Art der Zwillingsbildung sind nach dieser, erfahrungsgemäß gestützten Annahme:

1. Die im Einzelindividuum bereits vorhandenen Symmetrieelemente, da naturgemäß Symmetrieebenen nicht als Zwillingsebenen, geradzählige Symmetrieachsen nicht als Zwillingsachsen auftreten können (beziehungsweise zu Parallelverwachsungen führen).

Tabelle. Einige einfache Zwillingsgesetze.

Kristallsystem und Kristallklasse	Meroedrische Zwillinge	Pseudomeroedrische Zwillinge
Trikline Klassen	—	Nach einer Pinakoidfläche (z. B. 010) (Albitgesetz) oder einer Koordinatenachse (z. B. [010]; Periklingesetz). Nach sonstigen einfach rationalen Elementen.
Monokline Klassen		Nach einer Fläche (100), (001) oder (h0l), bezw. nach pseudonormal darauf stehenden Kanten. Oder nach (hk0), (0kl) eventuell einfachem (hkl) bezw. nach pseudonormalen Kanten.
Hemimorphie	nach (010)	Beispiele: nach (100) Gips, Amphibol, Augit, Epidot, Orthoklas (Karlsbad); nach (001) Orthoklas (Manebach); nach (021) Orthoklas (Baveno); nach (001) und (011) und (110) Harmoton.
Hemiedrie	nach [010]	
Rhombische Klassen		Nach einer Prismenfläche oder nach pseudonormal darauf stehenden einfachen Kanten.
z. B. Hemimorphie	nach (001) Kieselzinkerz	Beispiele: nach (110) Aragonit, Markasit, Arsenkies; nach (032) Staurolith. Seltener nach Pyramidenflächen z. B. nach (232) Staurolith.
Trigon. u. hexagon. Klassen		
In Klassen ohne horizontale Spiegelebene	nach (0001), z. B. Calcit, Wurtzit, Pyrargyrit	Nach Rhomboeder- bezw. Pyramidenflächen, eventuell nach pseudonormal stehenden einfachen Kanten.
Trigonal enantiomorphe Klassen	nach [0001] Quarz (Dauphinéer) oder nach (11$\bar{2}$0) Quarz (Brasilianer)	Beispiele: nach (10$\bar{1}$1) Calcit; nach (01$\bar{1}$2) Calcit; nach (10$\bar{1}$6) Tridymit; nach (30$\bar{3}$4) ebenfalls Tridymit.
Tetragonale Klassen		Nach (h0l) bezw. (hhl).
z. B. Hemiedric II. Art	nach (001) Kupferkies	Beispiele: nach (101) Zirkon, Rutil, Zinnstein; nach (101) und (111) Kupferkies.
Paramorphe Klasse	nach (110) Scheelit	
Kubische Klassen		
In allen Klassen	nach (111) bezw. [111] Spinellgesetz	Alle Flächen mit einfachen Indizes besitzen Normalen mit einfachen Indizes. Alle Zwillinge also meroedrisch.
Hemimorphe Klasse	nach (100) Diamant, Zinkblende, Fahlerz	
Paramorphe Klasse	nach (110) Pyrit	

2. Die speziellen Konstanten der Raumsysteme (Periodenlänge. Massenverteilung). Durch sie werden die wichtigsten pseudonormal aufeinander stehenden Gitterelemente bestimmt.

Da die phänomenologische gewöhnliche Kristallographie die Grundelemente so wählt, daß die häufigsten Flächen relativ einfache Indizes erhalten, sind die Zwillingselemente (Ebene oder Achse) im allgemeinen ebenfalls relativ einfacher Art, wobei das unter 1 Gesagte berücksichtigt werden muß. Sieht man von der durch das Achsenverhältnis und die Winkelgrößen bedingten Auswahl ab, so lassen sich einige einfache Zwillingsgesetze in vorstehender, leicht verständlicher Tabelle (Seite 560), auf die einzelnen Klassen verteilt, einem allgemeinen Schema einordnen.

Schlußwort

Häufig wird dem Gedanken Ausdruck gegeben, daß die historische Entwicklung eines Wissenszweiges die zweckmäßigste Grundlage der Darstellung des betreffenden Stoffgebietes sei. Es schienen mir im vorliegenden Fall der Irrwege und Seitenwege zu viele zu sein, um darnach den Plan des Buches einzurichten. Ich habe im Gegenteil versucht, von einem modernen Standpunkt aus das Gesamtgebiet neu durchzudenken und bin so zu einer Darstellung gelangt, die den Historiker zunächst befremden wird. Manche ihm vertrauten Begriffe, die er gewohnt war, an den Anfang der Erörterungen zu stellen, findet er gar nicht oder erst an späterer Stelle. Ich hoffe aber, daß er sich überzeugen wird, daß mein Gestaltungsversuch als Versuch seine Berechtigung hat.

Eine derartige Neubearbeitung konnte ein einheitliches Ganzes nur dann liefern, wenn auf Literaturhinweise ganz verzichtet wurde. Es soll daher dieses Schlußwort dazu benutzt werden, im großen den Gang der Entwicklung mit dem Gang der Darstellung in diesem Buch zu vergleichen.

Das Problem der Kristallstrukturen läßt sich von zwei gleichberechtigten Standpunkten aus betrachten, dem der regulären Raumteilung und dem der regulären Punktverteilung. Beide Darstellungsprinzipien haben sich nebeneinander entwickelt. Es scheint mir lediglich eine Frage der Praxis, welchem Prinzip man bei der Darstellung den Vorzug geben will. Derartige Erwägungen veranlaßten mich, den zweiten Weg einzuschlagen und zugleich die Symmetrieelemente beziehungsweise die Deckoperationen als das Primäre hinzustellen. Um nicht zu vermengen, was einander nicht subordiniert, sondern koordiniert

ist, wurde von der eigentlichen Raumteilung im Fundamentalbereiche, Steroeder und Paralleloeder soviel als möglich abgesehen.

R. J. Hauy (1782, 1784 usw.) ist neben T. Bergmann der Begründer einer systematischen Untersuchung der regulären Raumteilungen. Es schließen sich daran die Untersuchungen über Kugelpackungen von W. H. Wollaston (1813), Lord Kelvin, H. Minkowsky, W. Barlow (1893 — Neuzeit), besonders aber die erschöpfenden Untersuchungen von E. v. Fedorow (seit 1885) an. Wünschenswert wäre wohl auch für diese Darstellungsart eine neue möglichst einfache Ableitung der 230 verschiedenen Fälle in bezug auf die Steroedereinteilung des Raumes.

Der zweite Weg ist von L. A. Seeber (1824), M. L. Frankenheim (1835, 1842), G. Delafosse (1843), besonders aber von A. Bravais in seiner klassischen Arbeit (1848) beschritten werden. Wir finden hier eine ganz ähnliche Entwicklung der Ideen, wie sie die einfache Kristallsymmetrielehre durchgemacht hat. In der letzteren ist man zunächst von den Flächenformen ausgegangen und hat erst später als das kennzeichnende einer Symmetrieklasse die Deckoperationen, Decktransformationsbedingungen oder Kombinationen der Symmetrieelemente allseitig anerkannt. Von dem Momente an ist die Flächenlage für die Symmetrielehre etwas Sekundäres geworden. Ebenso ist man in der Kristallstrukturlehre von bestimmten Punktanordnungen ausgegangen, hat lang und breit diskutiert, ob diese Punkte Schwerpunkte von Molekeln, Atomen oder Molekelpolymeren seien, hat die Theorie erweitern müssen, als man die Möglichkeit einsah, daß die konstruktiven Teilchenlagen verschiedenartig sein können usw. Aber auch hier sind vom prinzipiellen Standpunkte einer Symmetrielehre aus die Decktransformationsbedingungen, die Deckoperationen oder die Kombinationen der Symmetrieelemente als das Charakteristische anzusehen, die speziellen Punktlagen als etwas Sekundäres.

Mit genialem Blick hat Bravais aus der Fülle der Erscheinungen ein Problem herausgegriffen und meisterhaft bearbeitet. Er untersuchte die Schwerpunktsanordnung von Teilchen, die einander parallel gestellt sind. Er hat also, gewissermaßen gesondert, die Frage nach der Wiederholung der Identität im homogenen Diskontinuum gestellt und beantwortet. Seine Ausführungen werden nie veralten, sondern stets ein wesentlicher Teil der Kristallstrukturlehre sein. Es ist erfreulich, daß die wirklich klassische Abhandlung als Nr. 90 von „Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften“ jedermann leicht zugänglich gemacht wurde.

Wie fruchtbringend die Untersuchungen von Bravais waren, zeigen die Arbeiten der französischen Kristallographen der letzten Jahrzehnte. Gerade weil sie ein Phänomen betreffen, das alle erweiterten Strukturlehren implicite enthalten müssen, gelang es, eine Reihe von Beobachtungstatsachen durch sie zu interpretieren. Die den weiteren Ausbau

der Theorie verzögernden Folgerungen aus Bravais' Hypothese beruhen zum nicht geringen Teil auf Mißverständnissen.

In merkwürdiger Weise ist man in der Erweiterung der Theorie zunächst auf halbem Wege stehen geblieben, indem man den erzeugenden Punkten wohl Drehstellungen, aber keine Spiegelstellungen zuschrieb. Chr. Wiener (1863), L. Sohncke und C. Jordan (1867—1879) bauten in diesem Sinne die Theorie aus, L. Sohncke und P. v. Groth auch dadurch, daß sie verschiedenwertige konstruktive Punktlagen in den Kreis der Betrachtungen zogen. Erst A. Schoenflies (1891) gestaltete die Ableitung aller möglichen Raumsysteme erschöpfend. Seinem Werke verdanke ich die größte Anregung. Seine Bezeichnungsweisen sind auch beibehalten worden; die 230 Raumgruppen sind von ihm schon kurz, aber eindeutig charakterisiert worden. Man wird in meiner Darstellung naturgemäß wenig prinzipiell Neues finden, das nicht schon implizite in A. Schoenflies' Buch vorhanden ist (Kristallsysteme und Kristallstruktur, Leipzig, 1891). Wohl aber ist die Darstellung eine andere und die geometrisch analytische Untersuchung und Beschreibung der Raumsysteme hier eine weit vollständigere. Noch A. Schoenflies sah 1891 als Hauptmoment seiner Untersuchung den Beweis der Möglichkeit eines Aufbaues irgendeines Raumsystemes aus Teilchen beliebiger Gestalt an. Unseren Ausführungen liegt hingegen folgender Gedankengang zugrunde:

Der Symmetrielehre des Kontinuums steht die Symmetrielehre des Diskontinuums gegenüber. Für die erstere gilt: Jeder Punkt ist dem anderen identisch. Daraus folgt, daß es zur Ableitung aller möglichen Symmetrieverhältnisse homogener Kontinua genügt, die möglichen Kombinationen der durch einen Punkt gehenden Symmetrieelemente (die endliche Symmetriegruppen liefern) festzustellen.

In homogenen Diskontinua besitzen identische Punkte gewisse Abstände voneinander, die einzig von der Richtung abhängig sind und denen ein endlicher Wert zukommen muß. Es existiert daher an irgendeiner Stelle eines Diskontinuums ein endlicher Raum der Nichtidentität von konstantem Volumen. Es läßt sich stets in der Form eines Parallelepipeds zeichnen mit den drei kürzesten, nicht komplanaren Identitätsabständen als Kanten. Die rein mathematische Aufgabe, alle möglichen Symmetrieverhältnisse homogener Diskontinua aufzusuchen, entspricht der Aufgabe, alle möglichen Kombinationen von in einem Raume der Nichtidentität befindlichen Symmetrieelementen zu konstruieren. Die Symmetrieelemente, denen jeweilen Deckoperationen entsprechen, sind: Drehungsachsen und Schraubenachsen, Spiegelebenen und Gleitspiegelebenen, sowie Drehspiegelachsen mit Drehspiegelebenen. Gewisse Sätze, die das gleichzeitige Auftreten verschiedener Symmetrieelemente beschreiben, lassen sich zuerst ableiten. Sie können stets in eine Form gekleidet werden, die ermöglicht, alle für die einfache Symmetrielehre

notwendigen Sätze (Kontinuumvorstellung) als Unterfälle einzuschließen. Die weitere Diskussion zeigt, daß es 230 verschiedene Kombinationen von Symmetrieelementen gibt, die sich mit den Bedingungen eines homogenen Diskontinuums im Einklang befinden. Man nennt sie seit Schoenflies Raumgruppen oder Raumsysteme. Man muß nun die in einem Raum der Nichtidentität oder in einem Elementarparallelepiped (mit den kürzesten Identitätsabständen in Richtung der kristallographischen Achsen als Kanten) befindlichen Punktlagen nach ihren Symmetriebedingungen, nach ihrer Zähligkeit und nach ihren Freiheitsgraden ordnen. Dadurch erhält man eine erste Übersicht über die 230 Raumsysteme, somit das mathematisch-geometrische Rüstzeug, mit dem der Physiker, Chemiker und Kristallograph als etwas Gegebenem weiter operieren muß.

Es ist unverständlich, daß man heute noch bei den Kristallographen eine gewisse Vorliebe für die Sohnckeschen Bewegungsgruppen vorfindet. Sie sind ja natürlich in den 230 Raumsystemen von A. Schoenflies inbegriffen, es liegt aber kein stichhaltiger Grund vor, ihnen eine größere Wahrscheinlichkeit vor den anderen zuzuerkennen. A. Johnsen kommt das Verdienst zu, den Schoenfliesschen Untersuchungen auch bei den Kristallographen Eingang verschafft zu haben.

Daß Erwägungen physikalisch-chemischer Natur besonderen Schwerpunktsanordnungen erhöhte Wahrscheinlichkeit geben, ist im letzten Kapitel bemerkt worden. Hier wären die Arbeiten einer großen Zahl von Forschern zu erwähnen. Besonders durch die neuen von M. v. Laue, W. H. u. W. L. Bragg, P. Debye, P. Scherrer und P. P. Ewald ausgebauten Untersuchungsmethoden hat das Problem der Kristallstrukturen aktuelle Bedeutung erlangt. Namen wie J. Beckenkamp, F. Rinne, L. Vegard, A. Johnsen, F. M. Jäger stehen zurzeit neben den Genannten im Vordergrund.

Absichtlich bin ich auf alle diese physikalisch-chemischen Fragen nicht näher eingegangen. Das letzte Kapitel ist lediglich dazu da, um an Beispielen, die an sich richtig oder falsch sein können, die Anwendungen der in den vorhergehenden Kapiteln niedergelegten Daten darzutun. Hier steht noch alles in Fluß, die Zeit für eine Darstellung der physikalisch-chemischen Kristallographie des Diskontinuums ist noch nicht gekommen. Die Basis der Erfahrungen muß zunächst erweitert werden. Daß darauf sich das Hauptinteresse des Naturforschers konzentriert, ist selbstverständlich. Eine Diskussion dieser Verhältnisse wird aber stets eine eingehende Kenntnis der geometrischen Grundlagen voraussetzen müssen, und diese soll das Buch vermitteln helfen.

Register

A.

Abkürzung von Formeln identischer Punktscharen 415
Ableitung der 32 Kristallklassen 100 ff.
— der Translationsgruppen 104 ff.
— der Raumgruppen bezw. Raumsysteme 58 ff.
— der Zähligkeit von Achsen 34
Absorption von Punkten im Parallelepiped 22
Abstand zweier paralleler Geraden 518
— zweier nächster Ebenen 466
Abteilungen der Raumsysteme 120—122
Abweichungen von der Reihenfolge der wichtigsten Flächen 486
Achsen 44, 47
digonale 26
einseitige 59
einzählige 59
gleichwertige 47
hexagonale 29
identische 30
kristallographische 107
pentagonale 33
polare 47, 59
tetragonale 28
trigonale 27
zweiseitige 47, 59
isomorphe Parallelscharen von — 60 ff., 98, 112
Kombinationsmöglichkeiten von — 47
Tabelle der möglichen Winkel gleichwertiger — 50
Zähligkeit 30, 33
— zusammengesetzter Symmetrie 35
Achsenabschnitte der Ebene 14
Achsenraumsysteme 50, 54
Achsenscharen 60 ff., 98, 112
Achsenscharenwinkel 54
Ätzfiguren 402, 403
Ätzverfahren 551
Alaun 460, 508
Albitgesetz 557
Allgemeinste Punktlage 135
Aluminium 468
Ångströmeinheit 430
Anisotropie 1
Architektonische Meroedrie 554
Architektonischer Polymorphismus 554
Arsen 470
Arsentypus 530, 531
Atome, absorbierte 4, 22, 133, 427
das Gestaltliche der — 431
Atomgitter, kongruente 432
Atomhaufen 431
Atomkomplexe 433
Atomkomplexsymmetrie 451 ff.
Atomschwerpunkte 465
Atomschwerpunktsanordnung 427, 463
Atomsymmetrie, Veränderung der 533
Azentrische Vorgänge 549

B.

Belastung der Ebene 465, 475, 481, 486
— Tabelle 482
— der Geraden 518
Belastung und Ebenenserien im kubischen Raumsystem, Tabelle 482 ff.
Belastungsperioden 480
Berechnungen, kristallgeometrische 517—523
Bestimmung der Koordinatenwerte der Massenschwerpunkte 506
— der Molekülanzahl im Elementarparallelepiped 506, 507
— nichtkubischer Raumsysteme, Tabelle 493
— Voraussetzung für Bestimmung nichtkubischer Raumsysteme 503

Bestimmung des Raumsystems vermittels statistischer Gesetzmäßigkeiten der Flächenbegrenzung 513
— der Struktur durch Modifikationsänderungen 538
Beugungsgitter 488
Blei 468
Bleiglanz 469
Boracit 536
Braggsches Verfahren zur Bestimmung der Koordinatenwerte 506
Bravaissche Gittertypen 549
— Symbole 223

C.

Calcit 5, 433, 460, 476, 514, 546, 554
— Tabelle 515
Chemische Komplexsymmetrie 451
Cristobalit 533
$\mathfrak{C}_1$ 59, 103, 107, 123, 144
$\mathfrak{C}_2^1 - \mathfrak{C}_2^8$ 60—64, 150—153
$\mathfrak{C}_{2h}^1 - \mathfrak{C}_{2h}^6$ 88, 153—160
$\mathfrak{C}_{2v}^1 - \mathfrak{C}_{2v}^{22}$ 80, 81, 110—111, 160—176
$\mathfrak{C}_3^1 - \mathfrak{C}_3^4$ 64, 65, 227—229
$\mathfrak{C}_{3h} - \mathfrak{C}_{3h}^1$ 88, 332—333
$\mathfrak{C}_{3i}^1 - \mathfrak{C}_{3i}^2$ 69, 89, 230—231
$\mathfrak{C}_{3v}^1 - \mathfrak{C}_{3v}^6$ 81, 232—237
$\mathfrak{C}_4^1 - \mathfrak{C}_4^6$ 65—67, 255—261
$\mathfrak{C}_{4h}^1 - \mathfrak{C}_{4h}^6$ 88, 273—278
$\mathfrak{C}_{4v}^1 - \mathfrak{C}_{4v}^{12}$ 82, 83, 261—272
$\mathfrak{C}_6^1 - \mathfrak{C}_6^6$ 68, 69, 338—340
$\mathfrak{C}_{6h}^1 - \mathfrak{C}_{6h}^2$ 89, 343—344
$\mathfrak{C}_{6v}^1 - \mathfrak{C}_{6v}^4$ 84, 340—343
$\mathfrak{C}_i$ 102, 107, 123, 145
$\mathfrak{C}_s^1 - \mathfrak{C}_s^4$ 78, 79, 103, 107, 123, 146—150
$\mathfrak{S}_s^2$ 79
$\mathfrak{T}_s^2$ 79
$\mathfrak{K}_s^2$ 79
C_1 103
C_2 101
C_{2h} 101
C_{2v} 101
C_3 101
C_{3h} 102
C_{3i} 102, 103
C_{3v} 102, 103
C_4 102
C_{4h} 102
C_{4v} 102
C_6 102
C_{6h} 102
C_{6v} 102
C_s 103

D.

Deckoperationen 18, 40
Decktransformationsbedingungen 23, 40, 100
Deformation:
absolute Größe 525
homogene 540
thermische 524
Konzentrations- 524
der Struktur 523
Deformationsellipsoid der Schiebung 540
Kreisschnittebenen des — 540
Deformationsübergang vom Würfel zum Rhomboeder 530
Diamant 459, 470, 476
digonale Drehungsachsen 26, 55
— Klassen 103
— Schraubenachsen 56
digonal enantiomorph hemiedrische Klasse 101
— hemimorph hemiedrische Klasse 101
— holoedrische Klasse 101
— paramorph hemiedrische Klasse 101
— tetartoedrische Klasse 101
— — — II. Art 102
Digyre 26
Diskontinuum, starres 1
— statistisch-isotropes 1
— homogenes 1, 3
divarianter Gitterkomplex 415
doppeltprimitiv 23, 109 ff.
doppeltprimitive Elementarparallelepipede 109 ff.
— Translationsrechtecke 105, 106
Drehgleitspiegelung 37, 38
Drehspiegelachsen 35, 36, 56, 102
Drehspiegelebene 35, 78
Drehungsachsen 25, 26, 27, 41 ff., 54, 55
$\mathfrak{D}_3^1 - \mathfrak{D}_3^7$ 73, 237—241
$\mathfrak{D}_{3d}^1 - \mathfrak{D}_{3d}^6$ 86, 242—251
$\mathfrak{D}_{3h}^1 - \mathfrak{D}_{3h}^4$ 93, 333—337
$\mathfrak{D}_4^1 - \mathfrak{D}_4^{10}$ 76, 294—303
$\mathfrak{D}_{4h}^1 - \mathfrak{D}_{4h}^{20}$ 93, 304—332
$\mathfrak{D}_6^1 - \mathfrak{D}_6^6$ 76, 345—348
$\mathfrak{D}_{6h}^1 - \mathfrak{D}_{6h}^4$ 95, 348—353
D_3 101, 102
D_{3d} 102, 103
D_{3h} 102

D_4 102
D_{4h} 102
D_6 102
D_{6h} 102

E.

Ebenenabstand 466, 475
Ebenenbelastung 465, 475, 481
  Abhängigkeit von der Punktlage 476
  — vom Raumsystem 503—505
  — von der Translationsgruppe 480
Ebenen, identische 7
  Indices 13
  Kennziffer 13
  -Gleichung 13, 14, 464
  -Symbole 13, 14, 138
  der Schiebung 541
  Schnittlinien zweier — 17
  zusammengesetzter Symmetrie 35
Ebenenscharen, Winkel zweier — 517, 518
Ebenenserien, Beeinflussung durch Symmetrieelemente 505
  elementare Massenebenenserie 466
  Reduktion der — 477 ff.
  Tabelle 482 ff., 486
Eigensymmetrie der Massenteilchen 136
einfach flächenzentriert 108, 110
— primitiv 23
— primitives Tripel 104
einfache Kristallschiebung 539 ff.
Einteilung der Raumsysteme 97 ff.
Eisenglanz 546
elasto-optische Erscheinungen 550
elementare Translationen 107
Elementarparallelepipede 107
  absolute Größe 506, 512
  Anzahl der Moleküle im — 506, 507
  Beziehung des rhombischen zum monoklinen — 112
Elementarparallelepiped,
  Nullpunkt des — 137
  Volum des — 506
  monoklines 109, 110, 112
  orthohexagonales 113, 115, 223
  rhombisches 110, 111, 112
  tetragonales 118, 119
  stellungsisomeres 556
Elementarparallelogramm 464
Elementarperioden 506
Elementarschar der Punkte 107
elementare Translation 107
elementar unabhängig 107
Elementarzahl der Schiebung 544
elektro-optische Erscheinungen 551
enantiomorph-hemiedrische Klassen 101
Enstatit (Polymorphie) 554
Eudidymit (Zwillingsgesetz) 555, 559

F.

Fastkristall 431
Flächenbegrenzung 401
— formen in den 32 Kristallklassen (V. Haupttabelle) 412
— komplexe, System der gleichwertigen — 141
— normalen 402
— symmetrie 402
flächenzentriert 108
— allseitig 108
— einfach 108
Flußspat 526
Formeln, Abkürzung von — identischer Punktscharen 415
Freiheitsgrade von Punkten 136, 524
— von Flächenlagen 402
Fundamentalbereich eines Raumsystems 415

G.

Gerade, Abstand zweier paralleler — 518
  Belastung einer — 518
  Gleichung einer — 8, 9, 464
  identische 7
  Indizes der — 8
  Kennziffer 11
  Scharengleichung der — 9, 12
  Symbol 9, 138
Gesamtsymmetrie und Atomkomplexsymmetrie 451 ff.
Gittergerade, Streubild der — 522
Gitterkomplex 135, 414 ff., 433
  abgekürzte Symbole 415
  divarianter — 415
  nonvarianter einfacher (VI. Haupttabelle) 418
Gitterpunkte 3
Gitterschiebung 541
Gitterstruktur 425
Gittertypen, Bravaissche 549
Gleichung eines Punktes 5, 464
— einer Geraden 5, 8—10, 12, 464
— einer Ebene 14, 15, 464
gleichwertig 18

Gleitfläche 540, 541
Gleitkomponente 34
Gleitrichtung, Darstellung der — 79
Gleitspiegelebenen 34 ff., 57, 79, 486, 487
Gold 468
Graphische Darstellung der Raumsysteme 142—144
Graphit 460, 461, 474, 524
Grundform, Wahl der kristallographischen 124
Grundzone (Kristallschiebung) 541
Gruppierung der Raumsysteme 97 ff.
Gyren 26

H.

Habitus, pseudokubischer 252
Hauerit 460, 526
Haupttabellen:
I. Die 230 Raumgruppen mit Untergruppen 125—131
II. Die 32 Kristallklassen 133
III. Zusammengehörige Koordinatenwerte ... 143
IV. Systematik der Punktlagen ... 404—411
V. Flächenformen der 32 Kristallklassen 412
VI. Nonvariante einfache Gitterkomplexe ... 418 ff.
VII. Symmetrieverhältnisse der Verbindungen $[A(MN_3)]$ 456
VIII. Symmetrieverhältnisse der Verbindungen $[A(MN_4)]$ 457
IX. Symmetrieverhältnisse sonstiger einfacher Verbindungen 458
X. Belastung und Ebenenserien ... 482 ff.
XI. Röntgenperiodenverhältnisse 492
XII. Bestimmung nichtkubischer Raumsysteme ... 493 ff.
Helicogyren 26
Hemiedrie 101
paramorphe 486
plagiedrische 486
hemiedrische Klassen 101
Hemimorphie 101
hemimorph-hemiedrische Klassen 101
hexagonale Abteilung 113, 332
dihex.-bipyramidale Klasse 348
dihex.-pyramidale Klasse 340
hex.-bipyramidale Klasse 343
hex. enantiomorph hem. Kl. 102, 345
hex. hemiedrische Kl. II. Art 103
hex. hemimorph hem. Kl. 102, 340
hex. holoedrische Kl. 102, 348
hex. paramorph hem. Kl. 102, 343
hex. pyramidale Kl. 338
hex. tetartoedrische Kl. 102, 338
hex. tetartoedrische Kl. II. Art 102, 103
hex. trapezoedrische Kl. 345
trigonale Hemiedrie 333
trigonale Tetartoedrie 332
hexagonale Achse 26, 29—36
— Elementarparallelepiped 113, 115
— Raumgitter 481
— Säule 113
Hexagyre 26
Holoedrie 101
holoedrische Klassen 101
homogene Deformation 540
homogenes Diskontinuum 1
Homogenität 1, 2
Homogenitätsperiode 552, 553
Hydrargillit (Zwillinge) 555, 559

I.

Identität 2
Identitätsabstände 2, 3, 30, 40, 104, 105
identische Ebenen (Gleichung) 14
— Gerade — 7, 8
— Punkte — 5
Identitätsschar (Ebenen, Gerade, Punkte) 5—14
Indizes, Beziehung zur Ebenenbelastung 475
Bravaissche 223, 226
der Ebene 13, 14
der Geraden 8—11
Millersche 226
orthohexagonale 223 ff.
Rationalität der — 424
Schraufsche 223
Transformation der — 244 ff.
— der Bravaisschen Indizes in Millersche 226
— der orthohexagonalen in Millersche 226
innenzentriert 108, 110
innenkomplexartige Struktur 432
Interferenzerscheinungen von Röntgenstrahlen 488
Interferenzmuster 488, 490
Inversionszentrum 36

isomorphe Scharen, den Symmetrieelementen — 44—46
— — von Achsen 70
Isotropie, statistische 1
Isotypie 530

K.

Kaliumverbindungen 533
Kalkspat 5, 433, 460, 476, 514, 515, 533, 546, 554
Karbonatreihe 531
Kennziffer der Ebene 13 ff.
— der Geraden 11
Kieselsäuremodifikationen 533
Klassenkoordinatenwerte 141
Klassen von Raumsystemen 98
Klinoenstatit 554
Kochsalz 435—450, 469, 474, 476, 529
Kombinationsmöglichkeit von Achsen 47
komplanar 3
Komplexsymmetrie, chemische 451, 460
kongruente Atomgitter 432
Konstruktion des Schiebungsparallelepipeds 547
Kontinuität 1, 3
Kontinuum 98
Konzentrationsdeformation 524
Koordinatenachsen 134
— absolute und relative Größe der — 123
—-richtungen 104
Koordinatennullpunkt 6
Koordinatensystem, Transformation von Punkten, Ebenen, Geraden auf ein neues — 521
Koordinatentransformation 23
Koordinatenwerte 5, 141
Bestimmung der Koordinatenwerte nach Bragg 506
System gleichwertiger — 139
zusammengehörige — (III. Haupttabelle) 143
Korund 546
Kreuzungspunkt windschiefer Achsen 54
Kristallbindungskräfte 432
Kristallindividuum 425
Kristallklassen 100, 402, 403, 424
Ableitung der — 141
II. Haupttabelle 133
Zusammenfassung 103
Kristallmolekel 449
Kristallographische Achsen 107
Kristallschiebung, einfache 539 ff.
Kristallschiebung, Transformation der Indizes bei — 547
Kristallsysteme 123
kubisch 101
kubische Abteilung 354
Dyakisdodekaedrische Klasse 361
enantiomorph hemiedrische Kl. 102, 376
hemimorph hemiedrische Kl. 102, 369
Hexakistetraedrische Kl. 369
holoedrische Kl. 102, 387
paramorph hemiedrische Kl. 101, 102, 361
pentagonikositetraedrische Kl. 376
tetartoedrische Kl. 102, 354, 486
tetraedrisch pentagondekaedrische Kl. 354
— Klassen 103
paramorphe Hemiedrie 486
plagiedrische Hemiedrie 486
— Raumsysteme 120
Röntgenperiodenverhältnisse in — (Tabelle) 492
Tetartoedrie 486
Tetraedrie 486
Kupfer 468

L.

Lage O 93, 94, 96
Lage M 93, 94, 96
Lauediagramm 488, 512
Leucit 536
Lokaltrachten 475

M.

Magnesiumtypus 530
Massenebenenabstände 427
Massenebenenserie, elementare 466
Massenschwerpunkte, Verteilung der — 521
Massenteilchen, Eigensymmetrie der — 136
Massenteilchenhaufen, einfacher 426
zusammengesetzter 426
Symmetrie des — 431
Massenverteilung 463
mechanisch-elastische Vorgänge 550
mechanische Translationen 539
Tabelle 540
mehrfach primitiv 104
Meroedrie, architektonische 554
meroedrische Ergänzungszwillinge 1. Ordn. 555, 558
— höherer Ordnung 557
Methoden zur Strukturbestimmung 434

Mikroklin 554
Millersche Indizes 226
Minimalkombination der Symmetrieelemente 40
Minimalsymmetrie der Punktlage 136
Mischkristalle 450, 524
  Bildung 428
Modifikationsänderungen 1. Art 532
— 2. Art 532
Moleküle, Anzahl im Elementarparallelepiped 506, 507
— Volum 506
Molekularkonstitution 451
molekulare Struktur 433
monogonale Achsen 102
monogonal hemiedrische Klasse 103
— holoedrische Kl. 103
monokline Abteilung 109, 146
  domatische Klasse 146
  hemiedrische Kl. 123, 146
  hemimorphe Kl. 123, 150
  holoedrische Kl. 123, 153
  pediale Kl. 144
  prismatische Kl. 153
  sphenoidische Kl. 150
monovarianter Gitterkomplex 415
Moseleysches Gesetz 430

N.

n-Flächner 402
n-Punktner 414
Natriumverbindungen 533, 534
Neigungswinkel der Geraden zur Ebene (Gleichung) 518
Netzmeroedrie 557
Nichtidentität, Raum der — 4, 98
Normalenbedingung 519
Nullpunkt des Elementarparallelepipeds 137
  Beziehung von Punkten auf — 415

O.

Oktaedergruppe, verallgemeinerte 51, 77, 101
orthohexagonales Elementarparallelepiped 332
orthohexagonale Indizes (Transformationsgleichung) 224 ff.
Orthoklas 554
$\mathfrak{D}^1$—$\mathfrak{D}^8$ 77, 376—387
$\mathfrak{D}_h^1$—$\mathfrak{D}_h^{10}$ 96, 387—400
O 102
O_h 102

P.

Parallelepiped, primitives 23
— doppeltprimitives 23
— mehrfach primitives 23
Parallelscharen von Achsen, isomorphe 60, 98
Parallelverschiebung 18
Parameter der Geraden 19
— piezoelektrische — 551
paramorphe Hemiedrie 101, 486
Pentagondodekaeder 487
Periode 19
Periklingesetz 557
periodisches System der Elemente 428, 429
piezoelektrische Parameter 551
piezomagnetische Konstanten 551
plagiedrische Hemiedrie 486
polare Achsen 47
Polymorphismus, architektonischer 554
Polysymmetrie 554
primitives Parallelepiped 28, 40
primitive Translation 19
primitives Translationspaar 19
— Translationstripel 21
— Tripel 21
pseudohexagonale Kristalle 123, 525
— Translationsgruppen 123
Pseudohomogenität 552
pseudokubischer Habitus 252
pseudokubische Kristalle 525
— Translationsgruppen 123
pseudomeroedrische Zwillinge 1. Ordnung 556
— — höherer Ordnung 558
Pseudonetzmeroedrie 558
— symmetrie 552, 557
pseudotetragonale Kristalle 525
Punkte, allgemeine Lage 135, 425
— Bedingung für Lage auf Ebene 16
— Beziehung auf Nullpunkt 415
— Elementarschar 107
— Gleichungen 5, 464
— gleichwertige 134, 139
— Konstruktion identischer — 3
— identische 5
— Symbol 7, 138
Punktlage 135, 425
  Systematik der —, Haupttabelle IV 404—411
  Zähligkeit 134
Punktsymmetrie 99

Pyrit 460, 472, 474, 476, 513, 524—526, 532, 536, 556
Pyroelektrizität 549
Pyromagnetische Vorgänge 551

Q.

Quarz 533, 536, 556
Quarztypus 530, 531

R.

Rationalität der Indizes 424
Raum der Nichtidentität 98
Raumgitterelemente der Alkalihalogene (Tabelle) 525
— von Pyrit, Hauerit, Flußspat (Tabelle) 526
Raumgitter 3
hexagonales 481
rhomboedrisches 481
Raumgruppen 39
Ableitungsschema 58
Bezeichnungsweise 58
Tabelle 125
Raumsymmetrie 99
Raumsysteme 40, 124, 424
Ableitungsschema 58
Bezeichnungsweise 58
— Abteilungen der — 120—122
— Bestimmung der — 487
nach Bragg 490
nach Debye 491
nach Laue 490
Haupttabelle XII zur Bestimmung nichtkubischer Raumsysteme 493
vermittels statistischer Gesetzmäßigkeiten der Flächenbegrenzung 513
— Einteilung der — 97 ff.
— Graphische Darstellung 142
— Gruppierung der — 97
— Klassen der 98
Tabelle der zusammengehörigen Koordinatenwerte in den einzelnen Raumsystemklassen 143
ohne Symmetrieebenen 549
ohne Symmetriezentrum 549
— Röntgenperiodenverhältnisse in kubischen Raumsystemen (Tabelle) 492
— symmorphe 486
— Untergruppen 70
Reduktion der Ebenenserien 477 ff.
Reflexionsmessungen im Ultraroten 433
Reihendichte 518
relative Größe der Translationen 106
Rhombische Abteilung 160
rhombisch bipyramidale Klasse 186
— bisphenoidische Kl. 176
— hemiedrische Kl. 123, 176
— hemimorphe Kl. 123, 160
— holoedrische Kl. 123, 186
— pyramidale Kl. 160
Rhomboeder 114—117
Rhomboederbedingungen 481
Rhomboedrische Abteilung 222
hexagonaler Habitus 222
rhomboedrischer Habitus 226
Transformation der Indizes 224 ff.
rhomboedrisch ditrigonal pyramidale Klasse 232
— — skalenoedrische Kl. 242
— enantiomorph hemiedr. Kl. 103, 237
— hemimorph hemiedr. Kl. 103, 232
— holoedrische Kl. 103, 242
— paramorph hemiedr. Kl. 103, 230
— tetartoedrische Kl. 227
trigonal pyramidale Kl. 227
— rhomboedrische Kl. 230
— trapezoedrische Kl. 237
Rhomboedrische Holoedrie. Beziehung der Flächenformen zu kubisch 528
Röntgenperioden 480, 488—490, 506, 512
Haupttabelle XI, Röntgenperioden-Verhältnisse in kubischen Raumsyst. 492
Röntgenstrahlen 425, 487, 488

S.

Schiebung, einfache (Tabelle) 545
Gitterschiebung 541
Kristallschiebung 539 ff.
Ebene der 541
Elementarzahl der — 544
Transformationsgleichungen der — 542 ff.
schiebungsfähiges Gitter 541
Schiebungsparallelepiped 544
Konstruktion des 547
Schiebungsrichtung 541
Schnittlinie zweier Ebenen 17
Schraubenachse 26, 27, 55, 486, 487
Schraufsche Indizes 224 ff.
Schraubungsdrehspiegelung 37
Schraubungskomponente 26
Seriengröße 504
Serienzahl 466, 481

Silber 468
Spaltbarkeit 476
Spaltflächen 476
Sphalerit 548
Spiegelebene 34 ff.
Spinellgesetz (Zwillinge) 557
Statistik als Hilfsmittel zur Strukturbestimmung 475
Steinsalz, s. Kochsalz
stellungsisomere Elementarparallelepipede 556
Streubild der Gittergeraden 522
Struktur, molekulare 433
Strukturbestimmung 401, 475
Methoden zur — 434
— durch Modifikationsänderungen 538
Sylvin 440, 444, 447, 448, 469, 532
Symbole der Achsen (graphische Darstellung) 27 ff., 124
— der Ebene 13, 138
— der Geraden 9, 11, 138
— der Gitterkomplexe 415
— des Punktes 7, 138
Symmetrie, Atomkomplex- — 451, 460
Gesamt- — 451 ff.
Minimal- — 136
zusammengesetzte — 35
Symmetrieachsen 25
Symmetriebedingungen der Punktlagen 136
Symmetrieebenen 34, 45, 78
—, isomorphe 57
Symmetrieeigenschaften homogener Diskontinua 18, 40
Symmetrieelemente 25, 46, 134
identische — 44
isomorphe Scharen von — 44
im Diskontinuum mögliche 39
Minimalkombination der — 40
nichtidentische — 44
Teilkombination der — 44
Symmetrieerhöhung 532 ff.
Symmetrieverhältnisse der Verbindungen vom Typus A B 455
[A(MN$_3$)] (Haupttabelle VII) 456
[A(MN$_4$)] („ VIII) 457
sonstiger einfacher Verbindungen (Haupttabelle IX) 458
Symmetriezentrum 36, 41, 45, 56, 57, 78
Syngonien 123
Systematik der Punktlagen, Haupttabelle IV 404—411
Systematik gleichwertiger Flächenkomplexe 141
System gleichwertiger Koordinatenwerte 139
— — Punkte 139
$\mathfrak{S}_4^1$—$\mathfrak{S}_4^2$ 69, 252—255
$\mathfrak{S}_6^1$—$\mathfrak{S}_6^2$ 69
S_4 102

T.

Temperatur, Einfluß auf Modifikationen 532 ff.
Temperaturerhöhung, Veränderung von vektoriellen Eigenschaften bei — 536
Tensortripel 550
Tetartoedrie 101, 486
Tetraeder 487
Tetraedergruppe, verallgemeinerte 52, 53, 77, 101
Tetraedrie 486
Tetragonale Abteilung 103, 251
tetrag. bipyramidale Klasse 273
— bisphenoidische Kl. 252
— didigonal-skalenoedrische Kl. (Hemiederie II. Art) 279
ditetragonal bipyramidale Kl. 261, 304
— enantiomorph hemiedr. Kl. 102, 294
— hemiedrische Kl. II. Art 102
— hemimorph hemiedr. Kl. 102, 261
— holoedrische Kl. 102, 304
— paramorph hemiedr. Kl. 102, 273
— pyramidale Kl. 255
— skalenoedrische Kl. (Hemiedrie II. Art) 279
— sphenoidisch-hemiedr. Kl. 279
— sphenoidisch-tetartoedr. Kl. 252
— tetartoedrische Kl. I. Art 255
— tetartoedrische Kl. II. Art 102
— trapezoedrische Kl. 294
tetragonale Achse 26
Tetragyre 26
Trachten der Kristalle 475
Transformation von Punkten, Geraden, Ebenen auf neues Koordinatensystem 521
— der Indizes bei Kristallschiebung 547
Transformationsgleichungen für Indizes des hexagonalen Systems 224 ff.
Translation, elementare 107
— geometrische 18
— mechanische 539
— — Tabelle 540

Translation, primitive 19
— relative Größe der — 106
Translationenpaar, primitives 19
Translationentripel, primitives 21
Translationsfläche 540
Translationsgruppen, Anzahl in den Abteilungen 549
Translationsgruppen, Bestimmung
nach Bragg 490
nach Debye 491
nach Laue 490
— pseudohexagonale 123
— pseudokubische 123
— pseudotetragonale 123
Translationsrechtecke, doppeltprimitive 105, 106
Translationsrichtung (mechanische Translation) 540
Tridymit 533
Trigonale Abteilung 103, 107
trigonal bipyramidale Klasse 332
ditrigonal bipyramidale Kl. 333
trigonal enantiomorph hemiedr. Kl. 101, 103
— hemimorph hemiedr. Kl. 102, 103
— holoedrische Kl. 102, 333
— paramorph hemiedr. Kl. 102, 332
— tetartoedrische Kl. 101, 103
trigonale Achse 26, 27
— Hemiedrie 333
— Holoedrie 333
— Tetartoedrie 332
Trigyre 26, 27
Trikline Abteilung 107, 144
triklin hemiedrische Klasse 123, 144
— holoedrische Kl. 123, 145
— pinakoidale Kl. 145
triklines Elementarparallelepiped 112
Tripel, einfach primitives 104
Trivarianter Gitterkomplex 415
$\mathfrak{T}^1 - \mathfrak{T}^5$ 77, 354—361
$\mathfrak{T}_d^1 - \mathfrak{T}_d^6$ 87, 369—376
$\mathfrak{T}_h^1 - \mathfrak{T}_h^7$ 89, 361—368
T 102
T_d 102
T_h 102

U.

Umwandlungspunkt 533
Untergruppen 70
— charakteristische 139

V.

Valenzbindungskräfte 432
Valenzeigenschaften der Elemente 460
Variationsfähigkeit der Punktlagen 135
Vektor 550, 551
verallgemeinerte Oktaedergruppe 51, 52
— Tetraedergruppe 52, 53
Verbindung, stöchiometrische 427
Vertauschung der Indizes 138
Viellingsbildung 552, 553
vierfach primitiv 23
$\mathfrak{V}^1 - \mathfrak{V}^9$ 71—74, 110—111, 176—185
$\mathfrak{V}_d^1 - \mathfrak{V}_d^{12}$ 84—86, 279—294
$\mathfrak{V}_h^1 - \mathfrak{V}_h^{28}$ 90—93, 110—111, 186—222
V 101
V_d 102
V_h 101

W.

Wachstumsgeschwindigkeit 475
Wahl der kristallographischen Grundform 124
Winkel, mit homogenem Diskontinuum verträgliche — 48
— zwischen Achsen 46—54
— zwischen Ebenen 517, 518
— zwischen Geraden 518
Winkelkonstanz 424
Wismut 470, 476, 546
Wolfram 467
Wurtzit 548

Z.

Zähligkeit der Achse 25, 30—34
— von Punkten im Elementarparallelepiped 134
— maximale — der Punkte 135
— — für einfach primitiven Raum 401
zentrosymmetrisch 104
zentrosymmetrische Vorgänge 549
Zinkblende 459, 460, 474, 476, 529, 548
Zirkularpolarisation 549
Zone 402
zusammengehörige Koordinatenwerte 139
Zusatzgrößen 141
Zusatzkomponente 481
Zusatztranslation 141
Zwillingsbildung 520, 552 ff.
Zwillingsgesetze 519
Albitgesetz 557
Periklingesetz 557

Zwillingsgesetze
Spinellgesetz 557
Tabelle 560
Meroedrische Ergänzungszwillinge
1. Ordnung 555, 558
höherer Ordnung 557
Pseudomeroedrische Zwillinge
1. Ordnung 556
höherer Ordnung 558
Zwillingsgesetze
Netzmeroedrie 557
Pseudonetzmeroedrie 558
Zwillingsgrenze 556
Zwillingsperiode 554, 555
Zwischenebenen 466, 481. 504
zyklometrische Funktionen (Gittergleichung) 5

Verzeichnis der tabellarischen Zusammenstellungen

Tabelle der möglichen Winkel gleichwertiger Achsen 50
Verteilung von Untergruppen auf tetragonal-holoedrische Raumgruppen 95
Einteilung und Gruppierung der Raumsysteme 101, 102
Die 230 Raumgruppen mit ihren Untergruppen (1. Haupttabelle) 125—131
Die 32 Kristallklassen (2. Haupttabelle) 132, 133
Zusammengehörige Koordinatenwerte, frei von Zusatzgrößen (3. Haupttabelle) 143
Vergleichstabelle für die verschiedenartigen hexagonalen Indizes 225
Maximale Zähligkeit für einfach primitiven Raum 401
Systematik der Punktlagen und ihrer Symmetriebedingungen in den einzelnen Raumsystemen (4. Haupttabelle) 404 bis 411
Die Flächenformen (gleichwertigen Flächenkomplexe) in den 32 Kristallklassen (5. Haupttabelle) 412, 413
Die nonvarianten Gitterkomplexe (6. Haupttabelle) 419—423
Periodisches System der Elemente 429
Symmetrieverhältnisse der Verbindungen vom Typus A_1B_1 455
Symmetrieverhältnisse der Verbindungen $[A(MN_3)]$ (7. Haupttabelle) 456
Symmetrieverhältnisse der Verbindungen $[A(MN_4)]$ (8. Haupttabelle) 457
Symmetrieverhältnisse sonstiger einfacher Verbindungen (9. Haupttabelle) 458
Belastungen und Ebenenserien in den kubischen Raumsystemen für einen gleichwertigen Punktkomplex allgemeinster Lage (10. Haupttabelle) 483—485
Röntgenperiodenverhältnisse in den kubischen Raumsystemen (11. Haupttabelle) 492
Bestimmung nichtkubischer Raumsysteme bei Anwesenheit von Atomen in allgemeiner Lage (12. Haupttabelle) 493—502
Zahlenwerte für die Amplituden reflektierter Wellen beim Alaun 510
Wichtigste Kristallformen und strukturelle Berechnung des Calcits 515
Raumgitterelemente der Alkalihalogenide in ihrer Abhängigkeit von Temperatur und Konzentration 525
Funktionelle Abhängigkeit der Raumgitterelemente von Pyrit, Hauerit, Flußspat 526
Beziehung rhomboedrisch-holoedrischer Flächenformen zu kubischen 528
Isotype Reihen: 1. Magnesiumtypus 530
2. Arsentypus 531
3. Quarztypus 531
4. Karbonatreihe 531
Umwandlungstemperaturen von Na- und K-Salzen 534
Mineralien, die mechanische Translation zeigen können 540
Mineralien mit einfacher Kristallschiebung 545
Tabellarische Zusammenstellungen hinsichtlich des physikalischen Verhaltens 548
Tabelle der Zwillingsgesetze 560

Korrekturen

Seite 6, Zeile 15 und 16 von unten: „$-\frac{1}{6}$“ statt „$-\frac{1}{5}$“

„ 9, „ 1 von oben: „des Durchstoßpunktes“ statt „der Durchstoßpunkte“

„ 11, „ 11 von unten: „mit der XZ-Ebene“ statt der „YZ-Ebene“

„ 22, „ 18 von unten: „$+ V_3 (W_1 U_2 - U_1 W_2)$“ statt „$+ V_3 (W_1 U_2 - U_1 W_1)$“

„ 28, „ 1 von oben: „viererlei“ statt „vielerlei“

„ 59, „ 8 von oben: „Abstand“ statt „Umgang“

„ 59, „ 6 von unten: „Strecken“ statt „Strecke“

„ 76, „ 7 von unten: „$\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$“ statt „$\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3$, $\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^3\,\mathfrak{C}_2^2$“

„ 102, „ 13 von oben: „D_{6h}“ statt „D_{5h}“

„ 102, „ 14 von oben: „tetartoedrisch“ statt „tetardoedrisch“

„ 126, Tabelle zu $\mathfrak{B}_h^{21}$: „$\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^2$“ statt „$\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^3\,\mathfrak{C}_s^1$“

„ 145, Zeile 10 von oben: „$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$“ statt „$\frac{a}{b}+\frac{b}{2}$“

„ 146, „ 17 von unten: „III.) 0, 0, c“ statt „III.) 0, c, 0“

„ 162, „ 2 von oben: „Digonale Schraubenachsen: $[001]_{00}$“ statt „$[010]_{00}$“

„ 188, „ 11 von oben: „$(100)_{\frac{3}{4}}$“ statt „$(010)_{\frac{3}{4}}$“

„ 191, „ 10/11 von oben: „Zähligkeit jeweilen = 2“ statt „Zähligkeit jeweilen = 4“

„ 247, „ 8 von oben: „wie in $\mathfrak{D}_{3d}^1$“ statt „wie in $\mathfrak{D}_{3d}^4$“

„ 304, „ 1 von oben: „$\mathfrak{D}_{4h}$“ statt „$\mathfrak{D}_4^h$“

„ 357, „ 7 von oben: „$[111]^{\frac{5}{6}\frac{2}{3}}$“ statt „$[111]^{\frac{5}{6}\frac{3}{3}}$“

„ 402, „ 5 von oben: „im primitiven“ statt „im primitiveren“

„ 414, „ 3 von oben: „vergleichbar.“ statt „vergleichbar,“

„ 417, „ 5 von unten: „di- und trivarianter“ statt „di-trivarianter“

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

QD
911
N5

P&A
Sci.

Niggli, Paul
Geometrische Kristallographie des Diskontinuum

6